物理チャレンジ2009

理論問題

2008年8月3日（月）

理論問題にチャレンジ　**8：30〜13：30**

解答と配点

第 1 問

[I]

問 1 太陽光のうち，図 1 の円盤を通過するものが地球を照射する．その総量は，円盤の面積に太陽定数をかけて

$$(\text{単位時間に地球を照射するエネルギー}) = \underline{\pi R_{\mathrm{E}}^2 J}$$

【配点：8 点】

問 2

$$\pi R_{\mathrm{E}}^2 J = 3.14 \times (6.4 \times 10^6)^2 \times 1.37 \times 10^3 \mathrm{W/m^2} = 1.8 \times 10^{17} \mathrm{W}$$

求める割合は

$$\frac{1.6 \times 10^{13} \mathrm{W}}{1.8 \times 10^{17} \mathrm{W}} \simeq 9 \times 10^{-5}$$

$$\text{人類が消費するエネルギーの割合} = \underline{9 \times 10^{-5}}$$

【配点：8 点】

[II]

問 3 太陽の表面積は $4\pi R_{\mathrm{S}}^2$ だから，

$$P_{\mathrm{S}} = \underline{4\pi R_{\mathrm{S}}^2 \sigma T_{\mathrm{S}}^4}$$

【配点：8 点】

問 4 太陽と問題中の球面にはさまれる球殻状の空間を V とする．太陽から V に流れ込むエネルギーは (1) で求めた P_{S} である．その空間から単位時間に流れ出るエネルギーが問題の $P(R)$ である．エネルギーの流れが定常ならこの 2 つのエネルギー流量は等しいから，

$$P(R) = P_{\mathrm{S}} = \underline{4\pi R_{\mathrm{S}}^2 \sigma T_{\mathrm{S}}^4}$$

【配点：8 点】

問 5 地球と太陽の距離を R とすると，前問の結果を使って

$$J = \frac{P(R)}{4\pi R^2} = \frac{4\pi R_{\mathrm{S}}^2 \sigma T_{\mathrm{S}}^4}{4\pi R^2} = \left(\frac{R_{\mathrm{S}}}{R}\right)^2 \sigma T_{\mathrm{S}}^4$$

これを T_{S} について解き，$J = 1.57 \mathrm{kW/m^2}$ を代入すると

$$T_{\mathrm{S}} = \left(\frac{J}{\sigma}\right)^{1/4} \left(\frac{R}{R_{\mathrm{S}}}\right)^{1/2} = \left(\frac{1.37 \times 10^3 \mathrm{W/m^2}}{5.67 \times 10^{-8} \mathrm{W/K^4 m^2}}\right)^{1/4} \times \left(\frac{1.50 \times 10^{11} \mathrm{m}}{6.96 \times 10^8 \mathrm{m}}\right)^{1/2} = \underline{5790 \mathrm{K}}$$

【配点：8 点】

[III]

問 6 地球が単位時間に黒体放射するエネルギーは $4\pi R_{\rm E}^2\sigma T_{\rm E}^4$．定常状態では，(1) で計算したエネルギーとこれがつり合うとき

$$4\pi R_{\rm E}^2\sigma T_{\rm E}^4=\pi R_{\rm E}^2 J \quad T_{\rm E}=\left(\frac{J}{4\sigma}\right)^{1/4}=\left(\frac{1.37\times10^3{\rm W/m^2}}{4\times5.76\times10^{-8}{\rm W/m^2K^4}}\right)^{1/4}=2.79\times10^2{\rm K}$$

$$T_E=\underline{2.79\times10^2{\rm K}}$$

【配点：8 点】

問 7 この場合に地球が吸収したエネルギーは $0.7\pi R_{\rm E}^2 J$ だから，$T_{\rm E}$ は前問の計算式中の J を 0.7 倍したものに等しい．したがって，

$$T_{\rm E}=0.7^{1/4}\times279{\rm K}=255{\rm K}=(-18^\circ{\rm C})$$

$$T_E=\underline{2.55\times10^2{\rm K}}$$

【配点：8 点】

[IV]

