物理チャレンジ 2010

第 1 問　　解答用紙　1/3　　　　**第 2 チャレンジ番号** | | | | | | |

氏名 ____________________

問 1　　6 点

Δt の間に描く弧の長さは $r\omega\Delta t$ であるから，速さは $v = \dfrac{r\omega\Delta t}{\Delta t} = r\omega$ である。

$v =$ $\boxed{r\omega}$

問 2　　8 点

速度の変化 $\Delta\vec{v}$ の大きさは $\Delta v = 2v\sin\dfrac{\omega\Delta t}{2} \quad v\omega\Delta t = r\omega^2\Delta t$ または $\dfrac{v^2}{r}\Delta t$

ただし最後の式を導くときに $\omega = \dfrac{v}{r}$ の関係を使った。

したがって加速度は $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = r\omega^2$ または $\dfrac{v^2}{r}$ である。

問 3　　8 点

物体に作用している向心力は $F = mr\omega^2$ である。バネの伸びを l とすると，物体にはバネから円の中心方向へ $F = kl$ の力が働く。両者を等しいとおいて $kl = mr\omega^2$，これを l について解いて $l = \dfrac{mr\omega^2}{k}$ を得る。

$l =$ $\boxed{\dfrac{mr\omega^2}{k}}$

問 4　　8 点

(x, y) 座標系で見ると物体は O の回りを角速度 $\omega + \omega'$ で回転している。向心加速度は $a = r(\omega + \omega')^2$ である。これを運動方程式 $ma = F$ に代入して $mr(\omega + \omega')^2 = F$ を得る。

向心加速度 $a =$ $\boxed{r(\omega + \omega')^2}$，運動方程式：$\boxed{mr(\omega + \omega')^2 = F}$

問 5　　8 点

回転系で見たときの物体の向心加速度は $a' = r\omega'^2$ である。前問の結果の式を変形して次の式を得る。$mr\omega'^2 = F - 2mr\omega'\omega - mr\omega^2$ 。したがって次の結果を得る。

$a' =$ $\boxed{r\omega'^2}$，$F_1 =$ $\boxed{-2mr\omega'\omega}$，$F_2 =$ $\boxed{-mr\omega^2}$

問 6　　8 点

回転系で見た物体の速さ v は $v = r\omega'$ である。

これを $F_1 = -2mr\omega'\omega$ に代入して $F_1 = -2mv\omega$ である。

解答合計

点

第 1 問　　解答用紙　2/3　　　**第 2 チャレンジ番号** | | | | | | |

氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 7　　　8 点

地球の半径を R，自転の角速度を ω とすると，赤道における遠心力は鉛直上向きに

$$R\omega^2 = 6.4\times10^6\,\mathrm{m}\times\Big(\frac{2\times3.14}{2.4\times10\times3.6\times10^3\,\mathrm{s}}\Big)^2 = 3.38\times10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}。$$

両極では遠心力はないから，赤道上ではこの値だけ重力加速度は小さい。

重力加速度の差違 $=$ $\boxed{3.38\times10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}}$

問 8　　　8 点

図 6(b) の展開図において AP の長さは $R/\tan\theta$, 円弧 ABCDA$'$ の長さは $2\pi R\cos\theta$ である (図 5(a) に見るように，半径 $R\cos\theta$ の円周に等しい)。したがって角度 α は

$$\varphi = \frac{2\pi R\cos\theta}{R/\tan\theta} = 2\pi\sin\theta$$

つまり地球が 1 回転するとき y 軸の方向は $2\pi\sin\theta$ 回転する。地球の角速度 ω を使うと，地球に固定した座標系の z 軸まわりの回転の角速度 ω' は $\omega' = \omega\sin\theta$ である。

問 9　　　8 点

図 8 の微小体積 $\varDelta xS$ の大気を考える。x 軸に垂直な左面に作用する力の大きさは pS, 右面に作用する力の大きさは $(p+\varDelta p)S$，差し引き $-x$ 方向に作用する力の大きさは $(p+\varDelta p)S - pS = \varDelta pS = \dfrac{\varDelta p}{\varDelta x}\varDelta xS$ である。単位体積を考えると $\varDelta xS$ は 1 なので，単位体積あたりに作用する力の大きさは $\dfrac{\varDelta p}{\varDelta x}\quad\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ である。力の方向は $-x$ 方向なので $f = -\dfrac{\varDelta p}{\varDelta x}\quad-\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ と表される。

