物理チャレンジ 2014

第 1 問　解答用紙　1/5　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ________

問 1　8 点

図の直線 OQ′ の長さは弧 PQ′ の長さと等しいから，Q の座標は $(R\omega t, R)$。点 Q を原点とする座標系で点 P の座標は $(-R\sin\omega t, R\cos(\pi - \omega t)) = -(R\sin\omega t, R\cos\omega t)$。この 2 つの x 座標同士，y 座標同士を加え合わせると，求める式

$$x = R\omega t - R\sin\omega t \tag{1}$$

$$y = R - R\cos\omega t \tag{2}$$

を得る。

問 2　8 点

(1),(2) 式を t で微分して

$$v_x = R\omega - R\omega\cos(\omega t) = 2R\omega\sin^2\frac{\omega t}{2}$$

$$v_y = R\omega\sin(\omega t) = 2R\omega\cos\frac{\omega t}{2}\sin\frac{\omega t}{2}$$

これより

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 2R\omega\sin\frac{\omega t}{2}$$

ただし，最後の式の符号を決めるのに，$\omega t \leqq 2\pi$ を使った。OP の長さは v を積分して，

$$s(t) = 2R\omega\int_0^t \sin\frac{\omega t}{2}\,\mathrm{d}t = 4R\Big(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\Big)$$

点 P が B に至るのは，円盤が一周して，$\omega t = 2\pi$ のときだから，この式より，

OAB の長さ $= 8R$

曲線 OAB の長さ $=$ $\boxed{8R}$

問 3　8 点

(2) 式は

$$y = 2R\sin^2\frac{\omega t}{2} = 2R\Big(1 - \cos^2\frac{\omega t}{2}\Big)$$

と書ける。前問の (3) 式から

$$\cos\frac{\omega t}{2} = 1 - \frac{s}{4R}$$

以上から次の式を得る。

$$y = 2R\left[1 - \Big(1 - \frac{s}{4R}\Big)^2\right] \quad \text{または} \quad 2R\left[1 - \Big(\frac{s}{4R} - 1\Big)^2\right]$$

$$y = \boxed{2R\left[1 - \Big(\frac{s}{4R} - 1\Big)^2\right]}$$

解答合計
点

第 1 問　解答用紙　2/5　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名

問 4　8 点

時刻 t での $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の値は，点 P を通るサイクロイドの接線の勾配に等しく，接線の向きは速度ベクトルの向きと等しい。したがって，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\cos\dfrac{\omega t}{2}}{\sin\dfrac{\omega t}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)} - 1} = \pm\sqrt{\frac{2R}{y} - 1}$$

複号は，$\omega t \leqq \pi$ なら正，$\pi < \omega t \leqq 2\pi$ なら負。前者の場合は $x \leqq \pi R$，後者の場合は $\pi R < x \leqq 2\pi R$。

問 5　8 点

力学的エネルギー保存の法則は

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\,(y + 2R) = E \ (一定)$$

$y = -2R$ において $v = v_0$ であるから E の値は

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

したがってエネルギー保存則の式は

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(y + 2R) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

求める式　$\frac{1}{2}mv^2 + mg\,(y + 2R) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$

解答合計　　点

第 1 問　解答用紙　3/5　**第 2 チャレンジ番号** [ ] 氏名 ____

問 6 10 点

(a) 問 3 で導いた y の式の右辺の符号を反転した式 $y=-2R\left[1-\left(\dfrac{s}{4R}-1\right)^2\right]$ と (7) 式を，前問で求めたエネルギー保存則の式に代入すると

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2+2mgR\left(\frac{s}{4R}-1\right)^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2$$

この式の両辺を t で微分して，

$$m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+mg\left(\frac{s}{4R}-1\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0 \quad \text{整理して} \quad m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{mg}{4R}(s-4R)$$

(b) これは，$s=4R$ を中心とする角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{4R}}$ の単振動の運動方程式で，その周期 T は

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}$$

である。

(a) 運動方程式 $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{mg}{4R}(s-4R)}$

問 7 8 点

点 P の座標を $(x,0)$ とすると，質点が P_1 から P_2 に至るのに要する時間 t は，

$$t=\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+{y_1}^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(x-x_2)^2+{y_2}^2}}{v_2}$$

$t(x)$ が極値をもつ x の値は

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{v_1}\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+{y_1}^2}}+\frac{1}{v_2}\frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+{y_2}^2}}=0$$

