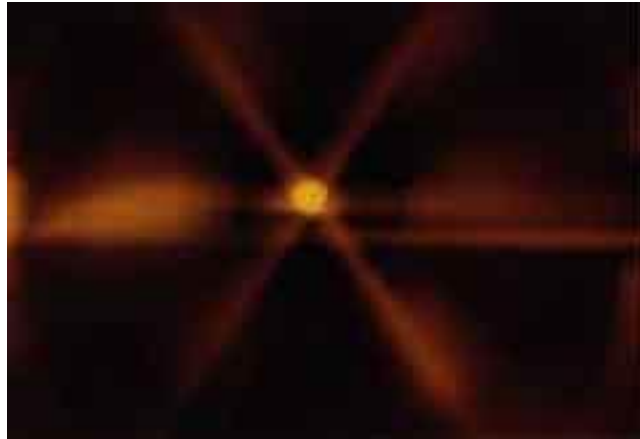


理論第2問 ドップラーレーザー冷却と光学的シロップ

本問の目的は、いわゆる「レーザー冷却」と「光学的シロップ」の現象を理解するための簡単な理論を展開することである。同じ振動数のレーザー光線を反対方向に照射することによって、典型的にはアルカリ金属のような中性原子のビームを冷却することに関わるものである。これは1997年チュウ (S. Chu), フィリップ (P. Phillip), コーヘン-タノウジ (Cohen-Tannouji) のノーベル物理学賞受賞となった研究の一部である。



上の像は、対向するレーザー光線の3つの対が互いに直行して交わっているところに捕獲されたナトリウム原子を表している（中心部の明るい点）。捕獲部分は「光学的シロップ」と呼ばれる。なぜなら散逸的な光学的力は、シロップの中を運動する物体にかかる粘性抵抗力に似ているからである。

本問では、原子に入射する光子と原子の間の相互作用による基本的な現象と、一次元の散逸機構の基礎について解析する。

第I部:レーザー冷却の基礎

$+x$ 方向に速度 v で運動する質量 m の原子を考える。簡単化して問題を一次元とし、 y , z 方向の運動を無視する（図1）。原子は二つのエネルギー準位をもつ。最低エネルギー状態のエネルギーは0であり、励起状態のエネルギーは $\hbar\omega_0$ ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$) である。原子ははじめ最低エネルギー状態にある。実験室系

（実験室に固定された座標系）で振動数 ω_L のレーザー光線が $-x$ 方向を向いて原子に入射したとする。量子力学的には、レーザー光は多数の光子からなり、それぞれエネルギー $\hbar\omega_L$ と運動量 $-\hbar q$ をもつ。光子が原子に吸収されるが、のちに自然に放射される。その放射は $+x$ 方向と $-x$ 方向に等確率で起こる。原子は非相対論的速さ v ($v/c \ll 1$: c は光速)で動いているので、 v/c の一次の項まで考えることにする。また、 $\hbar q/mv \ll 1$ であるとする。すなわち、原子の

運動量は1個の光子の運動量よりもずっと大きい。答を書くときは、これら二つの量、すなわち、 v/c 、 $\hbar q/mv$ について一次の補正まで考える。

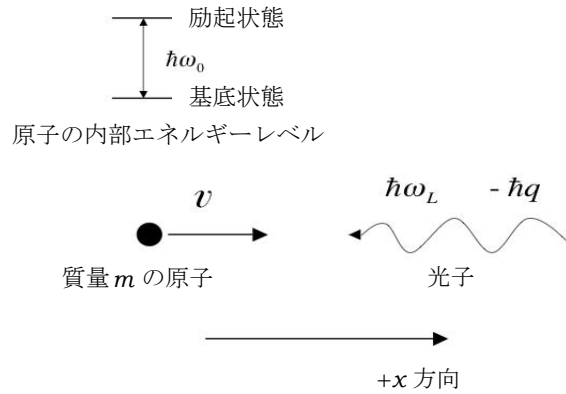


図 1: $+x$ 方向へ速度 v で動いている質量 m の原子と、エネルギー $\hbar\omega_L$ 、運動量 $-\hbar q$ の光子の衝突を考える。原子は、内部にエネルギー差 $\hbar\omega_0$ の 2 つのエネルギー準位をもつ。