問 10　　　8 点

単位体積の大気に作用するコリオリの力の大きさは $2\rho\omega v\sin\theta$ であるから，力の釣り合いの関係より $\left|\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right| = 2\rho\omega v\sin\theta$，これより $v = \dfrac{1}{2\rho\omega\sin\theta}\left|\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right|$ を得る。

$v =$ $\boxed{\dfrac{1}{2\rho\omega\sin\theta}\left|\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right|}$

問 11　　　8 点

$\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, $\omega = 7.27\times10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$, $\sin\theta = \sin35^\circ = 0.574$, $\left|\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right| = 1.0\times10^{-3}\,\mathrm{Pa/m}$ を $v = \dfrac{1}{2\rho\omega\sin\theta}\left|\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right|$ に代入して $v = 9.98\,\mathrm{m/s}\quad 10\,\mathrm{m/s}$ を得る。

地衡風の風速 $=$ $\boxed{10\,\mathrm{m/s}}$

解答合計　　点

第 1 問　　解答用紙　3/3　　　　**第 2 チャレンジ番号**

氏名 ____________

問 12　　8 点

高気圧の場合にはコリオリの力から気圧傾度力を引いたものが向心力に等しい。この場合には $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r < 0$ であることを考慮して，次式を得る。

$$\frac{\rho v^2}{r} = 2\rho\omega v\sin\theta - \left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right|$$

整理して

$$v^2 - 2r\omega v\sin\theta + \frac{r}{\rho}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right| = 0$$

この 2 次方程式を解いて $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r = 0$ のとき $v = 0$ となる解を選ぶと

$$v = r\omega\sin\theta - \sqrt{(r\omega\sin\theta)^2 - \frac{r}{\rho}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right|}$$

低気圧の場合には気圧傾度力からコリオリの力を引いたものが向心力に等しい。

$$\frac{\rho v^2}{r} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} - 2\rho\omega v\sin\theta$$

整理して

$$v^2 + 2r\omega v\sin\theta - \frac{r}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = 0$$

この 2 次方程式を解いて $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r = 0$ のとき $v = 0$ となる解を選ぶと

$$v = -r\omega\sin\theta + \sqrt{(r\omega\sin\theta)^2 + \frac{r}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}}$$

高気圧の場合 $v =$ $\boxed{r\omega\sin\theta - \sqrt{(r\omega\sin\theta)^2 - \frac{r}{\rho}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right|}}$

低気圧の場合 $v =$ $\boxed{-r\omega\sin\theta + \sqrt{(r\omega\sin\theta)^2 + \frac{r}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}}}$

問 13　　6 点

高気圧の場合には気圧傾度 $|\mathrm{d}p/\mathrm{d}r|$ は $\rho r\omega^2\sin^2\theta$ より大きくなりえない。また風速は $r\omega\sin\theta$ より速くなりえない。これに対して低気圧ではこのような上限はなく，いくらでも大きくなりうる。つまり高気圧が，台風並みの気圧傾度を取ることはなく，高気圧が暴風をもたらすことはない。

解答合計

点

物理チャレンジ 2010

第 2 問　　解答用紙　1/3　　　**第 2 チャレンジ番号** | | | | | | |

氏名 ________________

問 1　　7 点

(1) 式に数値を代入して $F = (9.0 \times 10^{9}\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2})\dfrac{(1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(5 \times 10^{-11}\,\mathrm{m})^2} = 9.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$ 。

クーロン力の大きさ ＝ $\boxed{9.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}}$

問 2　　7 点

万有引力の大きさ $F_{\mathrm{G}} = (6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2})\dfrac{(1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})(9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})}{(5 \times 10^{-11}\,\mathrm{m})^2}$

$= 4.06 \times 10^{-47}\,\mathrm{N}$，クーロン力の大きさとの比 $\dfrac{F_{\mathrm{G}}}{F} = 4.4 \times 10^{-40}$ 。

万有引力 ＝ $\boxed{4.06 \times 10^{-47}\,\mathrm{N}}$ ，$\dfrac{\text{万有引力}}{\text{クーロン力}} = \boxed{4.4 \times 10^{-40}}$

問 3　　8 点

クーロン力によってなされた仕事 W が粒子の運動エネルギーになるから，(4) 式を $mv^2/2$ に等しいとおいて $\dfrac{1}{2}mv^2 = kQq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r'}\right)$，これより $v = \sqrt{\dfrac{2}{m}kQq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r'}\right)}$ 。

