物理チャレンジ 2012

実験問題

2012 年 8 月 7 日（火）

諸注意・実験器具確認	8：30	～	8：40
実験問題にチャレンジ	8：40	～	13：20
実験器具後片付け	13：20	～	13：30

実験問題にチャレンジを始める前に下記の**＜注意事項＞**をよく読むこと。
チャレンジ開始後，まず訂正個所を問題文に書き写すこと。つぎに次ページ以降に記載の**＜はじめに＞**，**＜実験で使用する部品＞**を読み，すべての部品を確認した後，**課題 1** から**課題 4** に取り組むこと。

＜注意事項＞

１．机の上には，問題冊子，訂正一覧，解答用紙ならびにメモ用紙を重ねたもの，および実験器具箱と電卓が置いてある。開始の合図があるまでは，これらに手を付けないこと。
２．監督者の指示があったら解答用紙の全てのページの所定の箇所にチャレンジ番号と氏名を記入せよ。
３．実験結果や計算結果，式の導出など，採点して欲しい事項は解答用紙の所定の場所に記入すること。メモ用紙は回収・採点しないので，解答はすべて解答用紙に記入すること。
４．持参した筆記用具と，与えられた実験装置，部品，定規，電卓以外は使用してはならない。ただし，電卓は自分の物を使用してもよい。
５．実験中に部品を壊した場合には，1 回だけ新しいものと交換できるので，手をあげて監督者に申し出ること。2 回以上同じ部品を壊した場合には，さらに新品と交換できるが，減点となる。ただし，数には限りがあるので，交換できない場合もある。課題 2 では CD を使うが，割れやすいので注意して実験すること。心配な場合は，床の上で実験してもよい。
６．チャレンジ開始後から 12：00 まではチャレンジを終了することはできない。
７．チャレンジ時間中に気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき，あるいは質問があるとき，チャレンジを終了するときには，手をあげて監督者に知らせること。
８．終了の合図があれば，解答用紙を机の右側に置くこと。その後，監督者の指示にしたがって実験器具をもと通りに箱に入れること。問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってよい。

＜はじめに＞

皆さんがこれまで中学，高校を通じて学んできた力学では，ニュートンに始まるいわゆる質点（位置と質量は与えられているが，体積ゼロの点）の運動が主である。これに対し，我々の身の回りにある物はすべて体積を持っている。しかし，物体を小物体に分割し，此の小物体を質点と考えることによりこれまでに習った質点の力学が利用できる。本年の課題では，この体積を持った物体を取り扱う。

物体を n 個の質点（小物体）の集合と考え，i 番目の質点の質量を m_i，位置ベクトルを $\vec{r_i}$，n 個の質点の全質量を M とする。この位置ベクトル $\vec{r_i}$ は物体に固定したある点（物体上にあるとは限らない）の位置ベクトル $\vec{R}$ とその点から見た相対位置ベクトル $\vec{r_i'}$ との和 $\vec{r_i} = \vec{R} + \vec{r_i'}$ で表すことができる。

さらに，$\vec{R}$ を

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}$$

のように選ぶと

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{R} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i'} = M\vec{R} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i'}$$

したがって，$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i'} = 0$ となる。このような点を重心（center of gravity あるいは質量中心 center of mass）と言い，重心を示す位置ベクトルを以下では $\vec{r_{\mathrm{G}}}$ と表す。すなわち，小物体の位置ベクトルは，以下のように重心の位置ベクトルと，重心に対する小物体の相対位置ベクトルの和で表すことができる。

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i, \qquad \vec{r_{\mathrm{G}}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}, \qquad \vec{r_i} = \vec{r_{\mathrm{G}}} + \vec{r_i'}, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i'} = 0$$

i 番目の質点に働く力を $\vec{F_i}$ とすると，ニュートンの第２法則により，

$$m_i \vec{a_i} = \vec{F_i},$$

ここで $\vec{a_i} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r_i}}{\mathrm{d}t^2}$ は小物体の加速度であり，（小物体の質量）×（小物体の加速度）＝（小物体に働く力）であることを示している。小物体に働く力 $\vec{F_i}$ は外力 $\vec{F_i'}$ と自身を除く他のすべての小物体 j からの力（内力）$\vec{F_{ij}}$ の合力である。つまり，

$$\vec{F_i} = \vec{F_i'} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F_{ij}} \qquad (j \neq i \text{ となる } j \text{ について和をとる})$$

よって，i 番目の質点の運動方程式は，

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r_i}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F_i'} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F_{ij}}$$

と書ける。ここで，両辺を i について和をとる。左辺では小物体の位置を，$\vec{r_{\mathrm{G}}}$ と $\vec{r_i'}$ で表

し，$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}' = 0$ であることを利用すると，

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r_i}}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r_\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r_i}'}{\mathrm{d}t^2} = M \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r_\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}'\right) = M \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r_\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t^2}$$

右辺では，ニュートンの第３法則（作用−反作用の法則）から，$\vec{F_{ij}} = -\vec{F_{ji}}$ であるので，$\vec{F_{ij}}$ の i，j についての 2 重和は

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F_{ij}} = 0$$

となることを利用すると，物体にかかる力の総和は

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F_i}' + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F_{ij}}\right) = \vec{F}, \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}' \text{ は物体にかかる外力の総和}$$

となるので，次のような**重心運動の方程式**が得られる。

$$M \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r_\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}$$

すなわち物体の運動は重心にある質量 M の質点に全外力の合力が働いた場合として考えればよいことが分かる。変形が無視できる物体（**剛体**という）では，重心に対する小物体の相対位置ベクトル $\vec{r_i}'$ の大きさは変化しないので，重心から見た運動は，物体の回転として記述される。

したがって，<u>**剛体の運動は重心の運動と重心を通る軸の周りの回転で表される**</u>。

次に速度と運動エネルギーについて考えよう。小物体の速度ベクトルを $\vec{v_i} = \frac{\mathrm{d}\vec{r_i}}{\mathrm{d}t}$ と表し，重心の速度ベクトルを $\vec{v_\mathrm{G}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r_\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t}$ と表すと，次の関係式が成り立つ。

$$\vec{r_\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i} = (x_\mathrm{G}, y_\mathrm{G}),\quad \vec{v_\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i} = (v_{\mathrm{G}x}, v_{\mathrm{G}y})$$

i 番目の質点（小物体）の重心に対する相対速度ベクトルを $\vec{v_i}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r_i}'}{\mathrm{d}t}$ と表すと，

$$\vec{v_i}' = \vec{v_i} - \vec{v_\mathrm{G}},\quad \vec{v_i} = \vec{v_\mathrm{G}} + \vec{v_i}', \text{ 成分では } v_{ix} = v_{\mathrm{G}x} + v_{ix}',\ v_{iy} = v_{\mathrm{G}y} + v_{iy}'$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i}' = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{v_i} - \vec{v_\mathrm{G}}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i} - M\vec{v_\mathrm{G}} = 0, \text{ 成分では } \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}' = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy}' = 0$$

全体の運動エネルギーは各質点（小物体）の運動エネルギーの総和として定義される。

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i [(v_{\mathrm{G}x} + v_{ix}')^2 + (v_{\mathrm{G}y} + v_{iy}')^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i [(v_{\mathrm{G}x}^2 + v_{\mathrm{G}y}^2) + 2(v_{\mathrm{G}x} v_{ix}' + v_{\mathrm{G}y} v_{iy}') + (v_{ix}'^2 + v_{iy}'^2)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_\mathrm{G}^2 + v_{\mathrm{G}x} \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}' + v_{\mathrm{G}y} \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy}' + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_\mathrm{G}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$= T_\mathrm{G} + T'$

このように，全体の運動エネルギーT は重心運動の運動エネルギーT_G と重心から見た運動の運動エネルギーT' の和となる。剛体（変形しない物体）の場合は重心からの距離が変化しないので，重心運動の運動エネルギーT_G と回転の運動エネルギーT_R の和となる。

質点の運動では質量，位置，速度，運動量，加速度，力が状態を記述する量であった。では，回転ではどの様な量で状態を記述するのだろうか。回転なので回転中心のまわりにどのくらい回転したかを表す**角度$\boldsymbol{\theta}$**, 次いでどのくらいの速度で回転しているかを表す**角速度$\boldsymbol{\omega}$**, さらには角速度の変化率を表す**角加速度** $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ が剛体の回転を記述し，それぞれ質点の場合の位置，速度，加速度に対応する。角速度は回転軸の方向と合わせてベクトルとして記述される。さらに，質点の場合の運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$ に対して，回転体では角運動量（通常ベクトル$\vec{L}$ で表される）が用いられる。また，質点の運動状態を変える力に対応して，回転状態を変えるものとして力のモーメント（トルク，通常ベクトル$\vec{N}$ で表される）があり，これらの量の間にも質点の場合に類似した関係がある。

以下の課題では円板状の回転体と軸に対して対称な腕を持った回転体について回転がどの様な法則に支配されているかを扱う。回転に関係するこれらの量を測定し，関係を調べることにより回転に対する感覚を身につけてほしい。

＜実験で使用する部品＞

箱を開けて箱の中の部品を机の上に並べ，以下の部品があることを確認する。
（６ページの写真を参照のこと。以下のリストと同じ番号が付けてある）

（1）	回転子とその支持台	1 台
（2）	歳差運動回転台	1 台
（3）	斜面台（木製，60 ㎝×10 ㎝×1.2 ㎝）	1 台
（4）	斜面台支え（10 ㎝×10 ㎝×3 ㎝）	1 個
（5）	斜面台支え（6 ㎝×10 ㎝×3 ㎝）	1 個
（6）	金属製定規（40 ㎝）	1 本
（8）	ビニール袋１（測定器，検出器）	
（9）	ビニール袋２（回転体及び部品）	
（１０）	ビニール袋３（工具）	
（１１）	ビニール袋４（その他小物）	