より決まるが，t が $|x|\to\infty$ のときに正で発散するから，この極値は，最小値。
上の式を α_1 と α_2 を使って書き直すと，

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

解答合計　　点

問 8　10 点

最下点での速さを v_0 とすると，エネルギー保存則 $\dfrac{1}{2}m{v_0}^2 + mgy_0 = 0$ から $v_0 = \sqrt{-2gy_0}$ である。
最下点で $\alpha = 90^\circ$ だから (9) 式の k は $k = \dfrac{1}{v_0} = \dfrac{1}{\sqrt{-2gy_0}}$ と求まる。したがって (9) 式は

$$\sin\alpha = \frac{v}{\sqrt{-2gy_0}}$$

となる。
次に軌道上の任意の点で，エネルギー保存則 $\dfrac{1}{2}mv^2 + mgy = 0$ より $v = \sqrt{-2gy}$ である。これを上の式に代入して $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{y}{y_0}}$ となる。
この式と前問の結果と合わせると

$$\sqrt{\frac{y}{y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}} \quad \text{これを解いて} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{\frac{y_0}{y} - 1}$$

最速降下曲線の最下点までの勾配は負の値を持つので複号はマイナスを取ると，求める式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{\frac{y_0}{y} - 1}$$

を得る。

問 9　12 点

(a) A から C まで自由落下するのに要する時間は $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，エネルギー保存則により C での速さは $v = \sqrt{2gh}$ であるから，C から D まで移動するのに要する時間は $t_2 = \dfrac{L}{v} = \dfrac{l}{\sqrt{2gh}}$ である。D から B まで上昇するのに要する時間も t_1，ゆえに A から B へ行くための全所要時間 T は,

$$T = 2t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{L}{\sqrt{2gh}}$$

(b) $T(h)$ の最小値を求める。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h} = \sqrt{\frac{2}{gh}} - \frac{1}{2}\frac{L}{\sqrt{2gh^3}} = 0$$

T が最小になるのは $h = \dfrac{L}{4}$ のときで，このときの所要時間は $T_\mathrm{m} = 2\sqrt{\dfrac{2L}{g}}$ である。
$L = \overline{\mathrm{AB}} = 500$ km のとき
$h = \dfrac{500\,\mathrm{km}}{4} = 125$ km，$T_\mathrm{m} = 2\sqrt{\dfrac{2\times 500\times 10^3\,\mathrm{m}}{9.8\mathrm{m/s}^2}} = 639$ s $= 10.65$ 分である。

(a)　$T =$ $\boxed{2\sqrt{\dfrac{2h}{g}} + \dfrac{L}{\sqrt{2gh}}}$

(b) 所要時間を最小とする $h =$ $\boxed{\dfrac{L}{4}}$ ，$T_\mathrm{m} =$ $\boxed{2\sqrt{\dfrac{2L}{g}}}$

$L = 500\,\mathrm{km}$ のときの $h =$ $\boxed{125\ \mathrm{km}}$ ，$T_\mathrm{m} =$ $\boxed{6.4\times 10^2\,\mathrm{s}}$，10.7 分 など

解答合計　　点

第 1 問　解答用紙　5/5　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 10　　10 点

A，B を図 2 のサイクロイドでつなぐとすると，$L = 2\pi R$。
2 地点間の往復運動の角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{4R}} = \sqrt{\dfrac{\pi g}{2L}}$,
A から B までの所要時間は周期の半分だから，

$$T_{\min} = \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}}$$

$L = 500$ km の場合，所要時間 $T_{\min} = \sqrt{\dfrac{2\pi \times 500 \times 10^3\,\mathrm{m}}{9.8\mathrm{m/s}^2}} = 566$ s $= 9.43$ 分 と計算される。

[**参考**] なお 最下点の深さ $= 2R = \dfrac{L}{\pi} = 159$ km，問 10 の矩形トンネルの場合と比較すると，最下点は 34.2 km 深く，所要時間は約 1.2 分 (約 13%) 短い。

$T_{\min} =$ $\boxed{\sqrt{\dfrac{2\pi L}{g}}}$

$L = 500\,\mathrm{km}$ のときの $T_{\min} =$ $5.7 \times 10^2\,\mathrm{s}$，9.4 分 など

問 11　　10 点

2 つの小物体が衝突しなければ，それらは等しい周期でトンネル内を往復する。2 つの小物体は，出発して 4 分の 1 周期の後に同時にトンネルの最深部に至り，最初の衝突が起きる。この時の小物体 1 と小物体 2 の速さを v_1，v_2 とし，衝突直後の速さを v_1'，v_2' とすると，運動量保存則より

$$v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$$

完全弾性衝突であることにより，

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$

これを解くと

$$v_1' = v_2\,, \qquad v_2' = v_1$$

エネルギー保存則により小物体 2 の最高到達点は小物体 1 の出発点と同じ高さだから，小物体 2 の最高到達点は B 点である。

衝突の起きた場所は　最深部 (最低点，曲線 AB の中点など)

