理論第一問　　　　　　　　　　　　　　【解答】

1.角運動量保存則

1a　角運動量の定義より、

$$L_1 = I_E\omega_{E1} + I_{M1}\omega_{M1}$$

1b　角運動量の定義より、

$$L_2 = I_E\omega_2 + I_{M2}\omega_2$$

1c　与えられた近似のもとで、

$$I_E\omega_{E1} + I_{M1}\omega_{M1} = I_{M2}\omega_2 = L_1$$

2.地球と月の最終的な距離と最終的な角速度

2a　月についての円運動の力のつり合いより、

$$\frac{GM_EM_M}{D_2^2} = M_MD_2\omega_2^2$$

よって、

$$\omega_2^2D_2^3 = GM_E$$

2b　円運動している時の、月の慣性モーメントは、

$$I_{M2} = M_MD_2^2$$

なので、1c より、

$$\omega_2 = \frac{L_1}{M_MD_2^2}$$

これを、2a の式に代入して、

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_EM_M^2}$$

2c　2b より、

$$\omega_2 = \frac{L_1}{M_M} \times \frac{G^2M_E^2M_M^4}{L_1^4} = \frac{G^2M_E^2M_M^3}{L_1^3}$$

2d　地球の慣性モーメントは、半径 r_0 密度 ρ_0 の球の慣性モーメントと、半径 r_i 密度 $\rho_i - \rho_0$ の球の慣性モーメントの和であるから、

$$I_E = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\left[r_0^5\rho_0 + r_i^5(\rho_i - \rho_0)\right]$$

2e 2d より、

$$I_E = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\left[r_0^5\rho_0 + r_i^5(\rho_i - \rho_0)\right] = 8.0 \times 10^{37}\ \mathrm{kg\ m^2}$$

2f 1a より、

$$L_1 = I_E\omega_{E1} + I_{M1}\omega_{M1} = 3.4 \times 10^{34}\ \mathrm{kgm^2s^{-1}}$$

2g 2b より、

$$D_2 = 5.4 \times 10^8\ \mathrm{m}$$

また、これは$\mathrm{D_2 = 1.4D_1}$

2h 2c より、

$$\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6}\ \mathrm{s^{-1}}$$

これは、４６日で１周する角速度である。

2i 地球の最終的な自転角運動量は $I_E\omega_2 = 1.3 \times 10^{32}\ \mathrm{kg\ m^2s^{-1}}$ であり、月の最終的な公転角運動量は $I_{M2}\omega_2 = 3.4 \times 10^{34}\ \mathrm{kg\ m^2s^{-1}}$ である。よって、最終的な地球の自転角運動量は月の公転角運動量の 1/260 倍となり、この近似が正当化されることがわかる。

3. 月は１年間にどれだけ遠ざかるか？

3a 余弦定理より、月に近い方の質点から、月が受ける力の大きさは

$$F_c = \frac{GmM_M}{D_1^2 + r_0^2 - 2D_1r_0\cos\theta}$$

3b 同様に月から遠い方の質点から、月が受ける力の大きさは

$$F_f = \frac{GmM_M}{D_1^2 + r_0^2 + 2D_1r_0\cos\theta}$$

3c 地球の中心から月に近い質点に向かうベクトルと $\vec{F_c}$ のなす角をφとすると、正弦定理より、

$$\sin\varphi = D_1(D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0 \cos\theta)^{-\frac{1}{2}} \sin\theta$$

よって,トルクは

$$\tau_c = F_c r_0 \cos\varphi = F_c r_0 \sin\varphi$$
$$= \frac{GmM_M r_0 D_1 \sin\theta}{(D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0 \cos\theta)^{3/2}}$$

3d 同様に

$$\tau_f = \frac{GmM_M r_0 D_1 \sin\theta}{(D_1^2 + r_0^2 + 2D_1 r_0 \cos\theta)^{3/2}}$$

3e τ_cとτ_fについて、与えられた近似より、

$$\frac{GmM_M r_0 D_1 \sin\theta}{(D_1^2 + r_0^2 \pm 2D_1 r_0 \cos\theta)^{3/2}} \approx \frac{GmM_M r_0 \sin\theta}{D_1^2\left(1 \pm \frac{2r_0\cos\theta}{D_1}\right)^{3/2}} \approx \frac{GmM_M r_0 \sin\theta}{D_1^2}(1 \mp \frac{3r_0\cos\theta}{D_1})$$