ビニール袋 1 に入っているもの（測定器，検出器）

（１－１）	ストップウォッチ	1 個
（１－２）	ポケット・デジタルマルチメーター	1 個
（１－３）	ビースピ（速度計測器）	1 個
（１－４）	回転検出回路板（4 色のみのむしクリップ付き）	1 個
（１－５）	単 3 電池ボックス（ラグ板付き）	2 個
（１－６）	単 3 乾電池	4 本
（１－７）	モーター用電源リード（赤黒のペア線）	1 本

ビニール袋２に入っているもの回転体及び部品）

（２－１）	CD（24 箇所に直径 4 mm の穴 24 個あり）	2 枚
（２－２）	CD（黒い模様が 2 か所塗られている）	1 枚
（２－３）	木製丸棒（直径 15mm）	1 本
（２－４）	金属製スペーサー（直径 8mm，長さ 50mm）	8 本
（２－５）	長さ 8mm の M4（4mm φ）ネジ	16 個

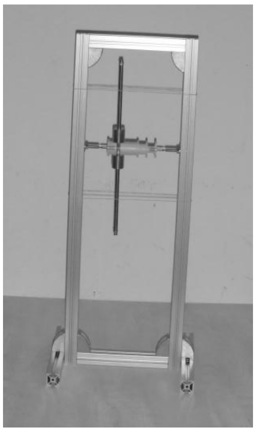
ビニール袋３に入っているもの（工具）

（３－１）	ドライバー6 本セット	１箱
（３－２）	六角棒レンチ（1.5㎜）	１本
（３－３）	六角棒レンチ（2㎜）	１本

ビニール袋４に入っているもの（小物）

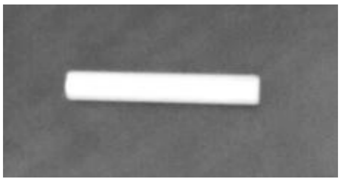
（４－１）	金属製おもり（50g）	１個
（４－２）	金属製おもり（25g）	１個
（４－３）	細い木の棒（長さ約 15 ㎝）	１本
（４－４）	木ねじ小（2.7mm×13mm）	１本
（４－５）	木綿細糸	２巻

その他に、両面テープ，ドラフティングテープ，電源細線（課題３で使用）が共用台上に準備してある。



（1）

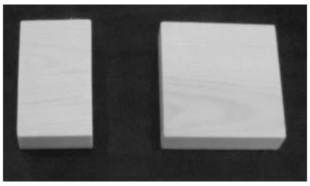
（2－1）



（2－3）

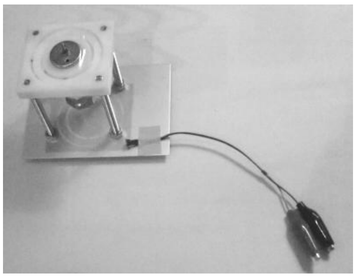
（2－4）

（3）

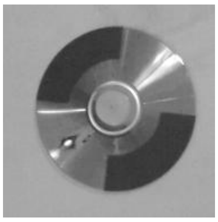


（5）　　　（4）

（4－3，4，5）

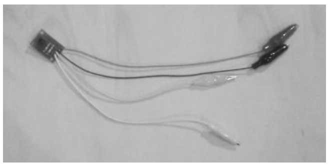


（2）



（2－2）

（1－2）



（1－4）

（1－6）

（1－5）

（6）

（3－1，2，3）

＜課題１＞剛体の回転運動

使用する部品

この課題 1 で使用するおもな部品，工具は以下の通りである。かっこ内の数字は 4〜6 ページの部品番号に対応している（課題２～４でも同様）。

（１）　回転子とその支持台
（１－１）　ストップウォッチ
（４－１）（４－２）　金属製おもり（50g，25g）
（４－５）　木綿細糸
（３－１）　ドライバー６本セット
（３－３）　六角棒レンチ（2mm）

(1)の回転子の軸の部分には，図 1-1 のように円筒状の糸を巻き付ける部分（以降「糸巻」とよぶ）がある。糸巻には半径 5mm, 8mm, 10 mm の 3 種類ある。

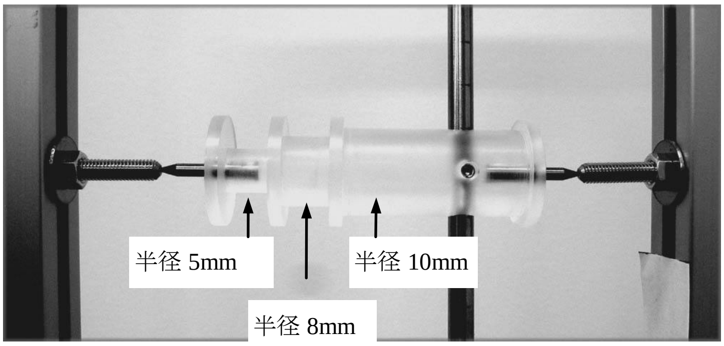


図 1-1　糸巻部分

回転子の棒の部分は図 1-2 のように，1.0cm おきに目盛りがついている。小物体 B，C の位置は止めねじを六角棒レンチ(2mm)で回して調節する。図 1-2 では，小物体 B，C の中心（重心）の位置は，回転軸から 11.0cm の場所である。箱から取り出したとき，小物体 B，C はこの位置に固定してある。

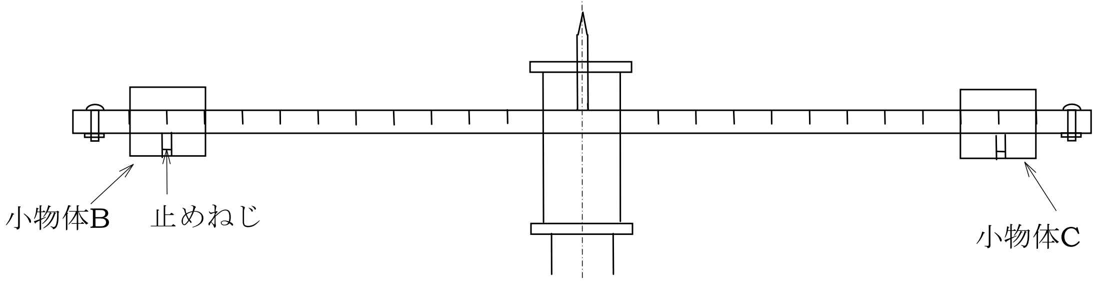


図 1-2　棒の目盛りと棒にとりつけられた小物体 B，C

実験の準備

1. 回転子とその支持台（部品（1））を取り出し，回転子を止めている輪ゴムを外す。回転子を回転させ，なめらかに回転することを確かめなさい。もしなめらかに回転しないときは，監督者を呼びなさい。
2. 2 つの小物体 B，C の位置が，回転軸から 11.0cm の位置にあることを確かめなさい。
3. 回転子の棒を水平にし，手を離しても棒がほぼ水平のままになっていることを確かめなさい。もし大きく傾いた場合は，小物体 B，C の位置を微調整してほぼ水平になるようにしなさい（図 1-3 参照）。
4. 細い方の糸巻（半径 5mm）が手前に来るように支持台を置く。目盛りの書かれた紙が支柱に貼り付けれれている。
5. 木綿細糸を 1 本取りだし，一方の端をおもりがつり下げられるように輪を作りなさい（図 1-4 参照）。
6. 細い方の糸巻（半径 5mm）が右側に来る位置に支持台を置き，糸の他方の端を半径 10mm の糸巻きの，棒寄りの部分にセロハンテープで貼り付けなさい（図 1-5 参照）。

図 1-3 回転子のバランス調整。おもりの高さ測定用の目盛りが貼り付けてある。

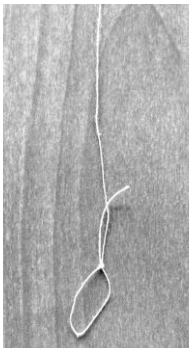


図 1-4 糸に輪を作る

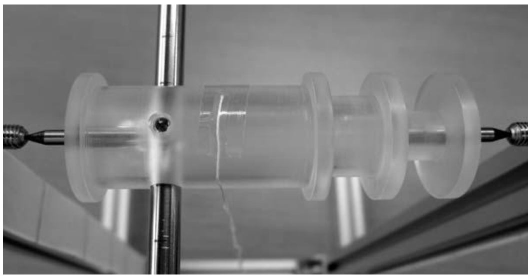


図 1-5 糸を糸巻にセロハンテープで付ける

＜解説＞

実験装置を，右図のようなモデルとみなし，その力学的振舞いを予測する。

水平な中心軸のまわりに滑らかに回転する質量の無視できる半径 b の糸巻がある。質量を無視できる棒に，等しい質量 m の２個の小物体 B，C を棒の中心から両側に等しい距離 r の位置に取り付けたものが，糸巻の軸に中心を合わせて，糸巻に固定されている。以下では，この全体を回転子と呼ぶ。ラジアン（rad）を単位とする弧度法で表した, 回転子の反時計回りの回転角を θ とし, 回転角の変化率, すなわち, 角速度を $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ と置く。

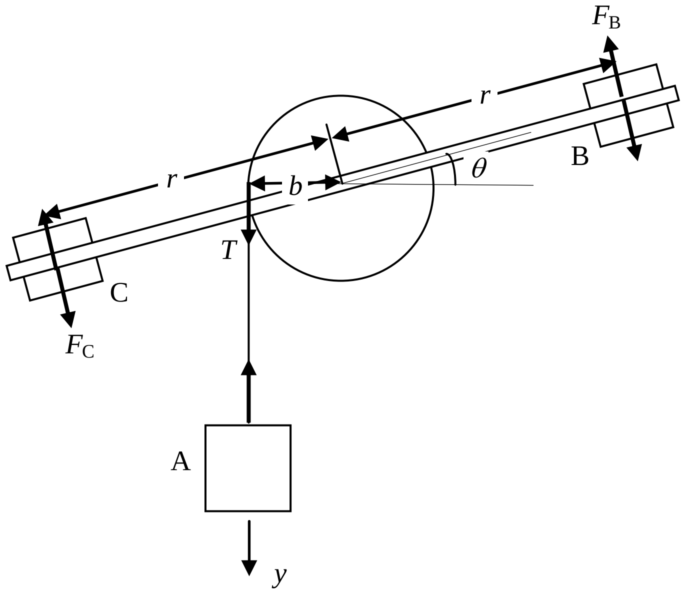


図 1-6

糸巻に伸び縮みしない糸を巻きつけ，質量 M の物体 A をつり下げる。鉛直下向きに y 軸を取り，A の位置を y，速度を $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，加速度を $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ と置く。