問 8 地球が放射するエネルギーは前問と同じに $4\pi R_{\rm E}^2\sigma T_{\rm E}^4$. 地表に到達した太陽エネルギーは (1) で求めた $4\pi R_{\rm E}^2 J$ から，大気などで反射されて飛び去る 30% と大気に吸収される 20% を引いたもの．これに，大気の層から地球に向けて放射されるエネルギー $P_{\rm G}$ を加えたものが，地球が吸収する太陽由来のエネルギーだから

$$4\pi R_{\rm E}^2\sigma T_{\rm E}^4=[1-(0.3+0.2)]\,\pi R_{\rm E}^2 J+P_{\rm G}$$

これを整理すると

$$4\pi R_{\rm E}^2\sigma T_{\rm E}^4=[0.5]\,\pi R_{\rm E}^2 J+P_{\rm G}$$

【配点：8 点】

問 9 大気に流れ込んだエネルギーは，太陽エネルギーの 20% のエネルギーを吸収したものと地球の黒体放射のうちの割合 a を吸収したものの和であり，$P_{\rm G}$ はその半分．したがって，

$$P_{\rm G}=0.5\times\left(0.2\times\pi R_{\rm E}^2 J+a\times4\pi R_{\rm E}^2\sigma T_{\rm E}^4\right)$$

これを (8) で求めた式に代入して $T_{\rm E}$ について解くと

$$T_{\rm E}=\underline{\left(\frac{0.6J}{4\sigma(1-a/2)}\right)^{1/4}}$$

【配点：8 点】

問 10 T_{E} は問 **9** で求めたものに $a = 0.95$ を代入して，

$$T_{\mathrm{E}} = \left(\frac{0.6}{1 - 0.95/2}\right)^{1/4} \left(\frac{J}{4\sigma}\right)^{1/4} = 1.03 \times 279\mathrm{K} = 2.88 \times 10^2\mathrm{K}$$

$$T_E = \underline{2.88 \times 10^2\mathrm{K}}$$

【配点：8 点】

第 2 問

[I]

問 1 （答）半径 r の球面上で電場の強さは $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ であるから球面上を横切る電気力線の数は単位面積あたり $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ である。一方球面の表面積は $4\pi r^2$ であるから電気力線の総数は $4\pi r^2 \times \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$
【配点：8 点】

問 2 円柱の側面における電場の強さ E は対称性によって一定である。したがって側面を横切る電気力線の数は単位面積あたり E であり、総数は側面の面積 $2\pi rL$ を乗じて $2\pi rLE$。一方、直線の長さ L の部分に含まれる電荷の量は $\lambda \times L$ である。

（答）　電気力線の総数 $2\pi rLE$、円柱に含まれる電荷 λL

【配点：8 点】

問 3 円柱の側面の位置での電場の強さはガウスの法則を用いて $2\pi rLE = \lambda L/\epsilon_0$ より $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

（答）　$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

【配点：8 点】

[II]

問 4 電流 I と単位長さ当たりの電荷 λ、電荷の共通の速さ v との関係は、$I = \lambda v$ なので λ は $\lambda = I/v$ と表される。従って、長さ a の導線中の電荷量は $\lambda a = aI/v$ となり、これらの電荷が速さ v で磁束密度 B の一様な磁場中を磁場に垂直に動いていることになるので、式 (5) から長さ a の導線が磁場から受けるローレンツ力は

$$F \;=\; aI/v \times v \times B \;=\; BaI$$

である。
【配点：8 点】

問 5 点電荷の場所での磁束密度の大きさは

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

これによるローレンツ力の大きさを計算すると

$$\text{点電荷に働く力} = qvB = \underline{\mu_0 \frac{qvI}{2\pi r}}$$

でその向きは <u>導線に垂直な方向で導線の方を向く向き</u>

【配点：8 点】

問 6 磁場の中に入っている PQ と SR の部分が磁場から受ける力は相殺してゼロとなる。QR が磁場から受ける力は、問 4 より大きさは $B\ell I$、フレミングの左手の法則より向きは鉛直下方（x の正の向き）である。従って、重力と合わせて、コイルに働く力は

$$F \;=\; \underline{B\ell I \;+\; mg}$$

である。
【配点：磁場から受ける力 5 点，重力 5 点，計 10 点】

[III]