$r' > r$ のとき根号の中が正となるためには $Qq > 0$

$r' < r$ のとき根号の中が正となるためには $Qq < 0$

$v = \boxed{\sqrt{\dfrac{2}{m}kQq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r'}\right)}}$

$r' > r$ の条件 : $\boxed{Qq > 0}$ ，$r' < r$ の条件 : $\boxed{Qq < 0}$

問 4　　7 点

クーロン力によってなされた仕事が運動エネルギーの増加に等しいことから

$\dfrac{1}{2}m{v_2}^2 - \dfrac{1}{2}m{v_1}^2 = kQq\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$，移項して $\dfrac{1}{2}m{v_1}^2 + \dfrac{kQq}{r_1} = \dfrac{1}{2}m{v_2}^2 + \dfrac{kQq}{r_2}$,

したがって位置エネルギーは $V(r) = \dfrac{kQq}{r} + V_0$ と表される。V_0 は定数である。

$r = r_0$ のとき $V(r) = 0$ となるように定数 V_0 を決めると $V(r) = kQq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)$ となる。

$V(r) = \boxed{kQq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)}$

問 5　　7 点

300 K (27°C) における銅の抵抗率 $\rho = \rho_0(1 + at) = 1.55 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}(1 + 4.3 \times 10^{-3} \times 27)$

$= 1.73 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$，針金の抵抗 $R = \dfrac{1.73 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}}{1.73 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2}} = 1.0\,\Omega$ と計算される。

したがって 1 V の電圧をかけたとき 1 A の電流が流れる。(5) 式 $I = env_{\mathrm{D}}S$ より

$$v_{\mathrm{D}} = \frac{I}{enS} = \frac{1\,\mathrm{A}}{1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \times 8.5 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}} \times 1.73 \times 10^{-7}\mathrm{m^2}} = 4.25 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$$

ここで銅の電子数密度 $n = 8.5 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$ を使った。

なお 1 A=1 C/s である。

$v_{\mathrm{D}} = \boxed{4.3 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}}$

解答合計　　　点

第 2 問　解答用紙　2/3　　**第 2 チャレンジ番号**

氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問 6　7 点

電子に作用する電場の力 eE と抵抗力 $\gamma m_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{D}}$ を等しいと置いて $eE = \gamma m_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{D}}$，したがってドリフト速度は $v_{\mathrm{D}} = \dfrac{eE}{\gamma m_{\mathrm{e}}}$ と表される。

$v_{\mathrm{D}} = \boxed{\dfrac{eE}{\gamma m_{\mathrm{e}}}}$

問 7　7 点

電流の式 $I = env_{\mathrm{D}}S$ に $v_{\mathrm{D}} = \dfrac{eE}{\gamma m_{\mathrm{e}}}$ と $E = \dfrac{V}{L}$ を代入すると

$I = \dfrac{ne^2S}{\gamma m_{\mathrm{e}}}E = \dfrac{ne^2S}{\gamma m_{\mathrm{e}}}\dfrac{V}{L}$，電気抵抗は $R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{\gamma m_{\mathrm{e}}}{ne^2}\dfrac{L}{S}$ と表される。

一方，抵抗率 ρ を使うと $R = \rho\dfrac{L}{S}$ である。以上から $\rho = \dfrac{\gamma m_{\mathrm{e}}}{ne^2}$ を得る。

$\rho = \boxed{\dfrac{\gamma m_{\mathrm{e}}}{ne^2}}$

問 8　8 点

平均運動エネルギーをもつ電子の速さを v とすると $\dfrac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2 = 4.2\,\mathrm{eV}$，$v = \sqrt{\dfrac{2\times 4.2\,\mathrm{eV}}{m_{\mathrm{e}}}}$。

$1\,\mathrm{eV} = 1.60\times 10^{-19}\,\mathrm{J}$，$m_{\mathrm{e}} = 9.11\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ を代入して $v = 1.2\times 10^6\,\mathrm{m/s}$。

ドリフト速度との比は $\dfrac{v}{v_{\mathrm{D}}} = \dfrac{1.2\times 10^6\,\mathrm{m/s}}{4.3\times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}} = 2.8\times 10^9$ である。

電子の速さ $= \boxed{1.2\times 10^6\,\mathrm{m/s}}$，$\dfrac{\text{電子の速さ}}{\text{ドリフト速度}} = \boxed{2.8\times 10^9}$