適当な速度で動いている原子から見ると、レーザー光の角振動数 ω_L は原子のエネルギー遷移に必要な角振動数に一致する。
以下の問に答えよ。

1. 吸収

1a	光子吸収を起こすための角振動数に対する条件を書き下せ。	0.2
1b	実験室系で見て、光子吸収後の原子の運動量 p_{at} を書き下せ。	0.2
1c	実験室系で見て、光子吸収後の原子の全エネルギー（運動エネルギーと吸収エネルギーの和） ε_{at} を書き下せ。	0.2

2. $-x$ 方向への光子の自然放射

照射された光子を吸収後、いくらか時間がたった後、原子が $-x$ 方向へ光子を放射するとする。

2a	実験室系で見て、 $-x$ 方向へ放射された後、放射光子のエネルギー ε_{ph} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

2b	実験室系で見て、 $-x$ 方向へ放射された後、放射光子の運動量 p_{ph} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

2c	実験室系で見て、 $-x$ 方向へ放射された後、原子の運動量 p_{at} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

2d	実験室系で見て、 $-x$ 方向へ放射された後、原子の運動エネルギー ε_{at} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

3. $+x$ 方向への光子の自然放射

照射された光子を吸収後、いくらか時間がたった後、今度は原子が $+x$ 方向へ光子を放射するとする。

3a	実験室系で見て、 $+x$ 方向へ放射された後、放射光子のエネルギー ε_{ph} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

3b	実験室系で見て、 $+x$ 方向へ放射された後、放射光子の運動量 p_{ph} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

3c	実験室系で見て、 $+x$ 方向へ放射された後、原子の運動量 p_{at} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

3d	実験室系で見て、 $+x$ 方向へ放射された後、原子の運動エネルギー ε_{at} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

4. 吸収後の平均放射

$-x$ 方向と $+x$ 方向への光子の自然放射は同じ確率で起こる。このことを考慮して、以下の間に答えよ。

4a	放射過程の後，放射された光子のエネルギーの平均値 ε_{ph} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

4b	放射過程の後，放射された光子の運動量の平均値 p_{ph} を書き下せ。	0.2
----	--	-----

4c	放射過程の後，原子の運動エネルギーの平均値 ε_{at} を書き下せ。	0.2
----	---	-----

4d	放射過程の後，原子の平均運動量 p_{at} を書き下せ。	0.2
----	---------------------------------	-----

5. エネルギーと運動量の移動

上で述べたような一光子の吸収・放射過程だけを仮定すると、レーザー放射と原子の間には平均的に運動量とエネルギーの移動が存在する。

5a	一光子の吸収放射過程が完了したときの原子のエネルギー変化の平均値 $\Delta\varepsilon$ を書き下せ。	0.2
----	---	-----

5b	一光子の吸収放射過程が完了したときの原子の運動量変化の平均値 Δp を書き下せ。	0.2
----	--	-----

6. レーザー光による+x方向へのエネルギーと運動量の移動

原子が+x方向に速度 v で運動しているときに，その原子に対して，振動数 ω'_L のレーザー光が+x方向に入射したとする。原子から見て，原子の内部でのエネルギー遷移とレーザー光の間に共鳴条件が成り立つとする。このとき，以下の問に答えよ。

6a	一光子の吸収放射過程が完了したときの原子のエネルギー変化の平均値 $\Delta\varepsilon$ を書き下せ。	0.3
----	---	-----

