物理チャレンジ2009
理論問題

2009年8月3日（月）

理論問題にチャレンジ　8：30～13：30

理論問題にチャレンジする前に下記の＜注意事項＞をよく読んでください。

問題は，大問3題からなります。問題は，一見難問にみえても，よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙，計算用紙，および封筒にも手を触れないこと。封筒の表にあるチャレンジ番号と氏名を確認すること。
2. 問題冊子は19ページである。解答冊子は9枚である。
3. すべての解答は，解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに，必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は，最終的な答のみではなく，解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき，または質問がある場合は手をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始後から200分（3時間20分）経過するまでは，原則として，途中退出はできない。200分経過（11:50）後は，退出希望者は手を挙げて監督者に知らせ，すべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は，チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上，封筒に入れ, 机上に置いて退室する。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら，ただちにすべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は，チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上，封筒に入れ，机上に置いて，監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は，持ち帰ること。

第 1 問 (80 点)

温度が高いところから低いところへの熱の移動には，伝導，対流，放射の 3 つの形態がある。このうち、放射による熱の移動とは，電磁波が運ぶエネルギーの流れのことである。電磁波は真空中でも伝わるので，太陽エネルギーが地球に伝えられるのもこの流れによる。

太陽に限らず，すべての物体は，その温度が絶対零度でない限り，その表面から電磁波を出している。温度が低い物体は波長が長く目に見えない電磁波を出す。700°C 前後の物体は赤い光を出す。さらに温度が高くなると，しだいに青い光も出すようになり，その結果，表面温度が数千度の太陽はすべての可視光領域の光が混ざった白い光を出している。このように温度によって決まるエネルギーの放射を熱放射という。

物体の熱放射のモデルとして，黒体放射あるいは空洞放射と呼ばれるものがあり，量子物理学の誕生に寄与した。この問題では，太陽と地球から出る放射はすべて黒体放射と同じ性質を持つものとする。

この黒体放射の理論によると，温度（絶対温度）が T の物体の面積 S の部分から単位時間に放射されるエネルギーは S に比例するので，これを $I \times S$ と表すことにしよう。すると，I はその物体の温度 T のみに依存し，T^4 に比例する。以上をまとめると，温度 T の物体の表面の面積 S の部分から放射されるエネルギーは単位時間に

$$IS = \sigma T^4 S$$

となる。右辺の σ はシグマと読み，$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$ は，シュテファン-ボルツマン定数と呼ばれる。

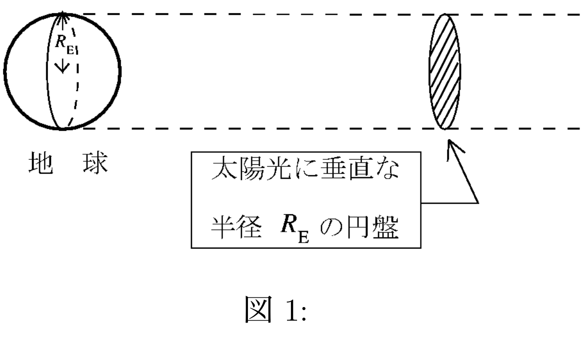

図 1:

[I]

太陽から放射状に出た太陽光も，地球の付近では，図 1 のようにほぼ平行光線になっている。したがって，地球の半径を R_{E} として（以下で添字 E は地球に関する量であることを表す），斜線で示した半径が R_{E} の円を通る光のみが地球を照射する。地球の公転軌道上にあって太陽光

線に垂直な単位面積の平面を単位時間に照射する太陽光のエネルギーは，多少の変動はあるもののほぼ一定なので，太陽定数と呼ばれる。以下で，太陽定数は J と表す．J の値は，人工衛星による測定の結果，$1.37\ \mathrm{kW/m^2}$ であることが分かった。

問 1 単位時間に地球を照射する太陽エネルギーの総量を J と R_E とを使って表せ。[ヒント：緯度や時刻によって太陽の高度が異なるため，太陽定数に地球の表面積をかけたのでは間違った答えになる。図 1 を参照しながら答えよ。]

問 2 現在，人類が消費しているエネルギーは単位時間に 1.6×10^{13} J であるといわれている。単位時間に地球を照射する太陽エネルギーに対する人類が消費するエネルギーの割合を求めよ。ただし，$R_\mathrm{E} = 6400$ km とし，有効数字 1 桁で答えなさい。

[II]

放射によるエネルギーが流れている空間の中のある領域 V を考えよう (図 2 参照)。単位時間に，この領域 V に外から流れ込んでくるエネルギーとそこから外へ流れ出るエネルギーに差があると，その領域 V のエネルギーが増減する。なぜなら，エネルギーは，生成されたり消滅したりすることがないからである（エネルギー保存則）。反対に，エネルギーの分布やその流れが時間的に変化しない状態，すなわち定常状態にあるときは，その領域 V に単位時間に流れ込むエネルギーとそこから流れ出るエネルギーの量は等しい。

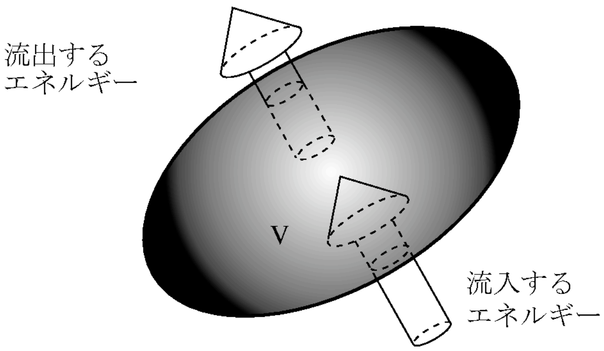

図 2:

問 3 太陽は半径が R_S，温度が T_S の球形の黒体であるとする（以下で添字 S は太陽に関する量であることを表す)。太陽表面から宇宙空間に向けて単位時間に放射されるエネルギー P_S を R_S と T_S を使って求めよ。

問 **4**　エネルギーの流れが定常的であるとき，太陽と同じ中心を持つ半径 R（$R > R_{\rm S}$）の球面（図 3 参照）を通って単位時間に外へ向けて流れるエネルギー $P(R)$ を $R_{\rm S}$ と $T_{\rm S}$ を使って表せ。太陽表面とこの球面の間の空間に出入りするエネルギーの大きさを比較して求めよ。

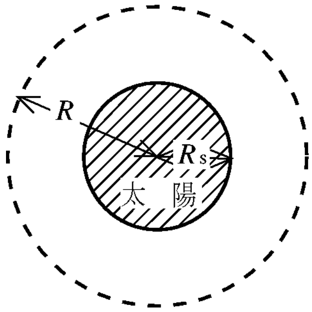

図 3:

問 **5** 太陽の表面温度は約 6000 K といわれる。問 **4** の結果と太陽定数の値から太陽表面の温度 $T_{\rm S}$ を推測するといくらになるか。ただし，太陽と地球の間の平均の距離を 1.50×10^{11} m, 太陽の半径を 6.96×10^{8} m とする。なお、以下で数値を求められているときは，すべて，有効数字 **3** 桁で答えよ。

[III]

地球にやってきた太陽光のエネルギーの 30%は雲や地表の雪などで反射されて宇宙空間に飛び去り，20%は大気に吸収され，残りが地表（海水面を含む）に到達する。

地表に到達した大部分のエネルギーは地面と海水に吸収され，それを暖める。そのままだと地球の温度は際限なく上昇して行くが，同時に地球も放射によって宇宙空間にエネルギーを放出し，単位時間に吸収するエネルギーと放出するエネルギーが釣り合うことによって地球の平均気温は一定に保たれてきた。いろいろな効果を考えながら，この温度を計算してみよう。

問 **6** 地球の表面温度はどこも一様に $T_{\rm E}$ で，一定の定常状態にあるものとする。問 **1** で求めたエネルギーがすべて地球に吸収され，地球が放射するエネルギーと釣り合う場合，$T_{\rm E}$ はいくらになるか。

問 **7** 実際には,（上で述べたように）太陽からの放射エネルギーの 30%は反射されて宇宙空間に飛び去る。もし，残りがすべて地球に吸収され，地球の放射エネルギーと釣り合うとすると，$T_{\rm E}$ はいくらになるか。

[IV]

これまでは，昼夜の温度変化，季節変化，緯度による温度の違いなどを無視した。したがって，ここで計算した結果が正しいかどうかを判断することは難しい。しかし，問 **7** で得られた温度は，15°C といわれる現実の地表の平均気温と比べてかなり低いことは確かである。実際は，大気や雲などによる温室効果によって地表が暖められるため，地表の温度はこれより高くなる。

温室効果を考えるために，地球の周りには，地球と中心を共有する半径 R_{G} の球面状の大気の層があるという簡単な大気モデルを考える（図 4 参照。以下で添字 G は，大気に関する量であることを表す）。この層は太陽からの放射エネルギーの 20%を吸収し，赤外線を中心とする地球からの放射エネルギーの大部分を吸収する。この両者を合わせてこの層が吸収したエネルギーの半分は外側の宇宙空間へ，半分は内側に放射エネルギーとして放出し，後者は再び地球に吸収されるものとする。

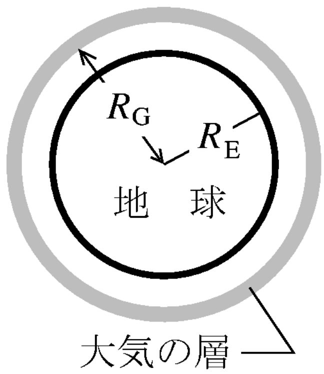

図 4:

問 8 大気の層から地球の方へ単位時間に放射されるエネルギーを P_{G} とする。このとき，地球が吸収する太陽光に由来するエネルギーと地球から熱放射されるエネルギーが等しいことを表す式を R_{E}，T_{E}，J，P_{G} を使って書け。

問 9 大気の層への地球からの放射エネルギーのうち大気の層が吸収するエネルギーの比率を $a \quad (0 \leq a \leq 1)$ とする。T_{E} を a の関数として表せ。ただし，大気の厚さは地球の半径と比べてはるかに小さいので，$R_{\mathrm{G}} = R_{\mathrm{E}}$ とせよ。

問 10 a の値は 0.95 に近いといわれている。すると，以上のモデルを使って計算される T_{E} はいくらか。

ここまでの計算では，地面や海面から熱伝導によって大気に流れ込む熱の流れと，海流と風によって運ばれる熱の流れを無視してきたので、これで満足というわけにはいかない。温室効果ガスによる気候変動の研究では，大気中のすべての熱の流れを取り入れた大掛かりなコンピュータ・シミュレーションが行われている。

第 2 問（130 点）

[I]

【電荷と電場】電気を帯びた粒子を電荷という。静止した電荷に（重力以外の）力がはたらくような空間を電場（電界）という。電場を特徴づける物理量が電場ベクトルとよばれるもので，それを以下では $\vec{E}$ と表す。これは，空間のある点においた電荷にはたらく力をその電気量で割ったものと定義され，各点での電場の強さと向きを示す。この定義により，電場ベクトルが $\vec{E}$ の点におかれた電気量が q の電荷には

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{1}$$

の力がはたらくことが分かる。なお，以下では，簡単のために，電場ベクトルを電場とよぶ。

簡単な例として，大きさが無視できる電荷（これを点電荷という）がつくる電場について考える。点電荷 Q が空間にあるとき，そこから距離 r だけ離れた点 P においた点電荷 q にはたらく力の大きさは，