問 7 $I = -\dfrac{B\ell}{L}x$ を**問 6** で求めた力に代入すると

$$F \;=\; -\frac{B^2\ell^2}{L}\,x \;+\; mg \;=\; -\frac{B^2\ell^2}{L}\left(x \;-\; \frac{mLg}{B^2\ell^2} \right)$$

従って、

$$k \;=\; \underline{\frac{B^2\ell^2}{L}}、\quad x_0 \;=\; \underline{\frac{mLg}{B^2\ell^2}}$$

【配点：k の表式 5 点，x_0 の表式 5 点，計 10 点】

問 8 x の運動は x_0 を中心とした角振動数 ω の単振動なので、x は時間の関数として一般的に

$$x(t) \;-\; x_0 \;=\; A\cos\omega t \;+\; B\sin\omega t$$

と表される。また、このときの速度は

$$v(t) \;=\; -A\omega\sin\omega t \;+\; B\omega\cos\omega t$$

である。ここで、初期条件が $t = 0$ で $x(0) = 0$、$v(0) = 0$ なので、$A = -x_0$、$B = 0$ でなければならない。従って、

$$x(t) \;=\; \underline{x_0\,(\,1 \;-\; \cos\omega t\,)}$$

である。
【配点：6 点】

問 9 $x(t) = x_0\,(\,1\ -\ \cos\omega t\,)$ で x が単振動している場合、x の最大値は $2x_0$ なので、コイルが単振動を継続して行うためには

$$2x_0\ <\ \ell,\quad \text{すなわち}\quad \underline{\frac{2mLg}{B^2\ell^3}\ <\ 1}$$

である必要がある。
【配点：6 点】

問 10 QR が Q'R' に達した時のコイルの速さが最小になるのは、$x = \ell$ の位置から初速ゼロで重力場の中を落下する場合、すなわち、$2x_0 = \ell$ （あるいは、$\dfrac{2mLg}{B^2\ell^3} = 1$）が満たされる場合であって、 コイルの力学的エネルギーの保存則より

$$-mg\ell\ \ =\ \ \frac{1}{2}mv_m^2\ -\ mgd$$

が成り立つので

$$v_m\ \ =\ \ \underline{\sqrt{2g(d-\ell)}}$$

である。また、コイルに流れる電流は $x = \ell$ の位置から落下し始めてから、Q'R' に到達するまで一定で、その値は

$$I_0\ \ =\ \ -\frac{B\ell}{L}\,\ell\ =\ \underline{-\frac{B\ell^2}{L}}$$

である。
【配点：説明 2 点、v_m の表式 2 点、I_0 の表式 2 点、計 6 点】

[IV]

問 11 静止系からみて電荷量 λ をふくむ部分は速度 v で動いている。その部分はローレンツ収縮した結果、1m になっている。したがってローレンツ収縮しない状態ではその長さは $1\Big/\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ 倍のはずである。

$$\text{（答）}\qquad \text{長さ}=\underline{\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\ \mathrm{m}}$$

【配点：8 点】

問 12 電荷量はかわらないから、単位長さあたりの電荷量は λ をローレンツ収縮しない状態での長さ $1\Big/\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ で割って得られる。

$$\text{（答）}\qquad \text{単位長さあたりの電気量}=\underline{\lambda\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

【配点：8 点】

問 13 静止系における 1m の部分に固定された電荷量 $-\lambda$ がある。動く系からみるとその部分は $-v$ の速度で移動しており、その部分の長さはローレンツ収縮している。電荷量は変わらないから、単位長さ当たりの電荷量は $-\lambda$ をローレンツ収縮した長さ $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ で割って得られる。

$$(\text{答})\qquad \text{単位長さあたりの電気量}=\frac{-\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

【配点：8 点】

問 14 電荷の和は 問 12 と問 13 の結果から

$$\lambda\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{-\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{v^2}{c^2}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

この結果を問 3 で得られた表式に代入して電場の大きさが求まる。

$$\text{答)}\qquad E=\frac{\lambda v^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

【配点：7 点】

問 15 問 13 で求めた単位長さ当たりの固定された電荷量に速さ $-v$ をかけると電流が求まる。

$$(\text{答})\qquad I=\frac{\lambda v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

【配点：7 点】

問 16 この結果を $B=\mu_0 I/(2\pi r)=I/(2\pi\epsilon_0 c^2 r)$ に代入して

$$(\text{答})\qquad B=\frac{\lambda v}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