小物体 2 の最高到達点は　B 地点

解答合計　　点

第2問　解答用紙　1/4　**第2チャレンジ番号**　　　氏名

問1　10点

(a) コイルは n 回巻きなので，磁束 Φ は $\Phi = nBS\cos\omega_B t$ である。電流は起電力を回路の抵抗 R で割って，コイルの電流の正の向きに

$$I(t) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{nBS}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega_B t = -\frac{nBS}{R}[-\omega_B\sin\omega_B t] = \frac{\omega_B nBS}{R}\sin\omega_B t$$

(b) (磁束 Φ は減少するから，コイルにはそれを妨げるような磁場をつくる向きの電流が流れる。したがって）A→B.

[（　）内はなくてもよい]

(a) $I(t) = \boxed{\dfrac{\omega_B nBS}{R}\sin\omega_B t}$　(b) 向き $\boxed{\text{A}\to\text{B}}$

問2　15点

(a) 辺 AD と辺 BC には大きさが同じで逆向きの電流が流れる。磁場は同じであるから，フレミング左手の法則によって電流に働く力は大きさが同じで逆向きである。

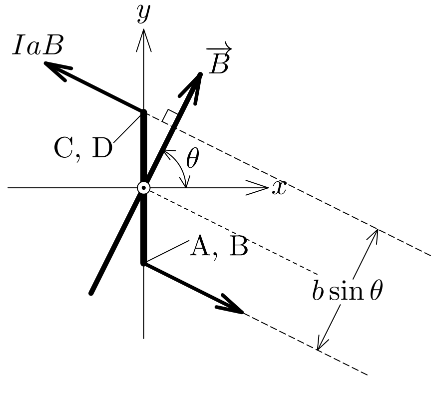
(b) 磁場から受ける力は z 軸に平行（または反平行）なので z 軸の周りのトルクは 0 である。

(別解 1) AD (BC) に働く力の合力の作用点は AD (BC) の中点であり，作用点が z 軸上なのでトルクは 0 である。

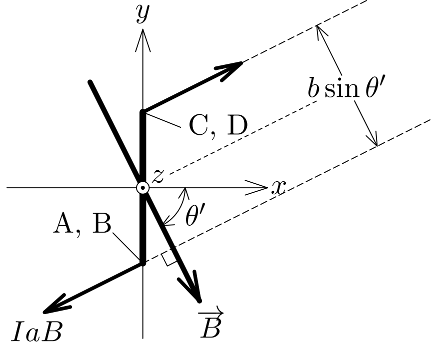
(別解 2) AD に働く力の合力と BC に働く力の合力は同じ作用線をもち，かつ打ち消しあっているのでトルクは 0 である。

(c) $I > 0$ とする。$0 < \theta < \pi$ の場合，辺 AB, CD に働く力の大きさはどちらも $naBI$ で，向きは磁場と直交する。合計のトルクは図のように，正で，$naBI \times b\sin\theta = nSBI\sin\theta$ となる ($S = ab$)。

$\pi < \theta < 2\pi$ の場合は（2π を引くと $-\pi < \theta - 2\pi < 0$ であるから）磁場が時計回りに $\theta' = 2\pi - \theta (> 0)$ の向きにある場合と同じである。この場合は図のようにトルクは時計回りになるから，$-nSBI\sin\theta'$ である。$-nSBI\sin\theta' = -nSBI\sin(2\pi - \theta) = nSBI\sin\theta$ であるから，$0 < \theta < \pi$ の場合と同じ式で表される。



$0<\theta<\pi$ の場合



$\pi<\theta<2\pi$ の場合
$\theta'=2\pi-\theta\ (>0)$

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　2/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　　氏名 ____________

問 3　10 点

$N(t)$ に $I(t)$ を代入して $N(t) = nSBI\sin\theta = \dfrac{\omega_B(nSB)^2}{R}\sin^2\omega_B t$

$N(t) = \boxed{\dfrac{\omega_B(nSB)^2}{R}\sin^2\omega_B t}$

問 4　10 点

(a) x 軸からの角は，磁場が $\theta_B = \omega_B t$，法線が θ_C だから

$$\theta(t) = \theta_B - \theta_C = \omega_B t - \theta_C.$$

磁束を表す式 $\Phi = nBS\cos\theta$ に (a) の θ を代入して，$\Phi = nBS\cos(\omega_B t - \theta_C)$.
θ_C が時間の関数であることに注意して微分すれば