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2}$$

となり，その向きは，$qQ > 0$ のとき，点電荷 Q から q に向かう向きである（図 1(a) 参照）。これをクーロンの法則という。また，ε_0 は真空の誘電率とよばれる定数で，イプシロン・ゼロと読む。

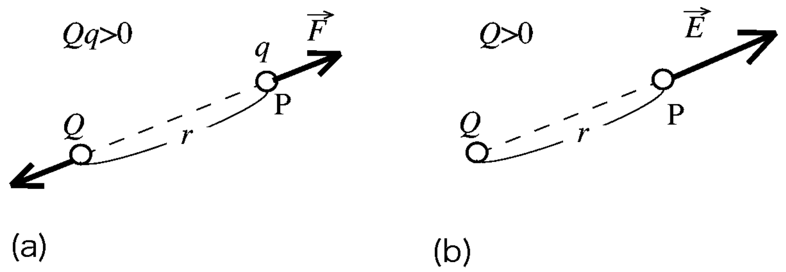

図 1:

(2) 式の両辺を q で割って，電荷 Q が点 P につくる電場の大きさは

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{3}$$

と表される。その向きは，$Q > 0$ のとき，点電荷 Q から P に向かう向きである（図 1(b) 参照）。

空間内の電場のようすを表すためには，電気力線を考えるのが便利である。電気力線は，その上の各点での接線の向きがその点の電場ベクトル $\vec{E}$ の向きを表し，電気力線に垂直な面を横切る単位面積あたりの電気力線の本数が電場の大きさ E と等しくなるようにひかれる。電気力線は，正電荷から生じて負電荷で消えることをのぞき，空間で生じたり，消えたりすることはない。また，電気力線は互いに交わることもない。

問 1 正電荷 Q から出た電気力線が　電荷 Q を中心とする半径 r の球面をつらぬいて球の内側から外側に出て行く。球面上の電場の大きさと，半径 r の球面の表面積は $4\pi r^2$ であることを用いて，正電荷 Q から出る電気力線の総数は $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ であることを示せ。

上の結果は，多くの点電荷が分布している場合にも，個々の点電荷とそれのつくる電場を重ね合わせることによって拡張することができる。すなわち，電気量 Q の電荷から出る電気力線の総数は $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ に等しい（Q が負のときは $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ 本の電気力線が電荷に入る）ということができる。これは，電場に関するガウスの法則の一つの表現である。ここで Q は点電荷であっても，ある領域に電荷がひろがって分布していてもよい。

問 2 直線上に単位長さあたり λ（ラムダと読む）の電気量の電荷が一様に分布している。直線が無限に長いとすると電場 $\vec{E}$ の方向は直線に垂直で直線を軸として軸のまわりに対称になる。図 2 に示すように直線を中心として長さ L の円柱状の領域を考える。円柱の半径を r とすると，円柱の側面を横切る電気力線の総数はいくらになるか。円柱の表面における電場の大きさ E を用いて表せ。また円柱の中に含まれる電荷はいくらか。λ を用いて表せ。

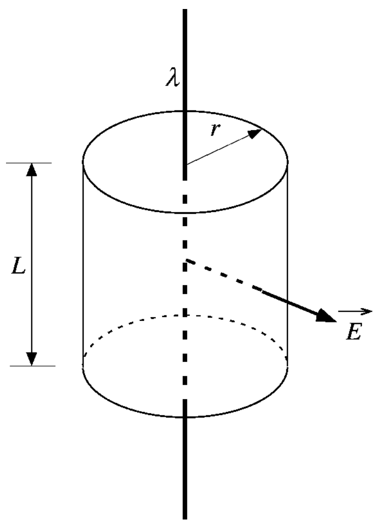

図 2:

問 3 問 **2** の結果とガウスの法則「電気量 Q の電荷からでる電気力線の総数は $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ に等しい」を用いて，直線から距離 r の位置での電場の大きさ E を求めよ。

[II]

【電流と磁場】運動する荷電粒子に（重力および電場からの力以外の）力がはたらくような空間を磁場（磁界）という。磁場を特徴づける量として磁束密度 $\vec{B}$ というベクトルがある。

電気力線と同様に，磁場のようすを表すものに磁束線というものがある。磁束線上の各点での接線の向きがその点での磁場の向きを表す。また，磁束線は，それに垂直な単位面積の平面を通過する磁束線の数がそこでの磁束密度になるように描かれる。

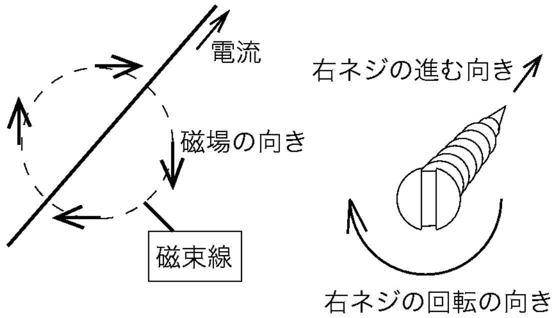

図 3:

磁場は，導線に電流を流したり，磁石を使って作られる。無限に長い直線状の導線に電流を流すと，直線を中心として直線に垂直な円形の磁束線ができる。磁場の向きは，電流の向きに進む右ねじの回転の向きである（図 3 参照）。これを右ねじの法則という。電流の強さを I とすると，そこから距離 r だけ離れた場所にできる磁場の磁束密度の大きさは