【配点：7 点】

問 17 問 14 より電場から受ける力の大きさは

$$qE = q \times \frac{\lambda v^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

で、その方向は導線から垂直内向き。一方、磁場から受ける力の大きさは

$$qvB = qv \times \frac{\lambda v}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

で、その方向は導線から垂直外向き。これらを比較すると、電場から受ける力と磁場から受ける力は大きさが等しく逆向きでありその和はゼロであることがわかる。

（答）$F = \underline{0}$

【配点：7 点】

第3問

[I]

問1　波の速さは

$$\underline{V=\frac{\lambda\omega}{2\pi}} \tag{4}$$

で与えられる。

【配点：8点】

[II]

問2 山のところでの速さは $V-a\omega$、谷のところでの速さは $V+a\omega$ でそれぞれ与えられる。従ってこの二つの位置での力学的エネルギーが等しいと言う関係式は、

$$\underline{\frac{1}{2}\Delta m\,(V-a\omega)^2+2\Delta m\,ga=\frac{1}{2}\Delta m\,(V+a\omega)^2} \tag{5}$$

となる。

【配点：8点】

問3 (5) から関係式

$$\omega V=g \tag{6}$$

が得られ、また、波の角振動数は、円運動の角速度 ω に等しいから

$$V=f\lambda=\frac{\lambda\omega}{2\pi} \tag{7}$$

が成り立つ。(5) 式と (6) 式から

$$\underline{V=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}} \tag{8}$$

が求まる。この関係式から、波の速さは水深に依らず、波長だけで決まることが分かる。
【配点：6点】

問4 具体的に波の周期 T と波長 λ の関係を評価してみる。**問3** で考えたように、$\lambda=2\pi/k$ 及び $T=2\pi/\omega$ の関係と (8) を使うと

$$\lambda=\frac{g}{2\pi}T^2 \tag{9}$$

の関係式が得られるので、$g=9.80\mathrm{m/s^2}$ の値を使うと $T=5\mathrm{s}$ のとき $\lambda=\underline{39}\mathrm{m}$、$T$=10s のとき、$\lambda=\underline{156}$ m となる。

【配点：6点】

問 5 問題では、運動する水の密度 ρ、その運動を引き起こす重力加速度 g、運動により生じる波の波長 λ だけに依存すると仮定して考えているので、$V \propto \rho^p g^q \lambda^r$ とおいて考える。時間、長さ、質量の次元をそれぞれ [T], [L], [M] で表すと、速度、密度、重力加速度及び波長の次元は

$$[V] = [L][T]^{-1} \quad [\rho] = [M][L]^{-3} \quad [g] = [L][T]^{-2} \quad [\lambda] = [L] \tag{10}$$

となる。ここで仮定した比例式の両辺の次元を等しいとおけば、

$$[T]^{-1}[L] = [T]^{-2q}[L]^{-3p+q+r}[M]^p \tag{11}$$

が得られる。この式から、$p = 0$, $q = 1/2$, $r = 1/2$ となるから、

$$\underline{V = \sqrt{g\lambda}}$$

これは、問 **3** で導いた表面波の速さ（8）と係数を除いて一致することに注意する。

【配点：8 点】

[III]

問 6 どの断面でも単位時間に通過する水の量は等しい（連続条件）から、

$$(h + a)(V - v) = hV \tag{12}$$

が成り立つ。ここで、a が h に比べて十分に小さく、$(a/h)^2$ 以上の高次の効果を無視する場合を考えているので

$$V - v = \frac{h}{h+a}V = \underline{\left(1 + \frac{a}{h}\right)^{-1} V} \tag{13}$$

となり、A 点での速さより波の山、B 点での速さが遅くなることが分かる。

【配点：8 点】

問 7 A 点を出て B 点を通過したとき、この二つの時刻での水の塊の力学的エネルギーが等しいことを表すと、

$$\frac{1}{2}\Delta m\, V^2 = \frac{1}{2}\Delta m\,(V - v)^2 + \Delta m\, ga \tag{14}$$

となる。従って、(13) と (14) から $(a/h)^2$ の小さい 2 次の項以上の高次の項を無視すれば、

$$\underline{V = \sqrt{gh}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{a}{h}\right) \simeq \sqrt{gh}} \tag{15}$$