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{nBS}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega_B t - \theta_C) \\ &= -\frac{nBS}{R}\Big[-\sin(\omega_B t - \theta_C)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\omega_B t - \theta_C\Big)\Big] \\ &= \Big(\omega_B - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_C\Big)\frac{nBS}{R}\sin(\omega_B t - \theta_C). \end{aligned}$$

(b) 代入すると

$$N(t) = nSBI\sin\theta = \Big(\omega_B - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_C\Big)\frac{(nSB)^2}{R}\sin^2(\omega_B t - \theta_C).$$

(a)　$\theta = \boxed{\omega_B t - \theta_C}$

$I(t) = \boxed{\Big(\omega_B - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_C\Big)\dfrac{nBS}{R}\sin(\omega_B t - \theta_C)}$

(b)　$N(t) = \boxed{\Big(\omega_B - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_C\Big)\dfrac{(nSB)^2}{R}\sin^2(\omega_B t - \theta_C)}$

問 5　10 点

前問 (b) の解に $\theta_C(t) = \omega_C t$ を代入すると $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_C$ だから

$$N(t) = nSBI(t)\sin(\omega_B - \omega_C)t = \frac{(\omega_B - \omega_C)(nSB)^2}{R}\sin^2(\omega_B - \omega_C)t.$$

$\sin^2(\omega_B - \omega_C)t$ の時間平均は 1/2 であるから，

$$\overline{N} = \frac{(\omega_B - \omega_C)(nSB)^2}{2R}.$$

$\overline{N} = \boxed{\dfrac{(\omega_B - \omega_C)(nSB)^2}{2R}}$

解答合計　　　点

第 2 問　解答用紙　3/4　**第 2 チャレンジ番号** |　|　|　|　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問 6　10 点

全磁束は $nSB\cos(\omega_B-\omega_C)t+LI(t)$ であるから，電流を起電力で表すと

$$I(t)=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[nSB\cos(\omega_B-\omega_C)t+LI(t)]$$

これから $I(t)$ に対する方程式は

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t)+I(t)=\frac{(\omega_B-\omega_C)}{R}nSB\sin(\omega_B-\omega_C)t.$$

したがって，

$$\alpha=\frac{L}{R},\qquad \beta=\frac{nSB}{R},\qquad \omega=\omega_B-\omega_C.$$

$\alpha=$ $\boxed{\frac{L}{R}}$ ，　$\beta=$ $\boxed{\frac{nSB}{R}}$ ，　$\omega=$ $\boxed{\omega_B-\omega_C}$

問 7　10 点

(5) 式を (4) 式に代入して

$$(f-\alpha\omega g)\sin\omega t+(g+\alpha\omega f)=\beta\omega\sin\omega t$$

$\sin\omega t$ $\cos\omega t$ の係数を比較すると，

$$f-\alpha\omega g=\beta\omega\,,\qquad g+\alpha\omega f=0$$

これを解いて

$$f=\frac{\beta\omega}{1+(\alpha\omega)^2},\quad g=-\frac{\alpha\beta\omega^2}{1+(\alpha\omega)^2}.$$

$f=$ $\boxed{\frac{\beta\omega}{1+(\alpha\omega)^2}}$ ，　$g=$ $\boxed{-\frac{\alpha\beta\omega^2}{1+(\alpha\omega)^2}}$

解答合計　　点

物理チャレンジ 2014

第 2 問　解答用紙　4/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　　氏名 ______________

問 8　10 点

(a) $\theta=\omega t$ であり，トルクは

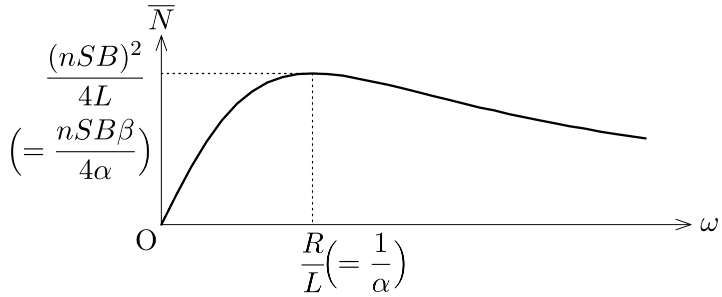
$$N(t)=nSBI(t)\sin\omega t=nSB(f\sin\omega t+g\cos\omega t)\sin\omega t.$$