問 9　7 点

自由電子の数密度 n を使うと，断面積 S，厚み x の体積中にある自由電子の数は nxS である。右端にはこれだけの数の電子が現れるから，その電気量は $Q = -enxS$ である。

問 10　7 点

この場合，金属中の電場は $E = -\dfrac{Q}{\epsilon_0 S} = \dfrac{enx}{\epsilon_0}$ と表せる。この電場を受けて電子は運動するので，運動方程式は

$$m_{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -eE = -\frac{ne^2}{\epsilon_0}x$$

となる。

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　3/3　　**第 2 チャレンジ番号**

氏名 ____________________

問 11　7 点

運動方程式の左辺に $x = A\sin\omega_{\mathrm{P}}t + B\cos\omega_{\mathrm{P}}t$ を代入すると，左辺は

$$-m_{\mathrm{e}}{\omega_{\mathrm{P}}}^2(A\sin\omega_{\mathrm{P}}t + B\cos\omega_{\mathrm{P}}t) = -m_{\mathrm{e}}{\omega_{\mathrm{P}}}^2 x$$

となる。したがって $-m_{\mathrm{e}}{\omega_{\mathrm{P}}}^2 = -\dfrac{ne^2}{\epsilon_0}$，$\omega_{\mathrm{P}} = \sqrt{\dfrac{ne^2}{\epsilon_0 m_{\mathrm{e}}}}$ を得る。

または $\omega_{\mathrm{P}} = \sqrt{\dfrac{4\pi kne^2}{m_{\mathrm{e}}}}$ と表すこともできる。

$\omega_{\mathrm{p}} =$ $\boxed{\sqrt{\dfrac{ne^2}{\epsilon_0 m_{\mathrm{e}}}} \text{ または } \sqrt{\dfrac{4\pi kne^2}{m_{\mathrm{e}}}}}$

問 12　7 点

前問で導いたプラズマ角振動数の式にクーロン定数 $k = 9.00\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$，電子の質量 $m_{\mathrm{e}} = 9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，電気素量 $e = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ を代入して $\omega_{\mathrm{P}} = 56.4\sqrt{n\ [\mathrm{m^{-3}}]}$ を得る。銅の単位体積あたりの電子数 $n = 8.5\times10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$ を代入して $\omega_{\mathrm{P}} = 1.64\times10^{16}\,\mathrm{rad/s}$ を得る ($1.64\times10^{16}\,/\mathrm{s}$ でもよい)。

$\omega_{\mathrm{p}} =$ $\boxed{1.64\times10^{16}\,\mathrm{rad/s}}$

問 13　7 点

角振動数 ω の電磁波の波長 λ は $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ (ただし c は真空中の光速度)。
$\omega = 10^{16}\,\mathrm{rad/s}$ および $c = 3.0\times10^8\,\mathrm{m/s}$ を代入して $\lambda = 1.88\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ を得る。

$\lambda =$ $\boxed{1.88\times10^{-7}\,\mathrm{m}}$

問 14　7 点

$\omega_{\mathrm{P}} = 10^{16}\,\mathrm{rad/s}$ の角振動数を持つ電磁波の真空中での波長は約 $1.88\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ であり，可視光線の波長より短い。ということは，可視光線の角振動数は金属のプラズマ角振動数より小さく，可視光線の電場は，金属中では電子の応答により遮蔽されて内部には進入できず，表面で反射される。よって，金属は特有の光沢を持ち，光って見える。

別解：可視光の角振動数は，$\omega = 2\pi/\lambda$ の関係より，$2.42 \sim 4.96\times10^{15}\,\mathrm{rad/s}$ であるから $\omega_{\mathrm{P}} = 10^{16}\,\mathrm{rad/s}$ より小さい。したがって，可視光線の電場は，金属中では電子の応答により遮蔽されて内部には進入できず，表面で反射される。よって，金属は特有の光沢を持ち，光って見える。

解答合計　　点

物理チャレンジ 2010

第 3 問　　解答用紙　1/3　　　**第 2 チャレンジ番号**

氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問 1　8 点

波数ベクトルの x 成分は境界面の上下で等しい。水中での波数ベクトルの x 成分 $k_x = \dfrac{nf}{c_0}\sin\theta$ と空気中での波数ベクトルの x 成分 $k'_x = \dfrac{n'f}{c_0}\sin\theta'$ を等しいとおいて，$\dfrac{nf}{c_0}\sin\theta = \dfrac{n'f}{c_0}\sin\theta'$，したがって $n\sin\theta = n'\sin\theta'$ を得る。