糸はたるまないものとすると，次の関係式が成り立つ。

$$y = b\theta \;,\quad v = b\omega \;,\quad a = b\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ は角速度の変化率（角加速度）である。B，C の反時計回りの速度および，反時計回りの加速度は，それぞれ，

$$v_\mathrm{B} = v_\mathrm{C} = r\omega \;,\quad a_\mathrm{B} = a_\mathrm{C} = r\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{b}\,a$$

となる。

糸の張力を T，小物体 B，C が棒を反時計回りに押す力を F_B，F_C とする。

A の運動方程式は,

$Ma = Mg - T$（g は重力加速度，<u>本実験問題では $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ としなさい</u>）　(1-1)

B，C の棒に垂直な方向の運動方程式は，それぞれ，

$$ma_\mathrm{B} = -\,mg\cos\theta - F_\mathrm{B} \qquad (1\text{-}2)$$

$$ma_\mathrm{C} = mg\cos\theta - F_\mathrm{C} \qquad (1\text{-}3)$$

となる。

棒と糸巻の質量は無視できるので，軸の周りの力のモーメントのつり合いから，

$$rF_\mathrm{B} + rF_\mathrm{C} + bT = 0$$

が成り立つ。(1-2) × r +(1-3) × r + (1-1) × b をつくると，

$$mr(a_B + a_C) + Mba = -rF_B - rF_C + Mbg - bT$$

$$2mr\frac{r}{b}a + Mba = Mbg \quad よって，\quad a = \frac{Mb^2}{2mr^2 + Mb^2}g$$

となり，物体 A は等加速度運動する。実際の回転子の場合は，この式を一般化して，

$$a = \frac{Mb^2}{I + Mb^2}g \qquad (1\text{-}4)$$

と表し, I を回転子の**慣性モーメント**と呼ぶ。棒と糸巻の質量を無視した, 上のモデルでは, $I = I_{BC} = 2mr^2$ である。

課題１－１

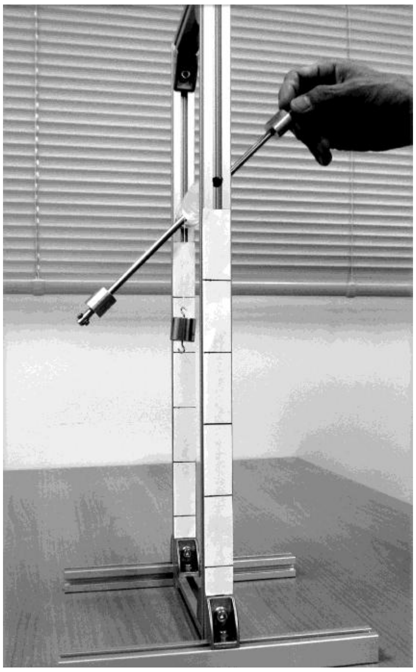


図 1-7　物体 A をつり下げる

（１）糸に物体 A（質量 25.0g の金属製おもり）を付け，回転子を回転させながら糸を半径 8 mm（b = 8.0 mm）の糸巻に巻き付ける。

（２）静止状態から，物体 A が距離 h = 5.0 cm，10.0 cm，15.0 cm，20.0 cm，25.0 cm 落下するまでの時間をストップウォッチで測定し，解答用紙の表 1-1 に記録しなさい（図 1-7 参照）。測定はそれぞれの高さで 3 回行い，その平均をとりなさい。ストップウォッチで測定するときには, リセットボタンを押して表示がゼロ秒になっていることを毎回確認しなさい。

（３）横軸に物体 A の落下距離，縦軸に落下時間の平均値の 2 乗をとり，解答用紙 1-1-(3)に測定データをプロットしなさい。

（４）このグラフから，物体 A の落下が等加速度運動であるといえるか, その根拠とともに述べなさい。また加速度 a の値を誤差とともに記入しなさい。なお，誤差の求め方を上欄に書きなさい。

課題１－２

（１）物体 A が静止状態から 25.0 cm 落下するまでの時間を，物体 A（金属製おもり）の質量 M = 25.0 g，50.0 g，糸巻の半径 b = 5.0 mm，10.0 mm の組み合わせ 4 種類について測定して解答用紙の表 1-2 に記入しなさい。なお，b = 10.0 mm の場合，落下するおもりが回転する棒にぶつからないように，なるべく棒から離れた位置で糸を巻きなさい。

（２）それぞれの測定値に対して加速度 a の値，式 (1-4) の回転子の慣性モーメント I の値

を算出し，解答用紙の表 1-2 を完成させなさい。

（３）I の値が M，b の値に依存しないかどうかを検討しなさい。

課題１－３

課題 1-2 で求めた I の値の平均値と，$I_{BC} = 2mr^2$ の値を比較しなさい。ただし，B，C の質量は $m = 37.6$ g である。

＜解説＞

次に，実際の回転子の慣性モーメント I とモデル回転子の慣性モーメント $I_{BC} = 2mr^2$ の関係を考えてみよう。

回転子自身は（精密に調整されていれば）任意の角度でつり合いの状態になる。これを回転させようとする力は糸の張力であり，そのはたらき（効果）は張力の大きさ T だけではなく，糸巻の半径 b にも依存する。剛体がつり合うためには，力だけでなく，**力のモーメント**もつり合うことが必要であったのと同様である。力のモーメントは，力の大きさと，軸から力の作用線までの距離の積で定義されるので，回転子に働く力のモーメントは，$N = bT$ となる。力のモーメントは，**トルク**とも呼ばれる。

ここで，(1-2) × r +(1-3) × r をつくると，

$$mr(a_B + a_C) = -rF_B - rF_C = bT = N$$

$$2mr^2 \frac{d\omega}{dt} = N \quad すなわち，I_{BC} \frac{d\omega}{dt} = N$$

が得られる。この式と運動方程式を対応させてみると，角速度（速度）の変化率はトルク（力）の大きさに比例し，比例係数である慣性モーメント（質量）は角速度の変化のしにくさ，すなわち，慣性の大きさを表していることが分かる。また，運動方程式では，慣性の大きさは質量 m で表されるが，回転運動の場合は，質量 m と回転軸からの距離 r の 2 乗の積 mr^2 で表されることが分かる。

実際の回転子では，B，C の質量の他に，棒や糸巻も質量を持っている。今，棒と糸巻を軸からの距離 r_1，r_2，r_3，･･･の位置にある質量 m_1，m_2，m_3，･･･の小物体の集まりとみなすとき，$I_{BC} = 2mr^2$ と同様な相加的な関係が成り立つとすれば，棒と糸巻の慣性モーメントは，

$$I_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots \tag{1-5}$$

となると考えられるから，回転子全体の慣性モーメントは，

$$I = I_0 + I_{BC} = I_0 + 2mr^2 \tag{1-6}$$

と表されるであろう。

まとめると，一般に慣性モーメント I の剛体にトルク N が働くとき，その角速度 ω の変化率は

$$I \frac{d\omega}{dt} = N \tag{1-7}$$

で与えられる。

課題１－４

（１）M = 25.0 g，b = 10.0 mm と固定し，B，C の位置（軸からの距離）r の値を r = 11.0 cm, 9.0 cm，7.0 cm，5.0 cm，3.0 cm の 5 点をとり，それぞれの場合に，物体 A が静止状態から一定距離 h = 25.0 cm を落下するまでの時間を測定し，加速度 a，回転子の慣性モーメント I の値を算出することで，解答用紙の表１－４を完成させなさい。ただし，r = 11.0cm については課題 1-2 の測定結果をそのまま流用してよい。

（２）縦軸に I，横軸に $I_{BC} = 2mr^2$ をとり，測定データを解答用紙 1-4-(2) にプロットしなさい。I の値と I_{BC} の値の関係が，式 (1-6) を満たしているかどうか検討しなさい。なお，B，C の質量はともに m = 37.6 g である。

（３）式 (1-6) が成り立つと仮定して，棒＋糸巻の部分の慣性モーメント I_0 の予測値を算出しなさい。

課題１－５

棒の両端にある小さなねじ（小物体 B，C が飛び出さないためのストッパー）を外し，小物体 B, C を取り外しなさい。その後ストッパーの小さなねじをもとのように固定しなさい。これで棒（両端のストッパーのねじを含む）と糸巻のみの状態となる。物体 A（金属製おもり；質量 M = 25.0 g）を用い，糸巻の半径 b = 5.0 mm，8.0 mm の２種類の値について，一定距離 h = 25.0 cm を落下するのに要する時間を測定し，加速度 a，棒＋糸巻の部分の慣性モーメントの実測値 $I_0^{(ex)}$ を算出し，課題 1-4 で求めた I_0 の予測値と比較しなさい。

＜解説＞

●一様な棒の慣性モーメント

長さ l，質量 M の一様な棒の重心を通り，棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを式 (1-5) の考え方で計算してみよう。

棒を長さ方向に $2n+1$ 等分すると，中心から両側に距離 $r_i = \dfrac{il}{2n}$ の位置には質量 $\dfrac{M}{2n+1}$ の小片があるので，式(1-5)から，

$$I = 2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \cdots + m_nr_n^2) = 2\,\frac{M}{2n+1}\,\frac{l^2}{(2n)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{Ml^2}{2n^2(2n+1)}\,\frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1) = \frac{Ml^2}{12}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

となり，$n \to \infty$の極限をとって，棒の慣性モーメントは次式で与えられる。

$$I = \frac{Ml^2}{12} \tag{1-8}$$

課題１－６

棒の質量と長さは，M_{bar} = 34.4 g，l_{bar}= 27.0 cm である。この棒の慣性モーメント I_{bar} を計算し，課題 1-4，1-5 で求めた I_0，$I_0^{(\mathrm{ex})}$ と比較せよ。