$\sin^2\omega t$ の時間平均は $1/2$，$\cos\omega t\sin\omega t$ の時間平均は 0 だから，トルクの時間平均は

$$\overline{N}=\frac{1}{2}nSBf=\frac{1}{2}nSB\frac{\beta\omega}{1+(\alpha\omega)^2}=\frac{(\omega_B-\omega_C)(nSB)^2}{2R\left[1+\left\{\frac{(\omega_B-\omega_C)L}{R}\right\}^2\right]}$$

[係数 f のまま，あるいは f を α,β,ω で表したところまでであっても部分点を与える。]

(b) グラフの概略は右のようになる。



[係数 f を α,β,ω で表したところまでで（α, β が ω に依存しないと暗黙に仮定して）グラフを描いた場合にも，ω に対する振る舞いが描けていれば部分点を与える（α, β が ω に依存しない証明がないから正しくはない）。最大値の座標はなくてもよい。]

(a) $\overline{N}=$ $\boxed{\dfrac{(\omega_B-\omega_C)(nSB)^2}{2R\left[1+\left\{\frac{(\omega_B-\omega_C)L}{R}\right\}^2\right]}}$

問 9　15 点

(a) 単位時間あたりのエネルギーの入力は $\omega_B\overline{N}$，出力は $\omega_C\overline{N}$ であり，その差はコイルの抵抗で発生するジュール熱であるはずだから，次の式が成り立つと考えられる。

$$(\omega_B-\omega_C)\overline{N}=\overline{I^2}R$$

(b) ジュール熱の平均は

$$R\overline{I^2}=R\,\overline{(f\sin\omega t+g\cos\omega t)^2}=\frac{R}{2}(f^2+g^2)$$
$$=\frac{R}{2}\left[\left\{\frac{\beta\omega}{1+(\alpha\omega)^2}\right\}^2+\left\{\frac{\alpha\beta\omega^2}{1+(\alpha\omega)^2}\right\}^2\right]=\frac{R}{2}\frac{(\beta\omega)^2}{1+(\alpha\omega)^2}=\frac{(\omega nSB)^2}{2R\left[1+(\omega L/R)^2\right]}.$$

[f,g の α,β,ω による置き換え，α,β,ω の $\omega_B,\omega_C,n,S,B,R,L$ による置き換えが完全でなくても部分点を与える。]

(c) 問 8(a) によれば

$$\overline{N}\omega=\frac{(\omega nSB)^2}{2R[1+(\omega L/R)^2]}$$

であるから，(b) の結果に等しく，エネルギー保存則が成り立っていることがわかる。

(a) $\overline{N}$ と $\overline{I^2}$ の関係	$(\omega_B-\omega_C)\overline{N}=\overline{I^2}R$
(b) ジュール熱の平均値	$\dfrac{\{(\omega_B-\omega_C)nSB\}^2}{2R\left[1+\left\{\frac{(\omega_B-\omega_C)L}{R}\right\}^2\right]}$

解答合計　　点

第 3 問 A　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 1　5 点

可視光の振動数 ν は $4 \times 10^{14} < \nu < 8 \times 10^{14}$ だから,

$$\frac{6.626 \times 10^{-34} \times 4 \times 10^{14}}{1.602 \times 10^{-19}}\mathrm{eV} < h\nu < \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 8 \times 10^{14}}{1.602 \times 10^{-19}}\mathrm{eV}$$

$$\frac{2.650 \times 10^{-19}}{1.602 \times 10^{-19}}\mathrm{eV} < h\nu < \frac{5.301 \times 10^{-19}}{1.602 \times 10^{-19}}\mathrm{eV}$$

すなわち $1.65\ \mathrm{eV} < h\nu < 3.31\ \mathrm{eV}$ である。$W = 5.7\ \mathrm{eV}$ はこの範囲より大きいから，可視光では光電効果は起きない。

光電効果は起きるか，起きないか　起きない

問 2　5 点

問題に与えられた関係式 $E_\gamma = cp_\gamma$ の左辺に (4) 式 $E_\gamma = h\nu$ を代入して整理すると

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

光子の運動量と波長の関係　$p_\gamma = \dfrac{h}{\lambda}$

問 3　5 点

光電子の運動エネルギーの上限は (6) 式 $E_\mathrm{M} = h\nu - E_\mathrm{g}$ で与えられる。したがって,

$$c\sqrt{{p_\mathrm{M}}^2 + (mc)^2} - mc^2 = h\nu - E_\mathrm{g}$$

これを p_M について解いて

$$p_\mathrm{M} = \sqrt{\left(\frac{h\nu - E_\mathrm{g} + mc^2}{c}\right)^2 - (mc)^2}$$

