

解答 - 第2問. 煙突の物理

問1

a) $p(z)$ が高度 z における外気の圧力を表すとする。

$p(0)$ は高度 0 における外気の圧力であるから、空気の密度は無視するから、その値を ρ_{Air} とすると、

$$p(z) \approx p(0) - \rho_{Air}gz$$

ベルヌーイの定理を煙突全体に適応すると、

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(z)^2 + \rho_{Smoke}gz + p_{smoke}(z) = const. \quad (1)$$

$p_{smoke}(z)$ は高度 z での煙の圧力であり、 ρ_{Smoke} は密度、 $v(z)$ は煙の速度を表す。

ここで“煙突を通る気体密度の変化は無視できるほど小さい”という条件を用い、次の2ヶ所に適応する。

(i) 炉内。高度は $z = -\varepsilon$ (ε は無視可能な正の微小量)

(ii) 煙突の頂点。高度は $z = h$

この2つを連立させる。

(i)において、 $v(-\varepsilon) = 0$ かつ $-\rho_{Smoke}g\varepsilon \approx 0$ であることを考慮すると、

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(h)^2 + \rho_{Smoke}gh + p_{smoke}(h) \approx p_{smoke}(-\varepsilon) \quad (2)$$

また、煙突の頂点における煙の圧力は同じ高度における外気の圧力と等しいか、大きいかであり、今回は、煙突が作動する最小の高さを考えているので、 $p_{smoke}(h) \approx p(h)$

$p_{smoke}(-\varepsilon) > p(0)$ となると、炉内の煙が直接外部に排気されてしまう。したがって、煙突が作動するためには、 $p_{smoke}(-\varepsilon) \leq p(0)$ であることが必要である。

$z > 0$ の小さいところでは、煙が速度をもつため、 $p_{smoke} < p_{air}$ となるが、 $T_{smoke} > T_{air}$ であるから、 $\rho_{air} > \rho_{smoke}$ となり、高度が上昇するとともに大気の圧力減少の割合が煙の圧力減少の割合より大きく、 $p_{air} < p_{smoke}$ となると、煙突が機能する。 $p_{smoke}(-\varepsilon) > p(0)$ の場合、 $p_{air} < p_{smoke}$ となるまでの煙突の高さは、 $p_{smoke}(-\varepsilon) = p(0)$ の場合より高くなる。よって、最小の煙突の高さを求めるには、 $p_{smoke}(-\varepsilon) \approx p(0)$ とおくことができる。

これらを式(2)に適応すると (別解参照)、

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(h)^2 + \rho_{Smoke}gh + p(h) \approx p(0) = p(h) + \rho_{Air}gh \quad (3)$$

よって、

$$v(h) = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1\right)} \quad (4)$$

煙突が十分機能するためには、燃やした煙をすべて排出しなくてはならないから、

$$v(h) \geq \frac{B}{A} \quad (5)$$

式(4)(5)から、

$$h \geq \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{1}{\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1} \quad (6)$$

炉内の煙（気圧 $p(0)$ 、温度 T_{Smoke} ）は条件から理想気体とみなせる。温度 T 、圧力 p 、体積 V 、質量 m の理想気体の状態方程式より、気体の密度 ρ は、

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$$

と書ける。ここで、 M は気体 1 mol の質量、 R は気体定数である。これより、圧力が等しいとき、 $\rho \propto \frac{1}{T}$ となるから、

$$\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} \quad (7)$$

したがって、

$$h \geq \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}} = \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{T_{Air}}{\Delta T} \quad (8)$$

(別解)

(3)式は、次のように考えて導くことができる。

煙突から廃棄された煙は、大気中を漂い、高さ h の点に戻り、煙は大気の温度に等しくなり、その密度は大気の密度 ρ_{Air} に一致する。また速度も 0 になると考えられる。よって、ベルヌイの定理

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(h)^2 + \rho_{Smoke}gh + p(h) = \rho_{Air}gh + p(h)$$

が成り立つ。これは(3)式に他ならない。

b) 寒い地域で働くように設計された煙突の高さ $h(-30)$ が 100m のとき、暖かい地域の煙突の高さ $h(30)$ は、

$$\frac{h(30)}{h(-30)} = \frac{\frac{T(30)}{T_{Smoke} - T(30)}}{\frac{T(-30)}{T_{Smoke} - T(-30)}} \quad (9)$$