＜課題２＞剛体の重心運動と回転運動の運動エネルギー

この課題では，斜面を転がり落ちる物体の運動を考える。

使用する部品

この課題で使用するおもな部品は以下の通りである。

（３）	斜面台（木製，60 ㎝×10 ㎝×1.2 ㎝）	1
（４）	斜面台支え（木製，10 ㎝×10 ㎝×3 ㎝）	1
（５）	斜面台支え（木製，6 ㎝×10 ㎝×3 ㎝）	1
（６）	金属製定規（40 ㎝）	1
（１－３）	ビースピ（速度計測器）	1
（２－１）	CD（24 箇所に直径 4 mm の穴 24 個あり）	2
（２－３）	木製丸棒（直径 15mm）	1
（２－４）	金属製スペーサー（直径 8mm，長さ 50mm）	8
（２－５）	長さ 8mm の M4（4mm ϕ）ネジ	１６
（４－３）	細い木の棒	1
（４－４）	木ねじ小（2.7mm×13mm）	1
（４－５）	木綿細糸	1
（３－１）	ドライバー6 本セット	1

実験の準備

１．回転体を組み立てる。

回転体を組み立てるのに必要な「使用する部品」は以下の通り

（２－１）CD（24 箇所に直径 4mm の穴 24 個あり）　2 枚

半径 b = 60 mm，質量 m_b = 15.0 g

（２－３）木製丸棒（直径 15mm）　1 本

半径 b' = 7.5 mm，質量 m_b' = 8.4 g

（２－４）金属製スペーサー（直径 8mm，長さ 50mm）　8 本

（２－５）長さ 8mm の M4（4mm ϕ）ネジ 16 本

スペーサー 8 本とネジ 16 本の質量の和は m' = 150.4 g

適当なサイズのドライバーを使い，図 2-1 のような回転体を組み立てる。木製丸棒は

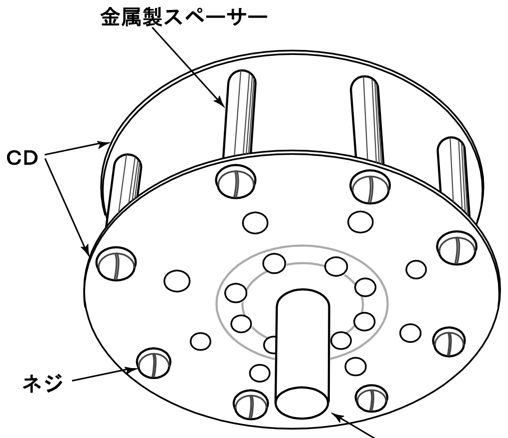


図 2-1

回転体Ｃ（半径 r = 53 mm）

ビースピ（速度計測器）（「使用する部品」（１－３））を作動させる役割を担うので，ビースピ側になる側を長く突き出させる。

スペーサーが，半径 r = 25 mm，40 mm，53 mm の円周上に配置されている場合を，それぞれ，回転体 A，B，C と呼ぶ。回転体 A，B，C の質量は等しく，$M = 2m_b + m_b' + m' =$ 188.8g となる。

初めに，回転体を C として組み立てなさい。これを机の上に置いて机の上面が水平であることを確認しなさい。傾いている場合は机の脚のネジで補正するとよい。

２．斜面台（「使用する部品」（３））側面に固定されている木片の上にビースピを両面テープで取り付けなさい。

ビースピは, その凹部にある２組の赤外線センサーを物体が通過する際に順次, 遮ることを利用して，この区間の平均の速度を測定するが，これをもって, ビースピ中央を通過するときの物体の瞬間の速度とします。凹部を斜面側，速度表示部を外側に向けて図 2-2 のように固定すること。

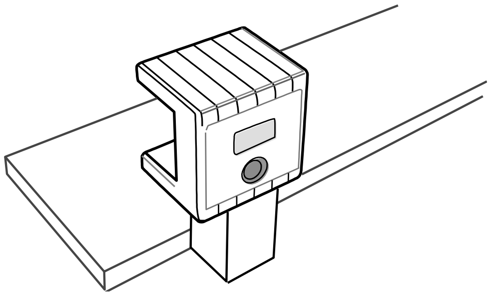


図 2-2

３．斜面台の表側に位置計測用の目印となる直線を鉛筆で書きなさい。

回転体の木製丸棒軸の中心が，ビースピ（速度計測器）のセンサー部分の中心と一致する位置をゴールとするので，ビースピ中央の真下を通る直線を，金属製定規（「使用する部品」（６））を使って鉛筆で引きなさい。さらに走行距離が l = 20 cm，30 cm，40 cm, 50 cm となるようなスタート位置に回転体を置くための目印となる直線を板の表面に鉛筆で引きなさい（図 2-3）。

また斜面台中央よりやや手前側に，回転体を構成する 2 枚のＣＤのうち，ビースピにあるＣＤが通る直線を引く。この直線は，回転体の木製丸棒軸がちょうどビースピのセンサー部を通過するように決める（図 2-3）。

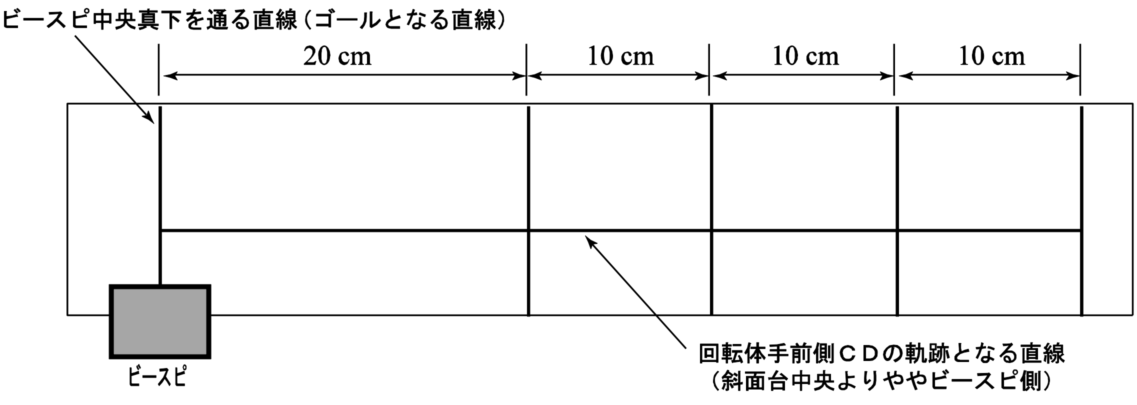


図 2-3

４． 斜面台の裏面には，下側の端から 50 cm の位置に直線を引きなさい。この直線に 2 つの斜面台支え（「使用する部品」（４）（５））のいずれかの辺を合わせることにより，斜面の角度 α を $\sin\alpha = 0.20$，0.12，0.060 となるようにすることができる（図 2-4)。

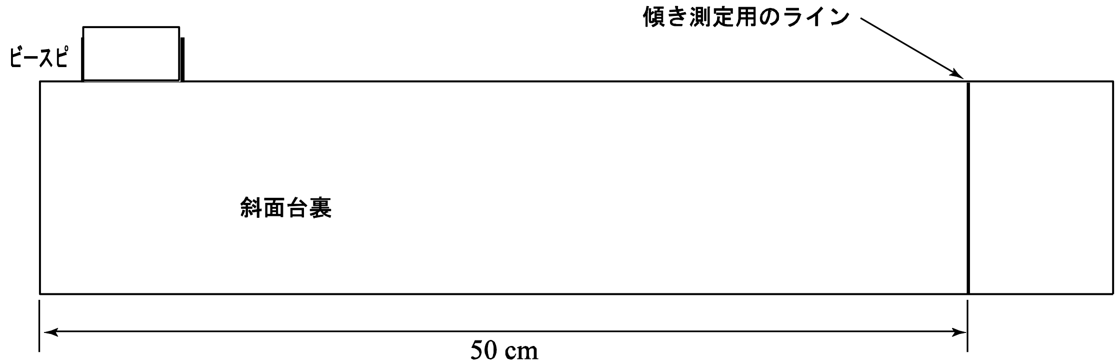


図 2-4

＜解説＞

式 (1-5) と同様の考察から回転体 A，B，C の中心軸のまわりの慣性モーメント I を考える。

●一様な円板・円柱の慣性モーメント

半径 r，質量 M の一様な円板や円柱の対称軸のまわりの慣性モーメントを式 (1-5) の考え方で計算してみよう。円板でも円柱でも同じなので以下では，円板について記す。

円板を同心円で n 個のドーナツ状の部分（円環）に分割する。中心から i 番目の円環の半径を r_i とし，幅を Δr_i とすると，その面積は $2\pi r_i \Delta r_i$，質量は $m_i = \dfrac{2\pi r_i \Delta r_i M}{\pi r^2}$ であるから，円板の慣性モーメントは,

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots + m_n r_n^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2\pi r_i \Delta r_i M}{\pi r^2} r_i^2 = \frac{2M}{r^2} \sum_{i=1}^{n} r_i^3 \Delta r_i$$

と表される。この総和の $n \to \infty$ の極限は，積分を用いて次のように計算される。

$$I = \frac{2M}{r^2} \int_0^r r'^3 \mathrm{d}r' = \frac{2M}{r^2} \left[\frac{r'^4}{4} \right]_0^r = \frac{1}{2} Mr^2 \qquad (2\text{-}1)$$

したがって，CD2 枚と木製円柱 1 本を併せた部分の慣性モーメントを I_0 と置くと,

$$I_0 = m_b b^2 + \frac{1}{2} m_b' b'^2 \qquad (2\text{-}2)$$

スペーサー 8 本とネジ 16 本の部分の慣性モーメントは $I' = m'r^2$ であるので，回転体の慣性モーメントは,

$$I = I_0 + I' = m_b b^2 + \frac{1}{2} m_b' b'^2 + m'r^2 \qquad (2\text{-}3)$$

と表される。

一般に質量 M の剛体の慣性モーメントを,

$$I = M k^2 \tag{2-4}$$

と表したときの k をこの剛体の**回転半径**という。

課題２－１

式 (2-2) を用いて CD2 枚と木製円柱 1 本を併せた部分の慣性モーメント I_0 を計算しなさい。次に，式 (2-3) および (2-4) を用いて，回転体 A，B，C の慣性モーメント I ，回転半径 k を計算して，解答用紙の表 2-1 を完成しなさい。