$p_\mathrm{M} =$　$\sqrt{\left(\dfrac{h\nu - E_\mathrm{g} + mc^2}{c}\right)^2 - (mc)^2}$

解答合計　　点

第 3 問 A　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号**　|　|　|　氏名 ____________

問 4　15 点

運動量保存則より,

$$p_\gamma = p'_\gamma \cos\theta + p'_\mathrm{e}\cos\theta', \quad 0 = p'_\mathrm{e}\sin\theta' - p'_\gamma \sin\theta \tag{4.1}$$

(4.1) から θ' を消去すると,

$$\left(\frac{p'_\gamma}{p'_\mathrm{e}}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{p_\gamma}{p'_\mathrm{e}} - \frac{p'_\gamma}{p'_\mathrm{e}}\cos\theta\right)^2 = 1$$

これを整理して,

$${p'_\gamma}^2 - 2p_\gamma p'_\gamma \cos\theta + {p_\gamma}^2 = {p'_\mathrm{e}}^2$$

この式に

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}, \quad p'_\gamma = \frac{E'_\gamma}{c}, \quad {p'_\mathrm{e}}^2 = \left(\frac{E'_\mathrm{e} + mc^2}{c}\right)^2 - (mc)^2$$

を代入して整理すると,

$${E'_\mathrm{e}}^2 + 2mc^2 E'_\mathrm{e} = {E'_\gamma}^2 - 2E'_\gamma E_\gamma \cos\theta + {E_\gamma}^2$$

さらに，(7) 式を使って E'_e を消去すると,

$$2(\cos\theta - 1)E_\gamma E'_\gamma + 2mc^2(E_\gamma - E'_\gamma) = 0$$

$$E'_\gamma = \frac{mc^2 E_\gamma}{mc^2 + (1-\cos\theta)E_\gamma} \tag{4.2}$$

この式と (7) から E'_γ を消去すると,

$$E'_\mathrm{e} = \frac{(1-\cos\theta){E_\gamma}^2}{mc^2 + (1-\cos\theta)E_\gamma} \tag{4.3}$$

$$E'_\gamma = \boxed{\frac{mc^2 E_\gamma}{mc^2 + (1-\cos\theta)E_\gamma}}$$

$$E'_\mathrm{e} = \boxed{\frac{(1-\cos\theta){E_\gamma}^2}{mc^2 + (1-\cos\theta)E_\gamma}}$$

問 5　5 点

$$\frac{h\nu}{E_\mathrm{g}} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} = \frac{1.22 \times 10^5\,\mathrm{eV}}{0.72\,\mathrm{eV}} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} = 2.7 \times 10^{-14}\mathrm{C}$$

求める電気量 $\boxed{2.7 \times 10^{-14}\ \mathrm{C}}$

解答合計
点

第 3 問 A　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名

問 6　5 点

問 4 の (4.2) 式と (4.3) 式から

$$\frac{E'_{\mathrm{e}}}{E'_{\gamma}} = \frac{(1-\cos\theta)E_{\gamma}}{mc^2}$$

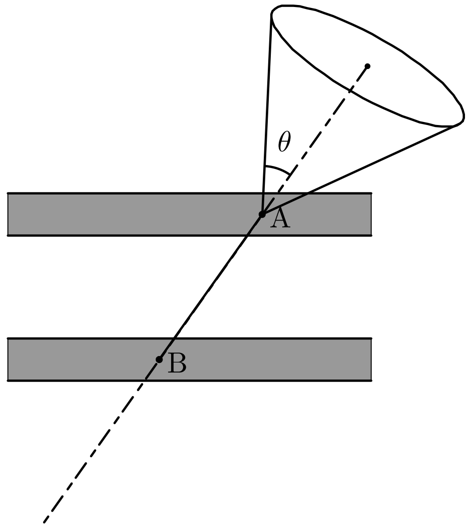
これを $\cos\theta$ について解いて，$E_{\gamma} = E'_{\mathrm{e}} + E'_{\gamma}$ を使うと

$$\cos\theta = 1 - \frac{mc^2 E'_{\mathrm{e}}}{E'_{\gamma}(E'_{\gamma} + E'_{\mathrm{e}})}$$

$$\cos\theta = \boxed{1 - \frac{mc^2 E'_{\mathrm{e}}}{E'_{\gamma}(E'_{\gamma} + E'_{\mathrm{e}})}}$$