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

となる。μ_0 はミュー・ゼロと読み，真空の透磁率とよばれる。μ_0 と (3) 式に出てきた ε_0 と真空中の光の速さ c の間には

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \tag{4}$$

という関係がある。

ところで，磁束密度の向きと大きさが一様な磁場の中を磁場の向きに垂直に速さ v で動く電気量 q の点電荷があると，この電荷は磁場から，大きさが

$$F = qvB \tag{5}$$

の力を受ける。$q > 0$ の場合，図 4(a) に示したように，左手の親指，人差し指，中指を直角に開き，中指を電荷 q の速度の向き，人差し指を磁束密度の向きに合わせたとき，この力の向きは親指の向きである。磁場中の電荷にはたらくこの力と電場中ではたらく (1) 式の力を合わせてローレンツ力とよぶ。

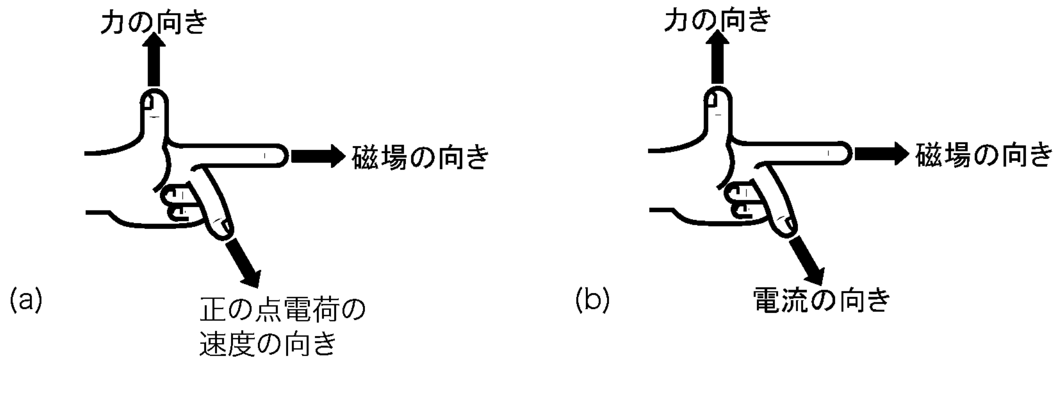

図 4:

導線の単位長さに $\lambda > 0$ の量の電荷が分布し，共通の速さ v で運動すると，

$$I = \lambda v \tag{6}$$

の強さの電流が流れる。

したがって，磁場中におかれた導線に電流を流すと，そこを流れる電荷にローレーンツ力がはたらき，その結果，導線は力を受ける。導線が磁場に垂直におかれているとき，導線が受ける力の向きを求めるときは図 4(a) の正電荷の速度の向きを (b) のように導線中を流れる電流の向きと置き換えればよい。この法則はフレミングの左手の法則とよばれる。

問 4 長さ a の直線導線に，強さ I の電流が流れている。この導線が大きさが B の磁束密度に対して垂直に置かれているとき，この導線にはたらく力が $F = BaI$ となることを示せ。

[ヒント：導線中の電荷の速さを v として，導線中の電気量をまず求めよ。]

問 5 強さ I の直線電流から距離 r 離れたところを正の電気量 q の点電荷が直線電流に平行で電流と同じ向きに速さ v で動いている。I がつくる磁場からこの点電荷にはたらく力はいくらか。また，その向きはどちらか。

問 6 図 5 で示したように，磁束密度の大きさが B の一様な磁場が，正方形 P'Q'R'S' の範囲で，xy-面に垂直に（紙面の裏から表の方へ）かかっている。xy-面内におかれた質量が m で一辺 の長さが ℓ の正方形の一巻コイル PQRS が，x 軸の正の向きの重力を受けて運動している。QR は P'S' に平行で磁場の中にあり，PS は磁場の外にある。コイルに Q から R の方へ強さ I の電流が流れるとき，コイルにはたらく x 方向の力 F（電流が磁場から受ける力と重力の和）を求めよ。ただし，重力加速度を g とし，力の符号は，重力の向きを正とする。

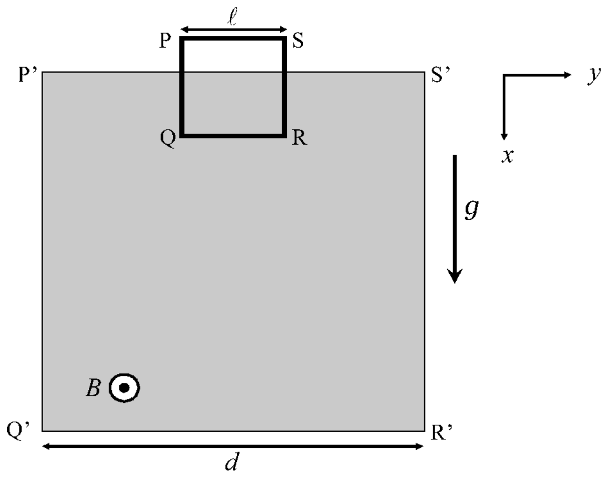

図 5:

以下の [III] と [IV] は，これまでに理解したことの応用であるが，どちらから解いても解けるはずである。解きやすい方から解きなさい。

[III]

【電磁誘導と自己誘導】以下では，図 5 の一巻きコイルの運動を考える。QR と PS は P'S'（y 方向）に平行で，コイルはその面を常に磁場に垂直にして xy-面内で運動するものとする。

QR の x 方向の位置座標を x で表し，P'S' の位置を $x = 0$ とする。初めコイルは $x = 0$ に静止していたが，$t = 0$ に動き出した。以下では，その後のコイルの運動を考える。ただし，$t = 0$ までコイルを流れる電流はゼロとする。また，以下では，コイルの電気抵抗は 0 であり，外力によってコイルに変形は生じないものとする。