＜解説＞

慣性モーメント I を持つ物体（回転体）が斜面を転がり落ちる運動を考える。

●斜面を転がり落ちる物体の運動

水平と一定の角 α をなす斜面を，質量 M，外周の半径 b，中心軸のまわりの慣性モーメント $I = M k^2$ の回転体が，転がり落ちる場合を考える。

回転体に働く力は，鉛直下向きの重力 Mg と斜面からの垂直抗力 R および摩擦力 F である。斜面に沿って下向きに x 軸を取ると，斜面に平行および垂直方向の重心運動に関する運動方程式は,

$$M \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} = Mg \sin\alpha - F \tag{2-5}$$

$$0 = Mg \cos\alpha - R$$

となる。v_{G} は回転体の重心の速度である。一方，重心のまわりの回転運動の方程式は,

$$I \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = N = F\, b \tag{2-6}$$

となる。

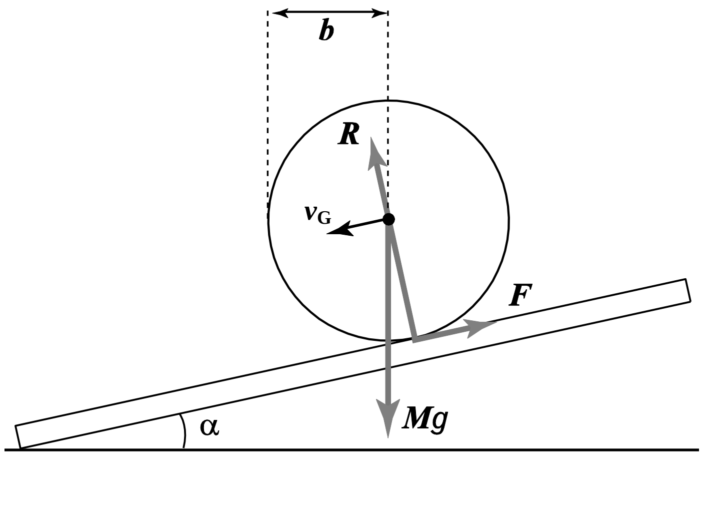


図 2-5

●滑らない場合

物体が滑らずに転がり落ちる場合を考える。この場合，摩擦力 F は静止摩擦力である。滑らずに転がることから，回転体の重心（中心軸上にある）の位置 x_G，速度 v_G と回転体の回転角 θ，角速度ω とのあいだに関係式

$$x_G = b\theta \ , \ \ v_G = b\omega$$

が成り立ち，式 (2-5)，(2-6) を用いて静止摩擦力 F を消去すると，

$$(Mb^2 + I)\ \frac{d\omega}{dt} = (Mg \sin\alpha - F)\, b + F\, b = Mgb \sin\alpha$$

よって，重心運動の加速度は，

$$a_G = \frac{dv_G}{dt} = b\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{Mb^2}{Mb^2 + I}\ g \sin\alpha = \frac{b^2}{b^2 + k^2}\ g \sin\alpha \qquad (2\text{-}7)$$

と表され，一定となる。

時刻 $t = 0$ に静止状態から運動を始めたとすると，時刻 t における重心の速度 v_G，位置 x_G，および，回転体の角速度ω，回転角θ は，次のようになる。

$$v_G = b\omega = \frac{b^2}{b^2 + k^2}\ gt \sin\alpha \qquad (2\text{-}8)$$

$$x_G = b\theta = \frac{b^2}{b^2 + k^2}\ \frac{1}{2}\ gt^2 \sin\alpha \qquad (2\text{-}9)$$

初速度 0 から走行距離 l を等加速度 a_G で運動した後の速度が v_G となったとすると，

$$v_G^{\ 2} = 2a_G l$$

が成り立つ。

したがって，回転体が滑らずに転がり，重心が速度 v_G で移動するとき，

回転体の重心運動の運動エネルギー： T_G

重心を通る中心軸のまわりの回転運動の運動エネルギー： T_R

全運動エネルギー： T

は，

$$T_G = \frac{1}{2}\ M v_G^{\ 2} = \frac{1}{2}\ M b^2 \omega^2$$

$$T_R = \frac{1}{2}\ I\,\omega^2 = \frac{I}{M\, b^2}\ T_G = \frac{k^2}{b^2}\ T_G$$

$$T = T_G + T_R = \frac{I + M\, b^2}{M\, b^2}\ T_G = \frac{k^2 + b^2}{b^2}\ T_G$$

と表される。よって，全運動エネルギーT，重心運動の運動エネルギーT_G，および回転運動の運動エネルギーT_R の大きさのあいだには，速度 v_G や角速度 ω の大きさには関係なく，剛体の構造だけで定まる比例関係

$$T : T_G : T_R = (I + M\, b^2) : M\, b^2 : M\, k^2 = (k^2 + b^2) : b^2 : k^2 \qquad (2\text{-}10)$$

が成り立つことが予想される。

斜面と回転体の間の静止摩擦係数を μ とすると，回転体が滑らずに転がるためには，静

止摩擦力 F は，最大摩擦力 μR より小さくなければならないので，条件

$$\mu > \frac{F}{R} = \frac{Mg\sin\alpha - Ma_{\mathrm{G}}}{Mg\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{a_{\mathrm{G}}}{g\cos\alpha}$$

$$= \tan\alpha - \frac{b^2}{b^2+k^2}\tan\alpha = \frac{k^2}{b^2+k^2}\tan\alpha$$

$$\tan\alpha < \frac{b^2+k^2}{k^2}\mu = \tan\alpha_{\mathrm{c}} \qquad (2\text{-}11)$$

が必要である。

課題２－２　＊（物理チャレンジでは、この課題は解答しなくてよいとした）

(1)　適当なサイズのドライバーを使い，斜面台の上端に細い木の棒を木ねじ（小）で取り付ける。回転体 C の半径 r = 53 mm の円周上にあるスペーサーの外周を半径 a = 55 mm の円とみなし「内輪」と呼ぶ。この内輪に糸を巻き，内輪の上側から斜面と平行に引き出して斜面の上端の細い木の棒に図 2-6 のように固定する。静かに斜面を傾けていくと，やがて回転体に滑りが生じる。そのときの角度を$\alpha = \alpha_{\mathrm{c}}$ としたとき，

$$\tan\alpha_{\mathrm{c}} = \frac{Y}{X}$$

を測定しなさい。

(2)　上の測定値を用い，回転体と斜面のあいだの静止摩擦係数 μ を

$$\tan\alpha_{\mathrm{c}} = \frac{b+a}{a}\mu \qquad (2\text{-}12)$$

の関係から求めなさい。

(3)　(2-12)の関係式が成立することを確かめなさい。

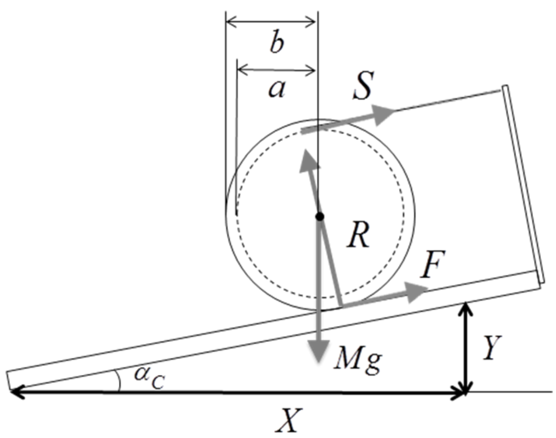


図 2-6

課題２－３

斜面を傾きが $\sin\alpha = 0.20$ となるように組み立てなさい。走行距離が 20，30，40，50 cm となるようなスタート位置から，回転体 C を斜面に沿って静かにスタートさせ，4 種類の走行距離 l を転がり落ちるときの速度 v_G を 3 回ずつ測定し, 記録しなさい。速度の平均値 v_G および，回転体が得た重心運動の運動エネルギーT_G を算出しなさい。また，走行距離 l に対応する高度差 h を計算し，走行中に回転体が失う位置エネルギーU を計算して，解答用紙の表 2-2 を完成しなさい。

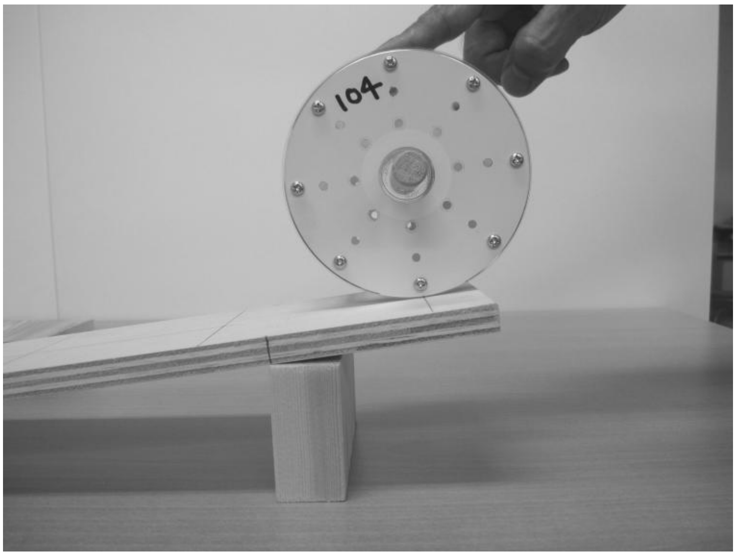


図 2-7　回転体のスタート

課題２－４

回転体 C が，4 種類の走行距離を転がり落ちたとき, 回転体が失った位置エネルギーU を横軸に，回転体が得た重心運動の運動エネルギーT_G を縦軸にとり，解答用紙 2-4-(1)にプロットしなさい。グラフでは，データ点が原点を通る直線上にあることが予想される。それはなぜか，理由を解答欄 2-4-(2)に記すこと。また，この予測が正しいと仮定すると，回転体が得た重心運動の運動エネルギーT_G は，回転体が失った位置エネルギーU に比例することになる。その勾配の逆数として得られる比例定数$\dfrac{U}{T_G}$ を算出しなさい。