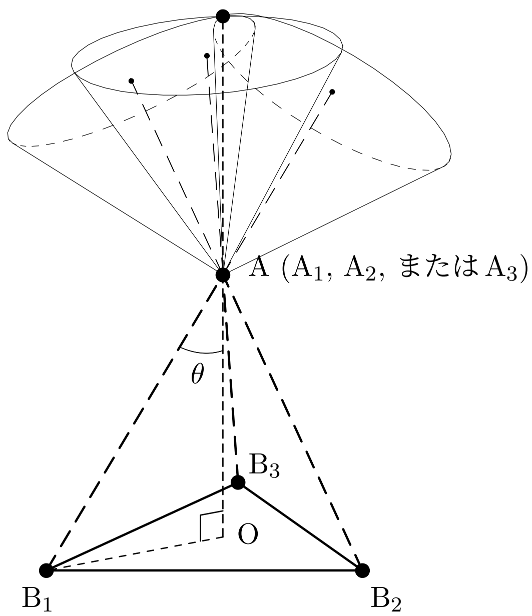
問 7　5 点

AB を軸とする頂角 θ の円錐 (右図) で，
頂点を通る側面内の 1 本の直線の方向



問 8　5 点

頂点を重ね，AB_1，AB_2，AB_3 を中心軸とする 3 つの円錐の側面が重なった方向 (黒点と A 点を結ぶ方向)，すなわち，底面 $B_1B_2B_3$ の中点 O と A を結ぶ直線の方向からガンマ線が来たと決定できる。



解答合計　　点

物理チャレンジ 2014

第 3 問 B　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 1　　7 点

球の表面積は $S = 4\pi R^2$ であり，半径の 2 乗に比例する。
一方，球の体積は半径の 3 乗に比例し，質量数に比例するので，半径は質量数の 1/3 乗に比例する。
したがって

$$g = A^n = (A^{1/3})^2 = A^{2/3}$$

つまり $n = 2/3$ である。

$n = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

問 2　　8 点

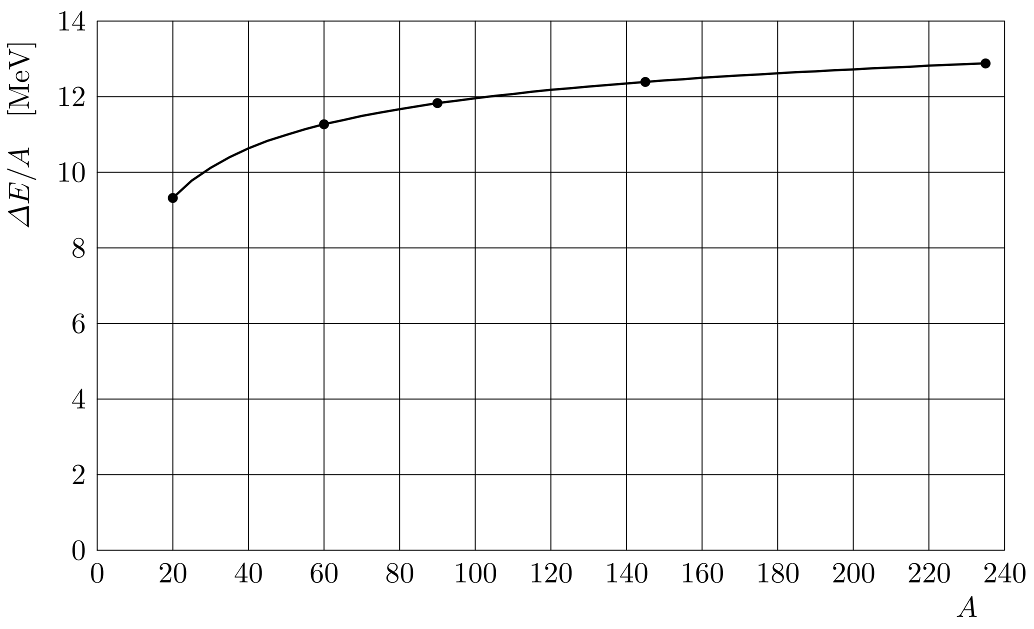
結合エネルギーの式 (3) は

$$\varDelta E = k_1 f + k_2 g = 15.67A - 17.23A^{2/3}\ (\mathrm{MeV})$$

核子 1 個あたり

$$\frac{\varDelta E}{A} = 15.67 - \frac{17.23}{A^{1/3}}\ (\mathrm{MeV})$$

A	20	60	90	145	235
$\varDelta E$ [MeV]	186	676	1064	1797	3026
$\varDelta E/A$ [MeV]	9.322	11.269	11.825	12.390	12.878