よって、

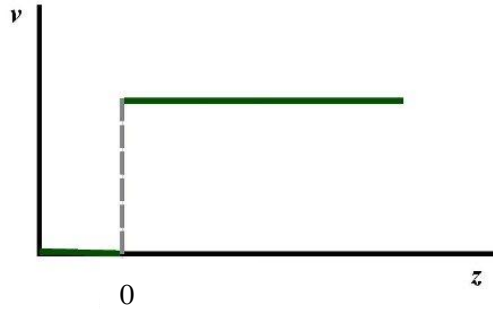
$$h(30) = 145\text{m}$$

c) 速度は一定である。

$$v = \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \left(\frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}} \quad (10)$$

このことは、常に $Av = \text{const.}$ (ρ_{Smoke} 一定) が成立することからわかる。

Av は、煙が炉から煙突に入るときほぼ 0 であり、0 から一定の値に突然変化する。実際、最小の高さで稼働しているので、この一定値は B に等しい。つまり、 $v = \frac{B}{A}$ である。



- d) 高さ z での煙の圧力は、 $(\rho_{Air} - \rho_{Smoke})gh = \frac{1}{2} \rho_{Smoke} v^2$ であるから、(2)式で $p(-\varepsilon) \approx p(0)$ として、

$$p_{Smoke}(z) = p(0) - (\rho_{Air} - \rho_{Smoke})gh - \rho_{Smoke}gz \quad (11)$$

煙の圧力は炉から煙突に入り、速度を持った時に急に变化する。

問 2

- a) Δt の間に放出された温かい空気の運動エネルギーは、

$$E_{kin} = \frac{1}{2} (Av\Delta t \rho_{Hot}) v^2 = Av\Delta t \rho_{Hot} gh \frac{\Delta T}{T_{Air}} \quad (12)$$

Hot のインデックスが付いている変数は太陽によって温められた温かい空気に関するものである。一定時間内に煙突から排出される煙の量を $w = Av\rho_{Hot}$ とすると、上の運動エネルギーに相当する仕事率は、

$$P_{kin} = wgh \frac{\Delta T}{T_{Air}} \quad (13)$$

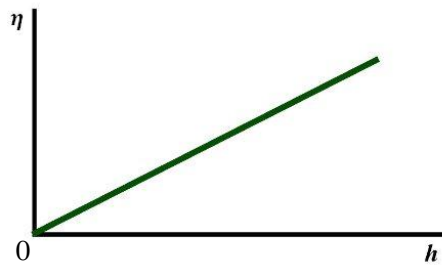
これが、煙の流れの運動エネルギーから得られる最大の仕事率である。太陽エネルギーは空気を暖めるのに使われ、

$$P_{Sun} = GS = wc\Delta T \quad (14)$$

したがって効率、

$$\eta = \frac{P_{kin}}{P_{Sun}} = \frac{gh}{cT_{Air}} \quad (15)$$

- b) 変化は明らかに直線である。



問 3

a) 実験煙突の発電効率は,

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}} = 0.0064 = 0.64\% \quad (16)$$

b) 電力は, 集熱部の直径を D として,

$$P = GS\eta = G(D/2)^2\pi\eta = 45\text{kW} \quad (17)$$

c) 1日8時間晴れているとして, 実験煙突で1日に生み出されているエネルギーは,

$$45 \times 8 = 360\text{kWh}$$

問 4

a) 単位時間あたり煙突内に流れ込む空気の質量は,

$$w = Av\rho_{Hot} = A \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}} \rho_{Hot} \quad (18)$$

また,

$$w = \frac{GS}{c\Delta T} \quad (19)$$

これらより,

$$\Delta T = \left(\frac{G^2 S^2 T_{Air}}{A^2 c^2 \rho_{Hot}^2 2gh} \right)^{1/3} \approx 9.1\text{K} \quad (20)$$

b) 単位時間あたり流れ込む空気の質量の数値は,

$$w = \frac{GS}{c\Delta T} = 762\text{kg/s} \quad (21)$$