磁場中においた一巻きコイルをつらぬく磁束線の数を，コイルをつらぬく磁束とよぶ。磁束線のひき方のルールによると，一様な磁束密度 B の磁場中の磁場に垂直におかれた面積が S のコイルをつらぬく磁束 $\varPhi_B$ は，

$$\varPhi_B = BS$$

と計算できる。

コイルに電流が流れるとコイルをつらぬくような磁束線ができる。したがって，電流によってコイルをつらぬく磁束ができる。この磁束 $\varPhi_I$ の計算法は数学的には複雑であるが，結果はいつもコイルを流れる電流の強さに比例するので，

$$\varPhi_I = LI$$

と表される。L はコイルの形のみによって計算できる量で，コイルの自己インダクタンスとよばれる。

磁場中におかれたコイルに電流が流れるとき，このコイルをつらぬく磁束は

$$\varPhi = \varPhi_B + \varPhi_I$$

となる．ただし，コイルを電流が流れる向きにまわした右ねじの進む向きが $\overrightarrow{B}$ と同じ向きになったときの電流の向きを正とする。図 5 の場合は，P→Q→R→S の向きに流れる電流が正である。以下でも，このように定義された電流の符号を用いることにする。すると，電流の符号によって，その向きを表すことができる。

コイルをつらぬく磁束が変化すると，その変化を妨げるための電流が流れる。その電流を流すためにコイルの中に生じる起電力を誘導起電力という。導線の電気抵抗が 0 という場合には，この電流はコイルをつらぬく磁束 $\varPhi_B + \varPhi_I$ がいつも一定になるように流れる。とくに，最初コイルが磁場の外にあり電流が流れていなかったために，コイルををつらぬく磁束が全くなかった場合には，磁束ができても

$$\varPhi_B + \varPhi_I \;\; = \;\; 0 \tag{7}$$

の関係が保たれるように電流が流れる。

図 5 の場合，磁束は面積 ℓx の範囲のみにあることを考慮すると (7) から，

$$B\ell x \; + \; LI \;\; = \;\; 0 \tag{8}$$

の関係の関係が導かれる。

問 7 (8) 式で求めた I と x の関係を用いると問 **6** で求めた力 F は

$$F = -k(x - x_0) \qquad (k > 0) \tag{9}$$

と表したときの k と x_0 を m，g，ℓ，B，L を用いて表せ（すべてを用いるとは限らない）。

問 8 $x < \ell$ が満たされている限り，(9) 式で表される力がコイルにははたらくことになり，コイルは角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ の単振動を行うことになる。$x < \ell$ が満たされている場合について，x を時間の関数として表せ。

問 **8** で述べたように，$x < \ell$ が満たされているならば，(9) 式で表される力が働いてコイルは単振動を行うが，x が ℓ を超えてしまうとコイル全体が磁場の中に入り，コイルを貫く磁束は時間に依存せず一定（$= B\ell^2$ ）となって誘導起電力は生じなくなるとともに，電流が磁場から受ける力はコイル全体としてはゼロとなる。したがって，x が ℓ をいったん超えてしまうとコイルは QR が Q'R' に到達するまで，重力のもとで自由落下することになる。

問 9 コイルが問 **8** で求めた単振動を行うためには，m，g，ℓ，B，L の間にある条件が成り立つ必要がある。その条件式を求めよ。

問 10 問 **9** で求めた条件が成り立たなくなると QR はやがて Q'R' まで到達することになるが，そのときのコイルの速さが最小になるのはどのような場合で，その最小の速さ v_m はいくらか。また，QR が Q'R' に到達した時の速さが v_m であった場合について，そのときコイルに流れている電流 の強さ I_0 はいくらか。

[IV]

【電場磁場と相対論】荷電粒子のまわりには電場ができる。その荷電粒子が一定速度で運動すると電流ができるから，周囲に磁場もつくる。つまり，荷電粒子が周囲につくる電場と磁場は，荷電粒子の運動によって変わってくる。

逆に，荷電粒子に対して静止している観測者と運動する観測者から見ると，荷電粒子のつくる電場や磁場は違って見えるのだろうか。

この問題を考えるには，アインシュタインの特殊相対性理論を使わなくてはならない。それによると，観測者に対して静止していたとき長さ l であった棒が，観測者に対して長さ方向に一定の速さ v で動くと，その棒の長さは $\sqrt{1-(v^2/c^2)} \cdot l$ と縮んで見える（ローレンツ収縮）。

問 11 直線状の導線の上を電荷が一定の速度で移動している。単位長さあたりの電荷を λ，電荷が移動する速さを v とする。電荷とともに速さ v で動く観測者がこの導線をながめたとする。線状に分布した電気量 λ の電荷の系は導線とともに静止した観測者から見ると 1 m の長さを持つが，電荷とともに動く観測者が見ると，その長さはもはや 1 m ではない。導線とともに静止していた観測者に対してその電荷は一定の速さ v で動いており，系の速度方向の長さはローレンツ収縮していたはずだからである。電荷とともに動く観測者がながめるとその部分は静止していることになるが，その長さはいくらか。

問 12 問 **11** より，静止した導線の単位長さの部分に含まれていた電気量を，速さ v で動く観測者からながめると，それは単位長さに含まれる電気量ではなくなっていることがわかる。動く観測者から見て，単位長さ当たりの電気量はいくらになるか。

問 13 電流が流れている静止した導線は電気的に中性である。それは，電線には電流として流れる電荷以外にこれとは反対符号で直線に固定された電荷があって，電流をつくっている電荷と打ち消しあうからである。このように導線に固定された電荷を速さ v で動く系から見ると，その単位長さあたりの電気量はいくらに見えるか。

問 14 電荷とともに速さ v で動く系から見ると，この導線は問 **12** と問 **13** で得られた単位長さ当たりの電気量の和で一様に帯電しているように見える。動く観測者から見て，直線から距離 r だけ離れた位置における電場の大きさ E はいくらか。