の関係式が得られる。この場合の波の速さは波長には依存しない点に注意する。

【配点：8 点】

問 8 一方、津波の海中での波長を求める問題については、津波は浅水波に分類されるので、速さは (4) の関係式で与えられる。従って、波の波長は

$$\lambda = \sqrt{gh} \times T \tag{16}$$

であたえられる。周期が 30 分（1800 秒)、水深 4000 メートルを伝わる波の場合

$$\lambda = \underline{356\mathrm{km}}$$

となる。

【配点：6 点】

問 9 この問題は浅水波の速さが（15）で与えられるので、海岸の沖では水深が深く、海岸の近くでは浅いので、波の速さが沖では速く、海岸線近くでは遅くなることに注意する。更に、ホイヘンスの屈折の原理の考え方を海岸線のある場所を考えて適用すると、海岸線の近くではしだいに海岸線に垂直に進むようになり、このとき、屈折波の波面は次第に海岸線に平衡になる性質があることが知られている。

【配点：8 点】

[IV]

問 10

$$\begin{aligned}(\text{A から流入した水にする仕事}) &= \underline{P_{\mathrm{A}} S_{\mathrm{A}} l_{\mathrm{AB}}} && (17)\\ (\text{C から流出した水にする仕事}) &= \underline{P_{\mathrm{C}} S_{\mathrm{C}} l_{\mathrm{CD}}} && (18)\end{aligned}$$

【配点：8 点】

問 11 水深が h のときの速さは V であるから、A 点及び C 点での速さは図 4 に示すように、それぞれ $v_{\mathrm{C}} = V - v$，$v_{\mathrm{A}} = V + v$ で与えられる。

AB 間の運動エネルギーは $(1/2)\rho S_{\mathrm{A}} l_{\mathrm{AB}} v_{\mathrm{A}}^2$，CD 間の運動エネルギーは $(1/2)\rho S_{\mathrm{C}} l_{\mathrm{CD}} v_{\mathrm{C}}^2$. また，外からの圧力がした仕事は $P_{\mathrm{A}} S_{\mathrm{A}} l_{\mathrm{AB}} - P_{\mathrm{C}} S_{\mathrm{S}} l_{\mathrm{CD}}$ である．したがって，次の関係が成り立つ。

$$P_{\mathrm{A}} S_{\mathrm{A}} l_{\mathrm{AB}} - P_{\mathrm{C}} S_{\mathrm{S}} l_{\mathrm{CD}} = -\frac{1}{2}\rho S_{\mathrm{A}} l_{\mathrm{AB}} v_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2}\rho S_{\mathrm{C}} l_{\mathrm{CD}} v_{\mathrm{C}}^2 \tag{19}$$

これを整理して

$$\left(P_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{A}}^2\right) S_{\mathrm{A}} l_{\mathrm{AB}} = \left(P_{\mathrm{C}} + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{C}}^2\right) S_{\mathrm{C}} l_{\mathrm{CD}} \tag{20}$$

水の密度はどこも一定だから，質量保存側により，$S_{\mathrm{A}} l_{\mathrm{AB}} = S_{\mathrm{C}} l\mathrm{CD}$ が成り立つから，上の式からこの因子を落とし、$v_{\mathrm{C}} = V - v$，$v_{\mathrm{A}} = V + v$ の関係を使うと，問題で求めるべき式

$$P_{\mathrm{C}} + \frac{1}{2}\rho(V - v)^2 = P_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}\rho(V + v)^2 \tag{21}$$

が得られる。

【配点：8 点】

問 12 A 点および C 点での圧力は、$P_\mathrm{A} = P_0 + \rho g(h-a)$，$P_\mathrm{C} = P_0 + \rho g(h+a)$，で与えられる。一方、これらの A 点および C 点での水の速さは、問 6 で議論したように、4 図からそれぞれ

$$v_\mathrm{A} = V - v \simeq \left(1 + \frac{a}{h}\right) V \qquad v_\mathrm{C} = V + v \simeq \left(1 - \frac{a}{h}\right) V \tag{22}$$

で与えられるから、これらの関係式を前問の式に代入して V について解くと，再び

$$V = \underline{\sqrt{gh}}$$

が導かれる．

【配点：8 点】