6b	一光子の吸収放射過程が完了したときの原子の運動量変化の平均値 Δp を書き下せ。	0.3
----	--	-----

第II部:散逸と光学的シロップの原理

量子論的過程には固有の不確定性がある。そのため、原子が入射光子を吸収した後、ある有限時間内に、自然に光子を放射(自然放射)する現象では、上に述べたように、不確定性関係が成り立つため、厳密に共鳴条件にしたがうわけではない。これは、レーザー光の角振動数 ω_L と ω'_L がどんな値を取っても光の吸収・放射過程が起こり得ることを示している。これらの現象は、異なる量子力学的確率で起こる。予想されるように、実現確率が最大になるのは厳密な共鳴条件が成り立つときである。

平均的に、単一現象として吸収から放射までの時間は、原子が励起エネルギー状態に止まる時間、これを励起持続時間と言い、 Γ^{-1} と表す。

実験室系で、基底状態(最もエネルギーの低い状態)にある静止している N 個の原子に角振動数 ω_L のレーザー光を照射する。照射された原子は、フォトンの吸収・放射を繰り返し、平均的に、 N_{exc} 個の原子が励起状態にあり、 $N - N_{exc}$ 個の原子が基底状態にある。量子力学的計算によると、 N_{exc} は次のように表される。

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

ここで、 ω_0 は原子の共鳴角振動数、 Ω_R は、いわゆるラビ角振動数で、 Ω_R^2 はレーザー光の強度に比例する。前述したように、たとえ共鳴角振動数 ω_0 がレーザー光線の角振動数 ω_L と異なっても、この N_{exc} はゼロではない。前の結果を別の言葉で言うと、単位時間内の吸収・放射過程の数は、 $N_{exc}\Gamma$ となる。

図2に示している物理状況を考えよう。互いに逆向きに進む、同じ角振動数 ω_L のレーザー光(ω_L 自体は任意)が同時に、 $+x$ 方向に速度 v で動いているガス状の N 個の原子団に照射されるとする。

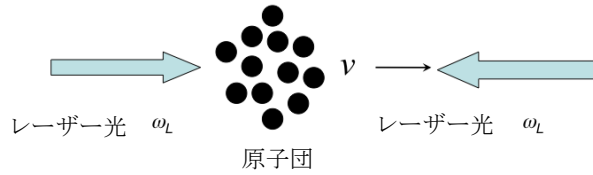


図2： x 軸上で向き合って進む同じ角振動数 ω_L のレーザー光が、 $+x$ 方向に速度 v で動いているガス状の N 個の原子団に照射されている。

7. 動いている原子にレーザー光が与える力

7a	これまでの結果を参照して、 $+x$ 方向に動いている原子団に 2 つの同じ角振動数 ω_L のレーザー光を、 x 軸に沿って両側から照射したときに原子に与える力を求めよ。ただし、 $mv \gg \hbar q$ と仮定せよ。	1.5
----	---	-----

8. 速度の小さい極限

原子の速度が十分小さいと仮定して、力を速度 v の一次の項まで展開する。

8a	問 7a で得られた力を、速度の一次の項までで表せ。	1.5
----	----------------------------	-----

この結果を用いると、レーザー光が原子を加速するか、減速するか、影響を与えないか、の条件を求めることができる。

8b	正の力（原子を加速する力）を与えるための条件を書き下せ。	0.25
----	------------------------------	------

8c	与える力がゼロとなる条件を書き下せ。	0.25
----	--------------------	------

8d	負の力（原子を減速する力）を与える条件を書き下せ。	0.25
----	---------------------------	------

8e	原子が $-v$ の速度で運動している（すなわち、 $-x$ 方向に運動している）と仮定する。原子に減速する力が作用する条件を書き下せ。	0.25
----	--	------

9. 光学的シロップ

負の力が作用する場合、その力は、摩擦による散逸的なものとなる。初期条件として $t=0$ のときに原子気体の速度 v_0 であったとする。

9a	速度が小さい極限で、レーザー光が時間 τ の間照射された後の原子の速度を求めよ。	1.5
----	---	-----

9b	原子気体は温度 T_0 で熱平衡状態にあるとする。レーザー光が時間 τ の間照射された後の原子気体の温度 T を求めよ。	0.5
----	---	-----

このモデルは、あまり低温になると成立しない。