問 15 問 **13** で考えた導線に固定された電荷は，速さ v で動く観測者には電流が流れているように見える。この電流の強さ I はいくらか。

問 16 問 **15** の電流が導線から距離 r だけ離れた位置につくる磁束密度の大きさ B はいくらか。

問 17 図 6 に示すように点電荷 q が直線から距離 r だけ離れた位置（この距離は動いている観測者から見ても変わらない）に静止していたとする。この点電荷を速さ v で動いている観測者から見ると，それは速さ v で反対方向に動いているように見える。動いている観測者が見ると，この点電荷に加わるローレンツ力（電場 $\overrightarrow{E}$ と磁束密度 $\overrightarrow{B}$ による力の和）の大きさ F はどのように表されるか。

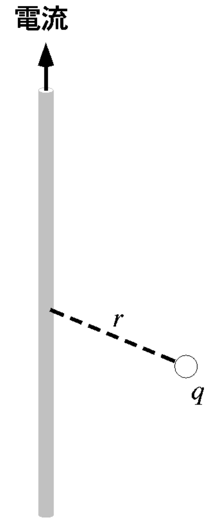

図 6:

電流が流れる電気的に中性な静止した導線から静止している点電荷 q にはたらく力は，ゼロのはずである。これを電流とともに等速度で動く観測者がながめても物理現象は変わらないはずだから，点電荷は加速されないはずである。問 **14** と問 **16** の結果は，電流とともに動く観測者から見ると，導線に対して静止した系では存在しなかった電場や磁束密度が生じるが，それらがともに電荷に作用した結果，物理現象はなにも変わらなかったことを示している。電荷

にはたらく電場と磁束密度はそれを観測する系によって違ってみえ，たとえば，電場しか存在しなかった系が，見方によっては磁束密度だけしか存在しない系になる。このように，電場と磁束密度はそれを見る観測者の動きによって互いに変換することがわかる。

第3問（90点）

[I]

「波」という言葉を聞いたとき，真っ先に思い浮かべるのが水の波であろう。この水面を伝わっていく波（水面波）はなじみの深い波ではあるが，弦を伝わる波や音波と比べ複雑である。水面波は条件によっていろいろな振る舞いをするが，ここではいくつかの仮定をもとにこの水面波の性質を調べてみよう。

水面波は，媒質の水が重力を受けながら運動することによってできる。水面波が他の波と違って複雑であるのは，媒質の周期運動が2次元的になるからである。弦を伝わる波は，媒質である弦が波の進行方向に垂直に振動する横波である。空気中を伝わる音波は，媒質である空気が波の進行方向に平行に振動する縦波である。これに対して水面波では水の運動は進行方向に平行な要素と垂直な要素を合わせもつ。

水面波は水面が上下するから，水の運動には波の進行方向に垂直な成分があることは確かである。一方，海水浴に行って浮き輪につかまって浮いてみると，波の山の部分で浮いているときは岸の方へ動かされ，波の谷の部分で浮いていると沖の方へ動かされることを経験するから，波の進行方向に平行な水の運動があることも確かである。

一般にこのような運動として考えられるのは鉛直面内のだ円軌道に沿っての運動であるが，ここではまず，水は図1のように等速円運動していると考えてみよう。ただし，波は右に向かって速さ V で進んでいるとする。

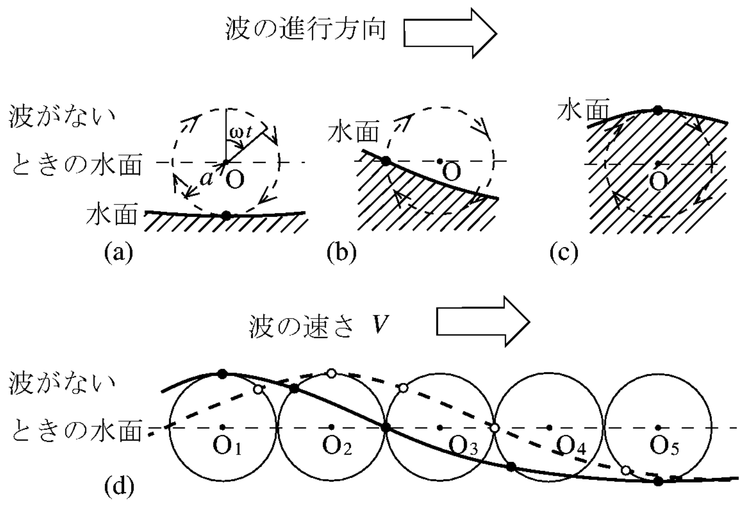

図 1:

図1(a)〜(c) において，破線で示した円の中心Oは空間に固定されている。(a) は，波の谷がOの下に来たときのようすを示す。このとき，水面の最下点にあった水のかたまり（黒丸で表す）は，時間とともに円軌道に沿って時計回りに進み，やがて，(b) のようにOと同じ高さになる。周囲の水も黒丸の水のかたまりとともに上昇する。さらに時間が経つと，黒丸の水のかたまりは，(c) のようにOの真上に至り，そのときこの水のかたまりは波の山の頂上にある。

水面波の表面付近では，図 1(d) に示したように，至る所で水はこのような円運動をしている。ただし，円運動の半径は，一般に，中心の位置が深くなると小さくなる。このような波は波長と比べて水深が大きいときにできるので，深水波とよばれる。

あるとき，この図の実線で示したような波が来たとする。このとき，水面上の黒丸で示したところにあった水のかたまりのそれぞれは，その後，円運動をしながら白丸の位置に移動したとする。これらの白丸を結んでできる破線がそのときの新しい波の水面である。破線の水面は実線の水面を右へ平行移動したものになっている。円軌道の半径を a とし，水のかたまりが単位時間に進む角度（単位はラジアン）を ω とする（この ω を角速度といい，単位は rad/s である）。