よって、反時計回りのトルクを正として、

$$\tau = \tau_c - \tau_f = \frac{GmM_M r_0 \sin\theta}{D_1^2}\left(1 + \frac{3r_0\cos\theta}{D_1} - 1 + \frac{3r_0\cos\theta}{D_1}\right) = \frac{6GmM_M r_0^2 \sin\theta\cos\theta}{D_1^3}$$

3f

$$\tau = \frac{6GmM_M r_0^2 \sin\theta\cos\theta}{D_1^3} = 4.1 \times 10^{16}\mathrm{Nm}$$

3g

$\omega_{M1}^2 D_1^3 = GM_E$より、月の角運動量は

$$I_{M1}\omega_{M1} = M_M D_1^2 (\frac{GM_E}{D_1^3})^{\frac{1}{2}}$$

$$= M_M (GM_E D_1)^{\frac{1}{2}}$$

トルクは、角運動量の単位時間あたりの変化量なので、上の式で月の角運動量が変数D_1のみに依存すると考えると、下のように表せる。

$$\tau = \frac{M_M (GM_E)^{1/2}}{2D_1^{1/2}} \frac{\Delta D_1}{\Delta t}$$

$$\Delta D_1 = \frac{2\tau}{M_M} \left(\frac{D_1}{GM_E} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$$

$\Delta t = 3.1 \times 10^7 s = 1\, year$を代入して、
月地球間距離の１年間の増加は

$$\Delta D_1 = 0.034\text{m}$$

3h　　回転運動方程式　$I_E \frac{\Delta\omega_{E1}}{\Delta t} = -\tau$より、

$$\Delta\omega_{E1} = -\frac{\tau \Delta t}{I_E}$$

よって、$\Delta\omega_{E1} = -1.6 \times 10^{-14} \text{s}^{-1}$
P_Eを地球の自転周期とすると,

$$P_E \omega_{E1} = 2\pi$$

$$(P_E + \Delta P_E)(\omega_{E1} + \Delta\omega_{E1}) = 2\pi$$

より、

$$\frac{\Delta P_E}{P_E} + \frac{\Delta\omega_{E1}}{\omega_{E1}} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\Delta P_E}{P_E} = -\frac{\Delta\omega_{E1}}{\omega_{E1}}$$

$P_E = 1day = 8.64 \times 10^4 \text{s}$より、自転周期の１年間での伸びは

$$\Delta P_E = 1.9 \times 10^{-5} \text{s}$$

4.エネルギーはどこに行くのか?

4a　現在のエネルギーの総和(回転エネルギーと重力エネルギーの和)は

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 + \frac{1}{2} I_M \omega_{M1}^2 - \frac{GM_E M_M}{D_1}$$

2a で得た $\omega_{M1}^2 D_1^3 = GM_E$ と $I_M = M_M D_1^2$ を使うと

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{1}{2} \frac{GM_E M_M}{D_1}$$

4b Eの変化 ΔE は

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial \omega_{E1}}\Delta\omega_{E1} + \frac{\partial E}{\partial D_1}\Delta D_1 = I_E\omega_{E1}\Delta\omega_{E1} + \frac{1}{2}\frac{GM_EM_M}{D_1^2}\Delta D_1$$

3g と 3h で得た $\Delta\omega_{E1}$ と ΔD_1 を使うと

$$\Delta E = -9.0 \times 10^{19}\ \mathrm{J}$$

4c 海水の層の体積は $4\pi r_o^2 \times h$ なので全質量を M_{water} とすると

$$M_{water} = 4\pi r_o^2 \times h \times \rho_{water} = 2.6 \times 10^{17}\ \mathrm{kg}$$

4d 潮汐により、全海水が持ち上がったときの重力による位置エネルギーの変化は $M_{water} \times g \times 0.5\ \mathrm{J}$ であり、その 10%が熱として散逸する。潮汐は一年間で 365×2 回起こるので、エネルギー散逸は

$$-M_{water} \times g \times 0.5 \times 0.1 \times 365 \times 2 = -9.3 \times 10^{19}\ \mathrm{J}$$

これは、地球・月系の現在の 1 年あたりのエネルギー消失 ΔE とほぼ等しい。