問 2　8 点

式 $n\sin\theta = n'\sin\theta'$ に $n = 1.33$，$n' = 1.00$，および $\theta = \pi/4$ を代入して
$\sin\theta' = 1.33\sin(\pi/4) = 0.940$，これより $\theta' = 1.22\,\mathrm{rad}$ (約 $70°$) を得る。

$\theta' =$ $\boxed{1.22\,\mathrm{rad}}$

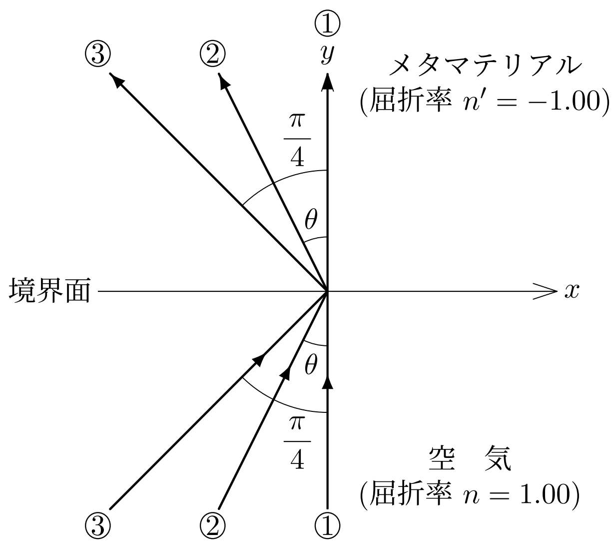
問 3　8 点

臨界角を θ_c とすると $n\sin\theta_\mathrm{c} = n'\sin(\pi/2)$ である。$n = 1.33$，$n' = 1.00$ を代入して
$\sin\theta_\mathrm{c} = 1/1.33 = 0.752$，これより $\theta_\mathrm{c} = 0.85\,\mathrm{rad}$ (約 $49°$) を得る。

臨界角 $=$ $\boxed{0.85\,\mathrm{rad}}$，全反射の条件：$\boxed{入射角\ \theta > 0.85\,\mathrm{rad}}$

問 4　8 点

スネルの法則 $n\sin\theta = n'\sin\theta'$ に $n = 1.00$，$n' = -1.00$ を代入すると $\sin\theta' = -\sin\theta$，したがって $\theta' = -\theta$ である。各光線の屈折光線の伝播方向は下図のようになる。



屈折角 ①：$\boxed{0}$

②：$\boxed{-\theta}$

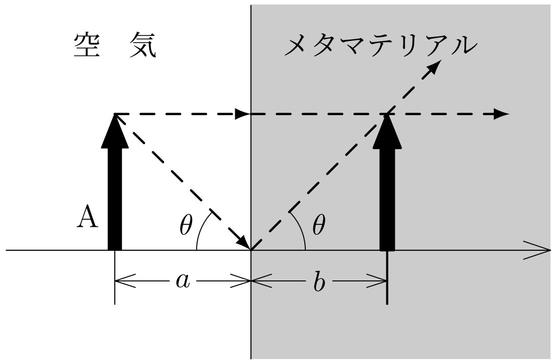
③：$\boxed{-\pi/4}$

解答合計　　点

氏名

問5　　8点

屈折率 $n = -1$ の平板に入射する光線の入射角が θ のとき，屈折角は $-\theta$ となるから，メタマテリアル中の光線は下図のようになる。像は $b = a$ の位置にできる。

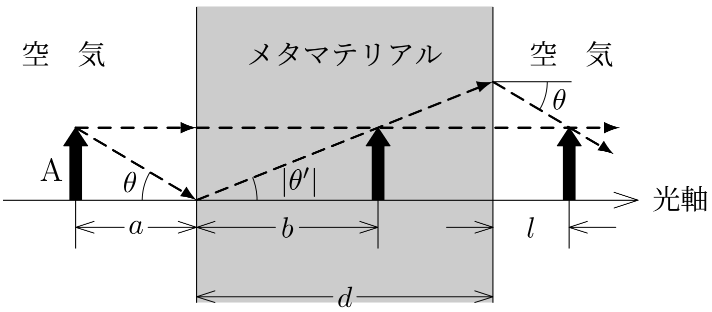


$b =$ a

問6　　10点

図の斜めの光線の入射角を θ，屈折角 θ' とする。空気の屈折率は 1.00 であるから，スネルの法則より $\sin\theta = n\sin\theta'$，近軸光線の近似を使うと $\tan\theta = n\tan\theta'$ である。物体の高さ (長さ) と像の高さ (長さ) は等しいから $b\tan|\theta'| = a\tan\theta$，メタマテリアル中の像の位置は $b = a\dfrac{\tan\theta}{\tan|\theta'|} = a|n|$ である。