課題２－５

課題 2-4 において，走行距離の関係なく，比 $\dfrac{U}{T_G}$ が一定であれば，斜面を下る剛体の重心は等加速度運動であるといえる。その理由を説明しなさい。

課題２－６

斜面を傾きα が $\sin\alpha$ = 0.20，0.12，0.06 となるような 3 つの場合について，回転体 C を斜面に沿って静かにスタートさせ，走行距離 l = 50 cm を転がり落ちたときの速度 v_{G} を 3 回ずつ測定し，記録しなさい。課題 2-4 の場合と同様に，回転体が得た重心運動の運動エネルギーT_{G}，回転体が失う位置エネルギーU および，それらの比 $\dfrac{U}{T_{\mathrm{G}}}$ を計算して，解答用紙の表 2-3 を完成しなさい。この結果から，斜面の傾きが回転体の運動に及ぼす影響についてどのようなことが分かるか，説明しなさい。

課題２－７

斜面の傾きを $\sin\alpha$ = 0.20 とし，回転体 C が静止状態から走行距離 l = 50 cm を転がり落ちたときの速度 v_{G} を 3 回ずつ測定し，その平均値から，回転体が得た重心運動の運動エネルギーT_{G}を求めよ。落下した高度差 h から回転体が失った位置エネルギーU，および，比 $\dfrac{U}{T_{\mathrm{G}}}$ を計算しなさい。次いで，回転体を回転体 B，A として組み立て直して同様に測定し，表 2-4 を完成しなさい。力学的エネルギー保存の法則および式 (2-10) の関係式が成り立つことを仮定して，各回転体の慣性モーメント I を計算しなさい。さらに，課題 2-1 で求めた $I' = m'r^2$ の値と式 (2-3) を用いて，CD2 枚と木製円柱 1 本を併せた部分の慣性モーメント I_0 を計算しなさい。３つの回転体について得られた I_0 値は互いに一致したか？また，課題 2-1 で求めた I_0 の理論値と一致したか？

課題２－８

回転体が静止状態から，斜面を**滑りながら**転がり落ちた場合，回転体が得た重心運動の運動エネルギーT_{G}，回転運動の運動エネルギーT_{R}，失った位置エネルギ U の間の比 $\dfrac{T_{\mathrm{G}}}{U}$ および $\dfrac{T_{\mathrm{R}}}{U}$ は，それぞれ，滑らずに転がり落ちた場合に比べ，増加するか，減少するか，理由と共に推論しなさい。

＜課題３＞剛体の３次元回転運動

この課題では，動力で回転する物体の 3 次元的運動を考える。

使用する部品

この課題で使用するおもな部品は以下の通りである。

（２)　　歳差運動回転台

（２－２)　CD

（３－１）工具 (ドライバー6 本セット)

（６）　　金属製定規

（１－１）（１－２）（１－４）（１－５）（１－６）測定器，検出器，モーター電源リード

両面テープ，ドラフティングテープ，電源細線（共用台に準備してある。適宜使用する。）

実験の準備

１．　　歳差運動回転台の構造を観察する。

２．　　回転検出器の構造を観察する。

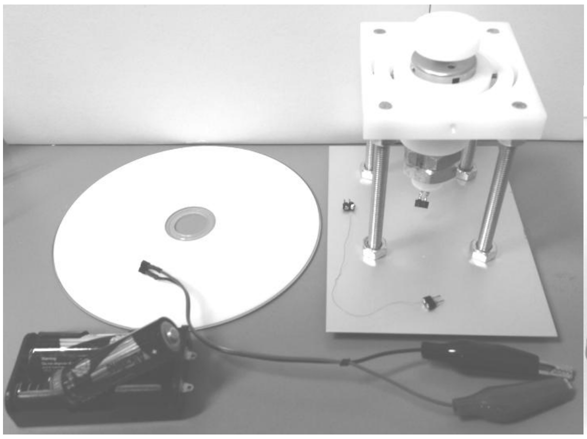
３．　　測定は装置を組み立てながら行うので，手順に注意して実験すること。

課題３の実験装置では，回転子を直流モーターで実現している。歳差運動回転台のうえに，のちにＣＤをとりつけて，モーターを動作させ，測定するが，回転子を傾けた時の運動は，コマなどで見慣れたものとよく似たものになる。

回転子は，自在支持装置（ジンバルと呼ばれる）で支持されているが，支持軸の摩擦の影響がある，またモーターや回転子等の質量の影響を除くため，おもりによる重力以外は回転子にモーメントを与えないように調整してある。以下写真にしたがって説明すると

1. 回転運動体セット
   - A. 回転子を組み込んだ，歳差運動回転台，リスト（２）
   - B. 裏面に塗装のある回転板（CD），リスト（２－２）
   - C. 電池ボックス（1.5 V ×2），リスト（１－５）（１－６）
   - D. 電源リード. （４－６）（写真では A の基盤上の細線に注意：セットとは別に供給）

２．回転数検出セット
   - A. マルチメータ（回転検出回路機能をもつ）METREX P-10，リスト（１－２）
   - B. 回転検出ボードと電源リード（電源は赤黒、検出は白緑黄のうちの 2 色のクリップ電源）（１－４）
   - C. 電池ボックス（1.5 V ×2），リスト（１－５）（１－６）



１． 回転運動体セット

２．回転数検出セット

注意：モーターに電流を供給する細線は，運動を妨げないように，非常に細い線を使用している。切れやすいので別に供給するが，以下の課題では，これを切らないように，細心の注意をはらって実験すること。解説を読んだあとで，テープ，電源細線等は共用台に取りに来ること。

以下では，課題の中で装置を組み立てながら進んでいく。

＜解説＞

●角運動量とその変化率

これまでの課題１・課題２で扱った剛体は，固定された回転軸，あるいは，重心を通り，方向が一定の回転軸のまわりに回転運動した。そのような場合には，角速度 ω の時間変化は外力のモーメント（トルク）N によって引き起こされ，剛体の慣性モーメントを I として，

$$I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = N$$

が成り立つ。これは，大きさを無視できる小物体（質点）の場合，あるいは，複数の質点や剛体をその重心で代表させたときの運動に関する運動方程式

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

に対応するものである。

位置ベクトル $\vec{r} = (x, y)$ にある小物体に力 $\vec{F} = (F_x, F_y)$ が働いているとき，この小物体を原点のまわりに，反時計回りに回転させせようとする力のモーメント（トルク）N は，力 $\vec{F}$ の大きさ F と，原点から力の作用線までの距離（これを腕の長さと言うことがある）$r\sin\theta$ の積 $N = F\,r\sin\theta$ として定義される。ここで，θ はベクトル $\vec{r}$ を回転して，ベクトル $\vec{F}$ と平行にするとき，反時計回りに回転させる角度である。ベクトル $\vec{r}$ およびベクトル $\vec{F}$ が x 軸正の向きとなす角をそれぞれ θ_r および θ_F とおくと，$\theta = \theta_F - \theta_r$ であるので，正弦関数の加法定理を用いて，

$N = F\,r\sin\theta = F\,r\sin(\theta_F - \theta_r) = F\,r\,(\sin\theta_F\cos\theta_r - \cos\theta_F\sin\theta_r)$

$$= F\sin\theta_F\,r\cos\theta_r - F\cos\theta_F\,r\sin\theta_r = F_{\mathrm{y}}\,x - F_{\mathrm{x}}\,y = x\,F_{\mathrm{y}} - y\,F_{\mathrm{x}} \qquad (3\text{-}1)$$

が得られる。

これと同様に，位置ベクトル $\vec{r} = (x, y)$ にある小物体が，運動量 $\vec{p} = m\,\vec{v} = (p_{\mathrm{x}}, p_{\mathrm{y}})$ で運動しているとき，運動量 $\vec{p}$ の大きさ p，位置ベクトル $\vec{r}$ の大きさ r および $\vec{p}$ と $\vec{r}$ のなす角の正弦 $\sin\theta$ の積

$$L = p\,r\sin\theta = p\,r\sin(\theta_p - \theta_r) = x\,p_{\mathrm{y}} - y\,p_{\mathrm{x}} \qquad (3\text{-}2)$$

で定義される量（運動量のモーメントに相当）を，小物体がもつ原点のまわりの**角運動量**という。

単位時間当たりの角運動量の変化（時刻による微分）は，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x\,p_{\mathrm{y}} - y\,p_{\mathrm{x}})}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,p_{\mathrm{y}} + x\,\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{y}}}{\mathrm{d}t}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,p_x + y\,\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{x}}}{\mathrm{d}t}\right) = v_{\mathrm{x}}\,p_{\mathrm{y}} + x\,F_{\mathrm{y}} - v_{\mathrm{y}}\,p_{\mathrm{x}} - y\,F_{\mathrm{x}}$$

となる。ここで，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$ および $v_{\mathrm{x}}\,p_{\mathrm{y}} = v_{\mathrm{y}}\,p_{\mathrm{x}} = m\,v_{\mathrm{x}}\,v_{\mathrm{y}}$ を用いると，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = N \qquad (3\text{-}3)$$

が得られる。この式は角運動量の変化率は力のモーメントに等しいことを表している。外力が無い場合や，あっても位置ベクトルと平行な場合は，外力のモーメントは 0 となり，角運動量は変化しない。これを，**角運動量保存の法則**という。

剛体を，原点を通る回転軸からの距離 r_1，r_2，r_3，･･･の位置にある質量 m_1，m_2，m_3，･･･の小物体の集まりとみなし，剛体の角速度を ω とすると，位置 $\vec{r_i} = (x_i, y_i)$ にある小物体 i の円運動の速度の大きさは $r_i\omega$ であるので，その角運動量は $L_i = m_i\,r_i^2\omega$ となる。剛体全体の角運動量は，これを加え合わせて，