問 1 波の周期は周期運動する媒質の周期のことである。波の波長を λ とするとき，波の速さ V を a，ω，λ を使って表せ（ただし、すべての量を使う必要はない）。

[II]

弦を伝わる波や音波など，多くの場合，波の速さは媒質の性質のみで決まり，波長が異なるすべての波に共通であるとして扱われている。しかし，真空中では波長によらずに共通の速さで伝わる光も媒質中では波長によって速さが変化する。プリズムを使って太陽光をスペクトルに分解できるのもガラス中の光の速さがその波長によって異なるからである。これから考える水面波の速さも波長に依存する。まず，深水波の場合にその関係を導いてみよう。

水面波に固定された座標系から，この波と水の円運動をみてみよう。そのようすを図 2 に示す。この座標系では，水面は波の形を保ったまま静止しているが，これまで図 1 で考えた中心が 1 つの水平軸に固定されていた水の円軌道は，ここでは速さ V で左に運動している。したがって，この座標系での水の運動は半径 a の円運動と速さ V での左向きの平行移動を重ね合わせたものである。

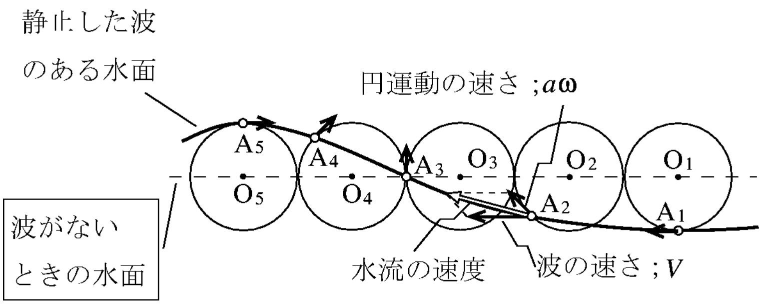

図 2:

図 2 に描かれた円の接線の向きの多数の矢印は，白丸の位置にある水のかたまりの円運動の速度ベクトルで，実際の水の速度ベクトルはこれに左向きの一様な速度 $\vec{V}$ の運動が重なるため，水の速度ベクトルは A_2 のところにつけた白抜きの矢印で示すように，水面に接する向きになる。すなわち，この座標系で見ると水は水面に沿って上下に蛇行しながら流れる。

ただし，このような説明が有効であるのは，波の山の A_5 につけた矢印の長さが，$\vec{V}$ の矢印より短い場合に限られる。この条件は式で書くと，$a\omega < V$ となる。

問 2 図2の白丸（小さな円）は，質量が Δm の水の小さなかたまりであるとする。このかたまりが A_1 の位置にあるときと A_5 の位置にあるときの速さを，それぞれ，a，ω，V を使って表した後，水には重力以外の外力ははたらかないため，この2つの位置での力学的エネルギーが等しいということを表す式を書け。ただし，重力加速度を g とする。

問 3 前問の結果を使って，波の速さ V と波長の関係を導け。

問 4 前問の結果を使うと，周期5秒の波と10秒の波の波長は，それぞれいくらになると予想されるか。ただし，重力加速度は $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ とする。

物理学における法則とは，物理量の間の関係である。力学の場合には，物理量は質量 [M]，長さ [L]，時間 [T] などの基本次元，あるいは速度 $[\mathrm{LT^{-1}}]$，加速度 $[\mathrm{LT^{-2}}]$，密度 $[\mathrm{ML^{-3}}]$ などのような組み合わせ次元をもち，長さ，時間，質量の p 次，q 次，r 次の次元をもつ量 C を $[C] = [\mathrm{L}^p\mathrm{T}^q\mathrm{M}^r]$ と表す。このような次元のみの関係式を次元式あるいは次元関係式という。このような次元関係式を使うと物理量の間の関係を導くことのできる場合がある。

問 5 ここでは、深水波の速さ V が運動する水の密度 ρ，その運動を引き起こす重力加速度 g，運動により生じる波の波長 λ だけに依存すると仮定して，次元関係式を $[V] = [g^p][\lambda^q][\rho^r]$ と表し，両辺を基本次元で書き直すことによって，p，q，r を決め，問 **3** で得られた結果を再導出せよ。ただし、問３の解に無次元の定数が出ていたら、その定数は1として比較せよ。

[III]

これまで，水は円運動するとしてきた。また，表面での水の運動のみを考えてきた。しかし，水底の影響を受けると，円運動は不可能になる。例えば，水平な水底があったとき，その近くでは水は水平方向にしか運動できない。水面付近では，水面が上下しているから，水の上下運動が完全になくなるわけではないが，水の浅いところでは，水は近似的に水平方向にのみ運動すると考えてよいだろう。このような波を浅水波とよぶ。今度は，浅水波の性質について考える。なお，現実の水は水底との摩擦と水の粘性のために，水底に接するところでは振幅が小さくなるが，ここでは水の粘性が無視できるという理想化を行う。そこで，水はどの深さでも水平方向に同じように振動するものとする。

浅水波の場合でも，海水浴での経験から，水は波の山の部分では波の進行方向に，谷の部分では波の進行方向とは逆向きに動くことがわかる。そのときの振動のようすを図3(a) に示す。この図で，矢印は速度ベクトルを表す。ここでも，波は右向きに速さ V で進んでいるとする。