次に右側の空気中の像の位置は $d\tan|\theta'| - l\tan\theta = a\tan\theta$ より $l = d\dfrac{\tan|\theta'|}{\tan\theta} - a$，したがって $l = \dfrac{d}{|n|} - a$ である。



$b =$ $a|n|$

$l =$ $\dfrac{d}{|n|} - a$

問7　　8点

間隔 $(c_0 - V\cos\theta)\varDelta t$ の間に $f_0'\varDelta t$ 個の波が入るから1波長の長さ (波長) は

$$\lambda = \frac{(c_0 - V\cos\theta)\varDelta t}{f_0'\varDelta t} = \frac{c_0 - V\cos\theta}{f_0'}$$

である。したがって振動数は

$$f = \frac{c_0}{\lambda} = \frac{c_0}{c_0 - V\cos\theta}f_0' = \frac{f_0'}{1 - \dfrac{V}{c_0}\cos\theta}$$

となる。

解答合計　　点

第 3 問　　解答用紙　3/3　　　**第 2 チャレンジ番号** | | | | | | |

氏名 ____________

問 8　　10 点

屈折率 n の媒質中では光の速さ (位相速度) は c_0/n であるので，前問の振動数の式において c_0 を c_0/n に置きかえればよい。

$\theta = 0$ のとき $f = \dfrac{f_0'}{1 - \dfrac{nV}{c_0}}$，$\theta = \pi$ のとき $f = \dfrac{f_0'}{1 + \dfrac{nV}{c_0}}$ であるので，振動数の増減は以下のようになる。

角度 θ 方向の振動数= $\boxed{\dfrac{f_0'}{1 - \dfrac{nV}{c_0}\cos\theta}}$

$\theta = 0$ の場合: $n > 0$ $\boxed{f > f_0'}$, $n < 0$ $\boxed{f < f_0'}$

$\theta = \pi$ の場合: $n > 0$ $\boxed{f < f_0'}$, $n < 0$ $\boxed{f > f_0'}$

問 9　　8 点

観測者 O は，時間 t の間に光が距離 $b = \sqrt{a^2 + (Vt)^2}$ だけ伝播すると観測するから $c_0 t = \sqrt{a^2 + (Vt)^2}$ が成り立つ。これより $t = \dfrac{a}{\sqrt{{c_0}^2 - V^2}}$ を得る。一方 $t' = \dfrac{a}{c_0}$ であるから $\dfrac{t}{t'} = \dfrac{c_0}{\sqrt{{c_0}^2 - V^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c_0}\right)^2}}$ となる。

$\dfrac{t}{t'} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c_0}\right)^2}}}$

問 10　　8 点

観測者 O が時間 t の間に観測する波の数 $f_0' t$ と観測者 P が時間 t' の間に観測する波の数 $f_0 t'$ は等しい。このことから $\dfrac{f_0'}{f_0} = \dfrac{t'}{t} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c_0}\right)^2}$ を得る。

問 11　　8 点

観測される振動数 f は，$\theta = \pi$ を代入し，相対論的効果 $\left(\dfrac{V}{c_0}\right)^2$ を無視して，$\dfrac{f}{f_0} = \dfrac{1}{1 + V/c_0}$ である。波長が 1.01 倍は振動数が 1/1.01 倍を意味するから $V/c_0 = 0.01$ である。よって $D = \dfrac{V}{H} = \dfrac{3.0 \times 10^3\,\mathrm{km/s}}{21.6\,\mathrm{km/s}} = 138$,
星雲までの距離は 138×100 万光年。

星雲までの距離 = $\boxed{\text{1 億 3800 万光年}}$

問 12　　8 点

天体からの光の地上で観測される振動数が 0 ということは，天体の速度が光速度 c_0 であることを意味する。したがって $D = \dfrac{V}{H} = \dfrac{3.0 \times 10^5\,\mathrm{km/s}}{21.6\,\mathrm{km/s}} = 1.38 \times 10^4$，星雲までの距離は 1.38×10^{10} 光年,
すなわち 138 億光年。

宇宙の果てまでの距離 = $\boxed{\text{138 億光年}}$

解答合計　　点