解答合計　　点

第 3 問 B　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号**　　氏名

問 3　6 点

h は原子核半径の -1 乗に比例するので，半径が質量数の 1/3 乗に比例することを考えると

$$h = Z^2 A^m = Z^2 (A^{1/3})^{-1} = Z^2 A^{-1/3}$$

したがって $m = -1/3$ である。

$m =$ $-\dfrac{1}{3}$

問 4　6 点

(6) 式は $Z = 43.3$ で極値をとる。原子番号は整数であるので，$Z = 43$ である。

$Z =$ 43

問 5　6 点

$Z = 43$ のとき $\mathit{\Delta} E = 873.6$ MeV，$Z = 42$ のときの値 $\mathit{\Delta} E' = 871.9$ MeV，よってその差額，$\mathit{\Delta} E - \mathit{\Delta} E' = 873.6 - 871.9 = 1.7$ MeV が放出される。

放出されるエネルギー $=$ 1.7 MeV

解答合計

点

第 3 問 B　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号**　氏名

問 6　10 点

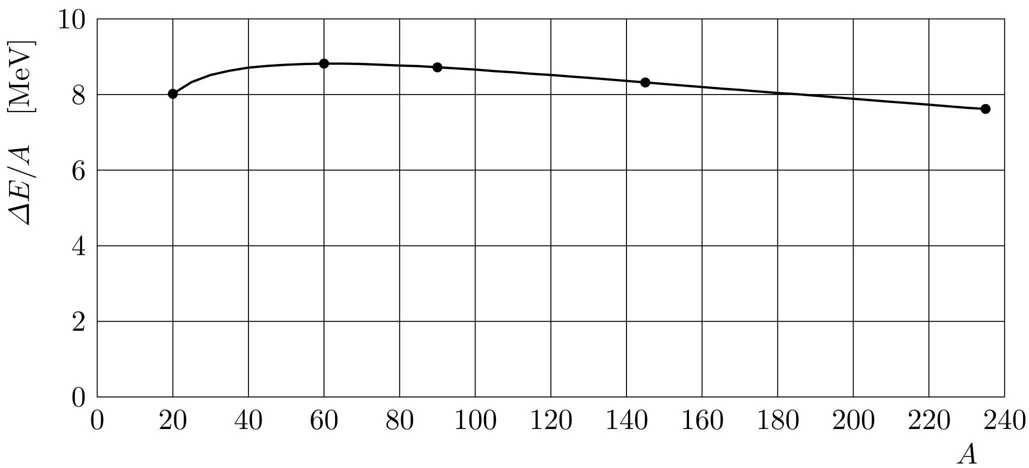
結合エネルギーの式 (5) は

$$\Delta E = 15.67A - 17.23A^{2/3} - 0.714\frac{Z^2}{A^{1/3}} - 23.29\frac{(A-2Z)^2}{A} \quad \mathrm{MeV}$$

核子 1 個あたり

$$\frac{\Delta E}{A} = 15.67 - \frac{17.23}{A^{1/3}} - \frac{0.714Z^2}{A^{4/3}} - 23.29\Big(1 - \frac{2Z}{A}\Big)^2 \quad \mathrm{MeV}$$

A	20	60	90	145	235
Z	9	27	39	60	91
$A^{1/3}$	2.7144	3.9149	4.4814	5.2536	6.1710
問 2 の答 (1) [MeV]	9.322	11.269	11.825	12.390	12.878
$\frac{k_3 \cdot h}{A}$ (2) [MeV]	−1.065	−2.216	−2.693	−3.374	−4.077
$\frac{k_4 \cdot i}{A}$ (3) [MeV]	−0.233	−0.233	−0.414	−0.692	−1.185
$\frac{\Delta E}{A}$ (1)+(2)+(3) [MeV]	8.02	8.82	8.72	8.32	7.62



問 7　7 点

$A = 90$，145，235 に対してそれぞれ $\Delta E/A = 8.72$ MeV，8.32 MeV，7.62 MeV である。
$A = 90$，145 の結合エネルギーはそれぞれ $8.72 \times 90 = 785$ MeV，$8.32 \times 145 = 1207$ MeV で，その和 $785 + 1207 = 1992$ MeV は $A = 235$ の結合エネルギー $7.62 \times 235 = 1790$ MeV より大きい。この差 $1992 - 1790 = 202$ MeV が核分裂によって放出されるエネルギーである。

放出されるエネルギー ＝ 202 MeV

解答合計　点