[**II**] と同じように，水面波と共に動く座標系で水の運動を考えることにする。そのときのようすを図3(b) に示す。ここでは，それぞれの場所での水の速さは，図3(a) に矢印で示したものと速さ V の左向きの平行移動を重ね合わせたものである。すると，水は，場所によって速さが異なるものの，左向きに動いており，水深がちょうど平均の水深 h となる位置Aでの水流の速さは V となり，波の山の位置Bでの水流の速さは $(V - v)(< V)$ となる（v の意味は図3(a) を参照せよ）．以下では，平均の水深から測った水面波の山の高さ，谷の深さを a とする。

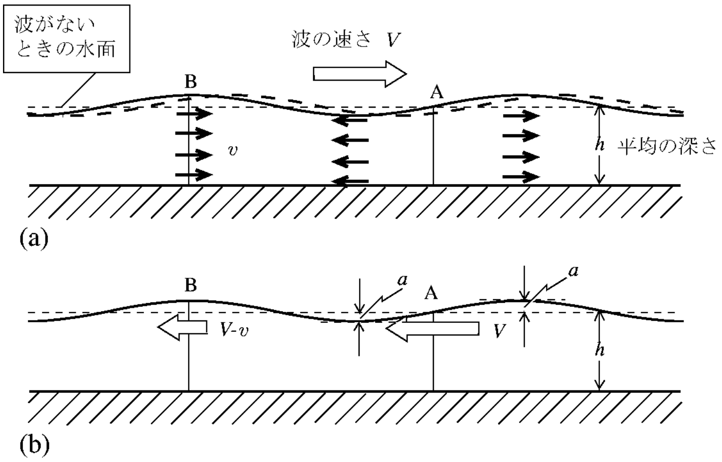

図 3:

問 6 図 3(b) に示したどの鉛直断面でも単位時間に通過する水の量は質量保存則により等しくなる。この条件を用いて位置Bでの水の速さ $(V-v)$ を位置Aでの速さ V と a，h を使って表せ。

問 7 質量が Δm の小さな水のかたまりが水の表面に沿って A 点を出て B 点を通過した。この 2 つの時刻で水のかたまりの力学的エネルギーが等しいことを使って，この波の速さ V と平均の水深 h の関係を与える式を求めよ。また，(a/h) は 1 に比べて十分小さいので，最後の結果では $(a/h)^2$，および，それより高次の項は無視せよ。そのために必要があったら，1 に比べて十分小さな数 a があるとき，$(1+a)^b \simeq 1+ba$ と近似できることを使え。

問 8 しばしば地震に関連して観測される津波は水深と比べて波長が十分長いので浅水波に分類される。あるとき，周期が 30 分の津波が観測された。このとき，波長は、水深 4000 メートルの海ではどの程度の長さになるか求めよ。このとき、重力加速度は $g = 9.80\mathrm{m/s^2}$ として計算せよ。

問 9 海岸線を遠くから眺めたとき、海岸に押し寄せる波の波面は海岸線に平行になることが観測される。海岸線，海岸付近の海底についての適当なモデルをつくり，問 **7** の結果を使って，この理由を説明せよ。

[IV]

これまで，水面近くの水の流れを考えてきたが，図 3 のように水の流れが深さによって変わらないときには，水底近くの流れについてもエネルギーの考察を行い，これまでと同じ結果を導くことができる。ただし，水面からの深さによって水の圧力が異なることを使わなくてはならない。

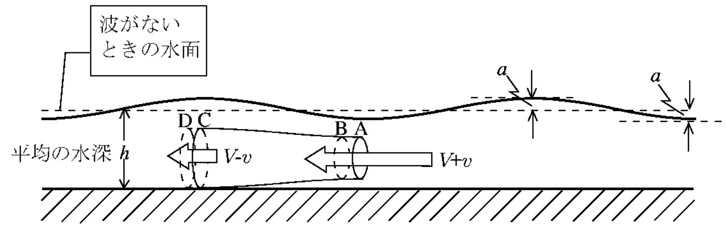

図 4:

図4のように，水が流れている空間に固定された仮想的な管ACを考える。ただし，Aは水面波の谷の最下点の下，Cは水面波の山の最高点の下にあるものとする。波がなく静止していた水の表面から測った山の高さ，谷の深さはともにaであったとする。Aから入った水はCから出て行き，管の側面を通して水が流れ込むことも，流れ出ることもないものとする。このような仮想的な管を流管という。

あるときAから流入した水がBに至る間に，Cから流出した水がDに至ったとする。AおよびCでの管の断面積をそれぞれS_{A}，S_{C}とし，また，管のAB間とCD間の長さを，それぞれ，l_{AB}，l_{CD}とする。水の密度はどこも一様にρであるとして以下の問いに答えよ。

問 10 この間にAの点での水の圧力P_{A}が管内の水にした仕事はいくらか。また，Cの点で圧力P_{C}が管から流出した水にした仕事はいくらか。

問 11 前問の仕事の差Wが0でないとすると，それはAC間にあった水がBD間に移動する間にこの水に力学的エネルギーとして蓄えられる。しかし，BC間は共通だから，WはAB間にある水のエネルギーE_{AB}とCD間にある水のエネルギーE_{CD}を使って書き表すことができる。水の密度ρは至る所一定であるとして，次の式を導け。

$$P_{\mathrm{C}}+\frac{1}{2}\rho(V-v)^2=P_{\mathrm{A}}+\frac{1}{2}\rho(V+v)^2$$

問 12 P_{A}，P_{C}を水の密度ρ，重力加速度g，平均の水深h，波の振幅aを使って書き直し，問**7**の結果を再導出せよ。

以上，水面波の深水波と浅水波という典型的な2つの振る舞いについて考えた。波長がさらに短いさざ波のような場合には水の表面張力の作用により，水面波の速さが深水波で求めた値とは異なってくる。私たちにもっとも身近な自然に起こる水の波はさらに複雑で難しい問題を含んでいる。

（余　白）