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots = m_1r_1^2\omega + m_2r_2^2\omega + m_3r_3^2\omega + \cdots = I\,\omega \qquad (3\text{-}4)$$

と表される。ただし，

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \cdots$$

は剛体の慣性モーメントである。

●剛体の３次元回転運動

課題３では，一点（これを支点と呼ぶ）が固定された剛体の運動（これを３次元回転と呼ぶ）を扱う。この場合は，剛体の回転軸は支点を通らなければならないが，その方向はいろいろな向きが可能である。

したがって，軸の方向が固定されていたときとは異なり，３次元回転では，角速度，角運動量やトルクを特定するには，その大きさ（と符号）だけではなく，回転する，あるいは回転させようとする軸の方向も指定することが必要になる。そこで，角運動量 L，角速度 ω，トルク N は，大きさのほかに方向をもつベクトルと考え，それぞれ $\vec{L} = (L_{\mathrm{x}}, L_{\mathrm{y}}, L_{\mathrm{z}})$，$\vec{\omega} = (\omega_{\mathrm{x}}, \omega_{\mathrm{y}}, \omega_{\mathrm{z}})$，$\vec{N} = (N_{\mathrm{x}}, N_{\mathrm{y}}, N_{\mathrm{z}})$ という成分をもつとする。これらのベクトルの方向は回転軸の方向であり，その向きは，回転する（させようとする）方向に回した右ねじの進む向きを表す。

式 (3-3) と同様に，**角運動量ベクトル**の変化率はトルクベクトルにより与えられ，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{N} \qquad (3\text{-}5)$$

が成り立つ。

この課題で扱う物体には，日常生活で出会うコマのように，特定の方向のまわりに，回転してできる形状をもつものを考える（軸対称性を持っているという）。対称軸を回転軸として回っている場合には，$\vec{L}$ と $\vec{\omega}$ の方向は対称軸と平行であり，それらの大きさは $|L|$, $|\omega|$ で表し，向きを L，ω の符号で表し，上から見て反時計（時計）回りのときは正（負）の値をとるものとする。L，ω と，対称軸に関する慣性モーメント I の間には，これまでと同様に

$$L = I\,\omega \qquad (3\text{-}6)$$

の関係が成り立つ。

こまは，回転軸が鉛直から傾いても，回転軸の先端がゆっくりと円を描いて回転し，倒れずに回転運動を続ける。この運動を**歳差運動**という。ここでは，この運動を厳密に扱うことをやめて，こまの自転が速く，こまの回転軸の回転による角運動量は無視できるとする。こまのように回転する物体の，歳差運動の角速度 Ω は次のように考えて求めることができる。

こまの支点は，重心と一致し，重心から下方に距離 d の位置に質量 m のおもりが付いているとする。図 3−1 のように，回転軸が鉛直軸（z 軸）から xz 面内に角 θ 傾いている場合を考える。

このとき，おもりに働く重力によるトルク $\vec{N}$ は角 θ を減少させる向きに働くので y 軸負の向きであり，その大きさは,

$$|\vec{N}| = mgd\sin\theta$$

である。

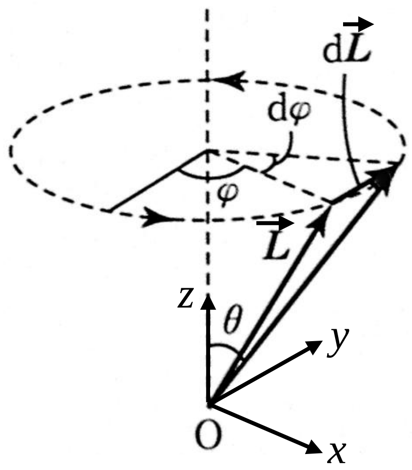


図 3-1

角運動量ベクトル $\vec{L}$ の鉛直軸のまわりの回転角を φ とすると，微小時間 $\mathrm{d}t$ の間の $\vec{L}$ の変化 $\mathrm{d}\vec{L}$ は y 軸方向を向いており，その大きさ $|\mathrm{d}\vec{L}|$ は，$|L| = |\vec{L}|$ を用いて,

$$|\mathrm{d}\vec{L}| = |L|\sin\theta\cdot|\mathrm{d}\varphi|$$

と書ける。一方，式 (3-5) から，$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{N}\cdot\mathrm{d}t$ であるから，その大きさは,

$$|\mathrm{d}\vec{L}| = |\vec{N}|\,\mathrm{d}t = mgd\sin\theta\cdot\mathrm{d}t$$

と書ける。よって，$L = I\omega$ を用いて，角速度 Ω の大きさは

$$|\Omega| = \frac{|\mathrm{d}\varphi|}{\mathrm{d}t} = \frac{mgd\sin\theta}{|L|\sin\theta} = \frac{mgd}{I|\omega|} \qquad (3\text{-}7)$$

となる。

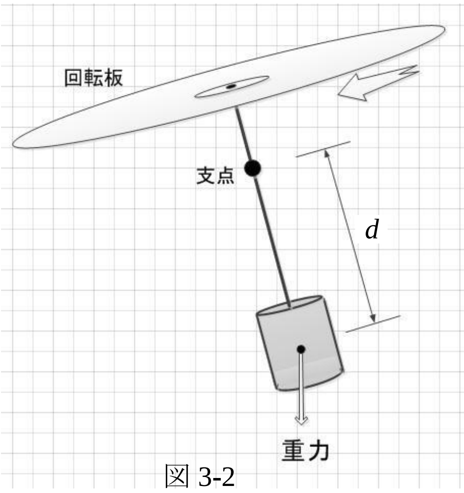


図 3-2

左図は課題実験装置の運動部分の模式図である。回転板の支持軸は一点で固定され，この支点のまわりに自由に動くことができる。したがって，これまでの回転軸の方向が一定の場合とは異なり，装置の運動部分の動作は立体（３次元空間）的になる。

この運動部分の力学的ふるまいを調べることにしよう。

回転板に取り付けられた軸は回転板とともに回転する。回転板と回転軸をあわせて回転子と呼ぶ。軸の下部に取り付けられた「おもり」は，軸になめらかにとりつけられており，おもり自身は軸のまわりには回転せず，軸に力を与える働きだけをする。

課題３－１　回転運動体セットの静特性測定

はじめに，回転子を組み込んだ歳差運動回転台をとり，構造を確認する。最上部には，モーター回転軸につながった，CD をのせる直径 24 mm の台がある。モーターは二重のリングにささえられ，リングは互いに直交した軸のまわりに回転することができる。CD 台の部分を水平方向に押して，下部に金属ナットでできたおもりをつけた回転子を，なめらかに運動させることができること，構造にがたつきがないことを確認する。長方形アルミ基盤の長手方向を前後，短い方向を左右の向きに配置する。おもりはモーター下部のプラスチックねじで上下に移動できる（1 回転で 1.5 mm 移動）。おもりは，ネジ上部の円筒部分を右手指でもち，左手指で回転し移動する。この際，金属ナットが可動範囲（プラスチックねじ）最上部にあることを確認する。以下，モーターに電流を供給しない状態での運動を静特性と呼ぶことにする。

以下の測定結果は解答用紙の指定した場所に書きなさい。

a. 回転運動体に円盤（CD）を取付けた状態での振動の確認

まず，円盤が CD 台の上にのり，水平にセットできることを確かめる。

このままでは，回転したとき不安定なので，いったん円盤をはずし，CD を以下のようにして固定する。

CD 裏面（反射面，黒く塗った部分がある面）の中心穴にそって 1 cm の両面テープを平行に 2 枚張る（位置自由）。

テープは穴の円周部に接するように，平行にはること。両面テープのはく離紙を取り除く。歳差運動回転台のうえに CD を両手でのせ，両親指で CD を押しつける。このときモータ

ー下部の円筒プラスチック下部を両薬指ではさむように支持すると力をかけやすい。

b.　a と同様に CD がついた状態で振動させ，振動の周期を計測し，結果を記入しなさい。

課題３－２　回転運動体セットへの電源供給と動作確認

回転子に組み込まれたモーターに電流を供給して，回転運動体セットの動特性を調べる準備を行う。

とりつける電流リードは非常に細いので，この部分は細心の注意をして行う必要がある。

この課題の開始時に共用

a.　回転子下部に出ているモーターへの端子を手前に折り曲げる。端子が両端についた細線の片側端子をもち，モーター端子部分にさしこむ。このとき金属ナット部分を左指ではさみ，モーター端子は薬指でささえると作業しやすい。

b.　つぎに，赤と黒のクリップのついた電流リードを細線の反対側の端子と結合する。細線がからまらないように注意しながら，クリップつきのリードの端子部分を 2 ㎝ほどのドラフティングテープでアルミ基板に固定する。

c.　電池ボックスに電池をセットし，クリップの黒を－，赤を＋端子につなぐ。CD の回転が安定しないときはすぐにクリップをはずし, 再度 3－1 b のやりかたに従い CD 中心部周辺を押して，CD の傾きを修正し，再度回転させ，安定に回転するようになるまで繰り返す。電池ボックスの端子は手前に直角に折り曲げるとクリップで挟みやすい。

d.　上記の配線状態で，CD の回転の向きを書け。回転方向は装置の上方から見た場合，反時計まわりを＋, 時計まわりを - とする。確認後クリップをはずし, 一時停止しておく。

課題３－３　回転子（CD）の回転数の検出（この課題は解答しなくてよい）

a.　回転検出装置は，光源・センサー部分からなる回転検出ボードと，周波数検出機能（Hz/Duty）をもつマルチメータから成る。組み立てとテストを以下で行う。光源部分から出た光は，CD 裏面で反射されセンサー部分で検出される。出力は矩形波信号としてマルチメータに送られる。電源は電池ボックス（3 V）を使い，赤は＋，黒は－端子につなぐ。検出出力（白，緑，黄のうちの２色）のクリップでマルチメータの赤，黒２本それぞれの端子先端の金属部分をはさむ。回転数測定の開始前に回転子電源電圧をマルチメータの電圧測定機能で確認しておく。

b.　CD を回転させ，回転数検出テストを行う。回転子電源は 3 V とする。
検出ボードは工具セットの箱にテープで固定し，素子面を上にして CD の裏面に近づける。このとき検出ボード面が CD の面とできるだけ平行になるようにセットする。回転数が検出されることを確認したあと以下の測定をおこない，結果を解答用紙に記入しなさい。真の回転数は表示の半分であることに注意しなさい。

1. スタート後，安定するまで 30 秒待つこと。
2. スタートして 30 秒後の回転数を計測する。

c. (1) 以上の計測データを，横軸に時間（s）を，縦軸に真の回転数（Hz）を取り，グラフにプロットしなさい。

(2) CD の裏面を調べ，真の回転数は表示の半分となる理由を簡単に説明しなさい。

(3) 回転数測定後，回転子電源電圧を，マルチメータの電圧測定機能で確認し記載しなさい。

(4) 以上の測定から，以下の測定に関して重要な注意点がわかるが，自分の考えを書きなさい。

以下の測定では，最初の説明にある，回転子の歳差運動について調べる。

課題３－４　回転運動体セットの動特性測定（定性的測定）

回転子を 3 V の電源ボックスにつないでスタートさせる。途中で断線などで回路に変更がありうることを考慮し，電源リードの赤クリップを＋に，黒を－につないだ場合の回転方向を＋/－で再度記載する。また回転が安定した状態での回転数，電源電圧を書きなさい。

１．回転子にとりつけられた，おもりの部分を前方に水平に 1 cm 程度押し，減衰する歳差運動がおきることを確認しなさい。回転と同様に，歳差運動の方向を＋/－で記載しなさい。歳差運動測定後，回転子（CD）の定常回転数，電源電圧を測定し，記載しなさい。

２．電源を逆転して，同様の測定を行いなさい。歳差運動の向き，歳差運動測定後の電源電圧，回転子（CD）の定常回転数，電源電圧を測定し，記載しなさい。

３．電源電圧を 1.5 V に減らして，同様の測定を行いなさい。このとき電源の向きは赤＋黒－とする。

４．歳差運動角振動数の公式は，式 (3-7) で与えてある。測定結果と公式との関係について考え，比較検討した考察結果を書きなさい。

５．回転子の角速度 ω および歳差運動の角速度 Ω はいずれも，装置の上方から見た場合，反時計まわりを＋，時計まわりを－とする。観測された２つの角速度 ω および Ω の符号の間の関係を記せ。また，なぜそのような関係になるか，説明しなさい。

６．歳差運動が減衰する理由として考えられるものを書きなさい。

課題３－５　回転運動体セットの動特性測定（定量的測定）

以下では，定性的な結果を確認した上で，公式との対応関係の確認を推し進める。この場合実験の変化させるパラメータは，金属ナットおもりの位置であり，歳差運動の定量的変化を追跡する。この測定は図 3-2 において d を変化させることに相当する。おもりにはピッチ 1.5 mm のネジ（右ネジ）が切ってあり，１ 回転ごとに位置が 1.5 mm 変化する。

１．　電源電圧を 3 V とし，回転が安定した状態で，歳差運動の周期を，最上部の位置から 6 点のおもりの位置について測定しなさい。これらの結果から，横軸 d，縦軸 Ω のグラフをプロットしなさい。歳差運動は少なくとも 3 周期以上測定し，その平均値をデータとして用いること。

２．　電源電圧を 1.5V（電池一本分）とし，１．と同様の測定を行い，同じグラフに d–Ω の測定値を追加することで，グラフを完成させなさい。

３．　測定結果のグラフから，おもりが最上部にあるとき，回転子支持位置からのおもりの重心までの距離を推定しなさい。また，定規で直接測定した結果を書きなさい。

４．　上記の結果の違いの原因を考察しなさい。

５．　上記の測定で，回転子の慣性モーメント I を構成する，一番大きな寄与はどの部分からくるか，判断の理由とともに書きなさい。

＜課題４＞剛体振子（実体振子）

使用する部品

この課題 4 で使用する部品は以下の通りである。

（１）　回転子とその支持台

（３－１）　ドライバーセット

（３－３）　六角棒レンチ(2mm)

実験の準備

（１）課題 1 で使った回転子の糸巻部分に付けた糸を取り外しなさい。

（２）回転子の棒の両端の小さなねじ（ストッパー）を外し，小物体 B，C を挿入してそれぞれの重心を棒の中心から 11.0 cm の位置に固定し，ストッパーの小さなねじを再度取り付けなさい。

＜解説＞

剛体を重心から外れた位置で支えると，つり合いの状態では，重心は支点の真下にある。これを傾けた状態から静かに放すと，つり合いの位置のまわりで振動する。このような装置を**剛体振子**（あるいは，**実体振子**，**物理振子**）という。質量 M，重心 G を通る軸のまわりの慣性モーメント $I_G = Mk_G^2$ の剛体が, 重心から距離 l の点 O を通る水平軸のまわりで行う振動を考える。

まず，この新しい軸（z 軸）のまわりの慣性モーメント $I = Mk^2$ を求める。点 O を原点とし，$\overrightarrow{OG}$方向に x 軸をとると，重心 G の座標は $(l,\ 0)$ と表され，剛体の質量 m_i の小部分の座標を (x_i, y_i) として，この小部分の重心から見た相対座標を(x_i', y_i')とすると，$x_i' = x_i - l$，$y_i' = y_i$ が成り立つ。

$\sum_{i=1}^{n} m_i = M$，$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' = 0$ であることから，

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i [(x_i' + l)^2 + y_i'^2] \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + 2x_i' l + l^2 + y_i'^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + 2l \sum_{i=1}^{n} m_i x_i' + l^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = I_G + M l^2 = M(k_G^2 + l^2) \qquad (4\text{-}1)$$

この関係を**平行軸の定理**という。

つり合いの位置からの回転角および角速度を θ および ω とすると，重力によるトルクは $N = -Mgl\sin\theta$ と表されるので，回転運動の方程式 $I\dfrac{d\omega}{dt} = N$ は,

$$M(k_G^2 + l^2)\frac{d\omega}{dt} = -Mgl\sin\theta \qquad (4\text{-}2)$$

重心の水平方向の変位を y_G，速度を v_G，加速度を a_G と置き，変位が微小であると仮定すると，

$y_G = l\sin\theta \cong l\,\theta$,　$v_G \cong l\,\omega$,　$a_G \cong l\,\dfrac{d\omega}{dt}$

と近似できる。よって，重心の水平方向の運動方程式は

$$M\,a_G = M\,l\,\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Mg\,l}{k_G^2 + l^2}\,y$$

と表される。これは質量 M の質点が，ばね定数 $k = \dfrac{Mg\,l}{k_G^2 + l^2}$ のばねにつながれた場合と同じかたちであるから，周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_G^2 + l^2}{g\,l}} \tag{4-3}$$

の単振動となる。

これは，糸の長さが $L = \dfrac{k_G^2 + l^2}{l}$ の単振り子の周期に等しい。

課題４－１

式 (1-6) および課題 1-3, 1-6 の結果を利用して，この回転子の糸巻部分を除いた質量 $M = M_{bar} + 2m$，回転子の重心を通る軸のまわりの慣性モーメント $I_G = I_{BC} + I_{bar}$，および回転半径 $k_G = \sqrt{\dfrac{I_G}{M}}$ を計算しなさい。

課題４－２

この課題では図 4-1 のように回転子の棒の位置を移動させる必要がある。

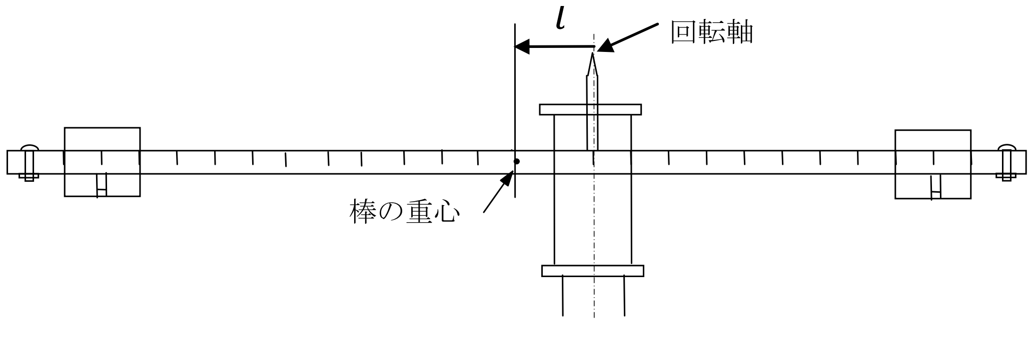


図 4-1　棒の移動

棒の移動は，図 4-2 に示す止めねじを六角棒レンチ(2 mm)で回して行う。

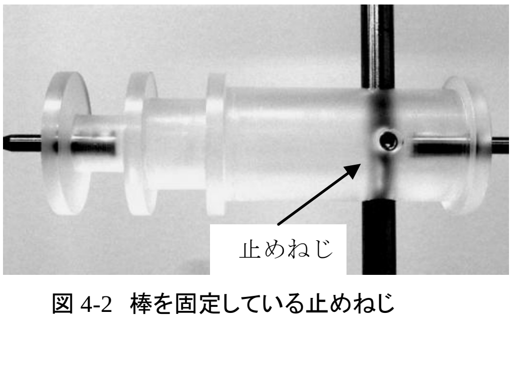


図 4-2　棒を固定している止めねじ

この回転子を，棒の重心からの距離 l_1 = 10 mm，l_2 = 20 mm，l_3 = 40 mm，l_4 = 60 mm，l_5 = 80 mm の点を通る水平軸のまわりに微小振動させ, 適当な回数 n の振動に要する時間 t を測定し，周期 T を算出しなさい。また，式 (4-3) により理論値 $T^{(\mathrm{th})}$を計算しなさい。結果を解答用紙の表 4-1 に記入し，周期の実測値が理論的予測値と一致したと言えるかを検討し，結論を記せ。