物理チャレンジ2015
理論問題

2015年8月20日（木）

理論問題にチャレンジ　8：30〜13：30

理論問題にチャレンジする前に下記の**＜注意事項＞**をよく読んでください。

問題は，大問３題からなります。問題は，一見難問にみえても，よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙にも手を触れないこと。
2. 問題冊子は 20 ページである。解答冊子は 15 枚である。
3. すべての解答は，解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに，必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は，最終的な答のみではなく，解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき，または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から 200 分（3 時間 20 分）経過するまでは，原則として，途中退出はできない。200 分経過（11:50）後は，退出希望者は旗をあげて監督者に知らせ，すべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は，チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上，机上に置いて退室すること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら，ただちにすべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は，チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上，机上に置いて，監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は，持ち帰ること。

第 1 問 A（50 点）

なめらかで水平な直線上で，一端を固定された軽いバネ (バネ定数 k) の他端に質量 m の物体がつながれている (図 1 参照)。水平な直線を x 軸とし，平衡点を $x = 0$ とする。

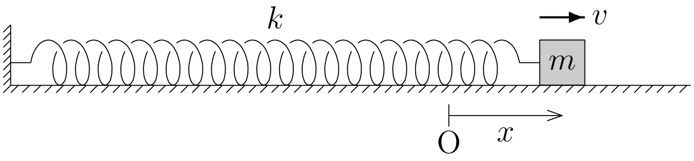

図 1

物体が平衡点 O より x だけ変位したときの速度を $v \left(= \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)$ とする。物体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

である。またバネの復元力による位置エネルギー (ポテンシャルエネルギー) は

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{2}$$

と表される。ただし位置エネルギーは $x = 0$ において $U = 0$ とする。摩擦，空気抵抗などのエネルギー散逸の機構がなければ力学的エネルギー $K + U$ は一定である。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定} \tag{3}$$

この式の両辺を時間 t で微分すると

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4}$$

移項して $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kx\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ，ここで $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ の関係を使うと次の式を得る。

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kx \tag{5}$$

これは単振動の運動方程式であり，角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

である。一般に運動エネルギー，位置エネルギーがそれぞれ (1) 式，(2) 式で与えられるとき，運動は単振動で，その角振動数は (6) 式で与えられる。

[I]　なめらかな水平面上に質量 m の 3 つの質点が，自然長 l，バネ定数 k の 3 つの軽いバネで図 2 のように正 3 角形状に結ばれている。3 つの質点が正 3 角形の形状を保って振動するときの振動数を以上のエネルギーの考えに基づいて求めよう。

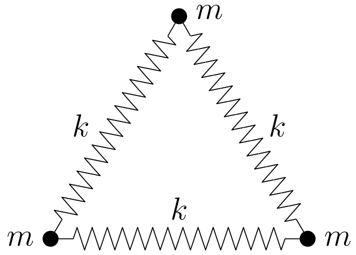

図 2

問 1　各バネが x だけ延びたときの各質点の速さは $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ の何倍か。

問 2　3 つのバネの位置エネルギーの合計 U と 3 つの質点の運動エネルギーの合計 K を求めよ。結果は x, v, m, k を用いて表せ。ただし位置エネルギーは，すべてのバネに伸び縮みがないときに $U = 0$ とする。

問 3　振動の角振動数 ω_1 を求めよ。

[II]　なめらかな水平面上に等しい電荷 q をもった 3 つの粒子 A，B，C が長さ l の絶縁体の伸びない軽い糸でつながれて，一直線に置かれている。両端の粒子 A，C の質量は m，中央の粒子 B の質量は $2m$ である。粒子 B が始めの直線に垂直に微小振動するとしよう。ただし全体としては一方向に移動することなく，重心の位置は不変であるとする。電気定数 (真空の誘電率) を ϵ_0 とする。

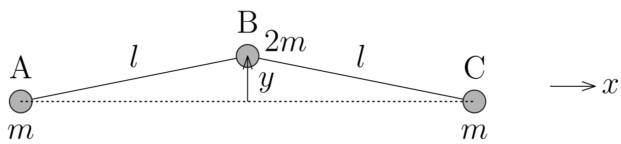

図 3

問 4　図 3 のように粒子 B が粒子 A と C を結ぶ直線から y の位置にあるときの，全体の静電エネルギー (位置エネルギー) U を求めよ。ただし静電エネルギーは $y = 0$ のときに $U = 0$ とする。$|y|$ は l に比べて十分に小さいとして $\dfrac{y}{l}$ の 2 次の項まで求めよ。

[参考]

(1) 2 つの点電荷 q_1，q_2 が距離 d 離れて存在するときの静電エネルギーは次の式で与えられる。

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d}$$

(2) $|x| \ll 1$ のときに次の近似式が成り立つ。α は定数である。

$$(1+x)^{\alpha} \quad 1+\alpha x$$

問 5　空間の定点である重心から粒子 B までの距離 y_{B} と y の関係を求めよ。

問 6　粒子 B の速度を $v_{\mathrm{B}}\left(=\dfrac{\mathrm{d}y_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t}\right)$ とするとき，全体の運動エネルギー K を求めよ。また静電エネルギー (位置エネルギー) U を y_{B} を使って表せ。なお粒子 A，C の x 方向の運動は無視してよい。

問 7　微小振動の角振動数 ω_2 を求めよ。

第１問 B（50 点）

高い山に登ると大気圧の低下と同時に気温も低下することが経験できる。この問題では，最終的に気温の高度依存性の考察を目指す。

この問題では，空気をモル質量 $M = 2.9 \times 10^{-2}$ kg/mol の１種類の２原子分子からなる理想気体として扱う。問題を解くときに必要なら，気体定数 $R = 8.31$ J/(mol·K)，重力加速度の大きさ $g = 9.8$ m/s^2 とせよ。なお第１問 B では，式の中に出てくる Δ がつく量は微小量である。

[I]　まず，上空まで気温は変わらないとして，大気圧の高度変化を考える。

問１　図１のように，地表から鉛直上向きに座標 h をとり，高度 h および $h + \Delta h$ における大気圧をそれぞれ p および $p + \Delta p$ とする。空気の密度を ρ として，高度 h と $h + \Delta h$ の間にある空気の層に働く力の釣り合いの条件から，Δp と Δh の関係を導け。ただし，Δh が十分小さいため，ρ は一定と近似せよ。

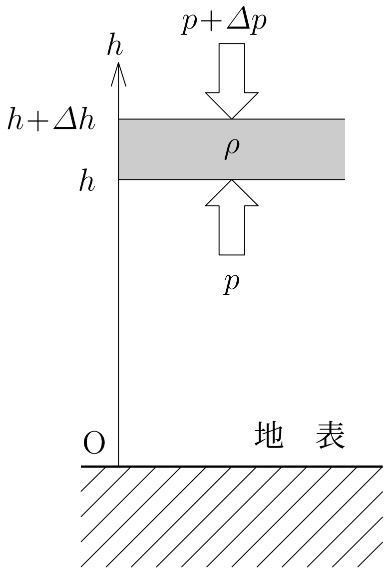

図 1

問２　温度が T のときの理想気体の状態方程式を用い，前問で求めた関係式から次の式を導け。

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\frac{Mg}{RT}\,p \tag{1}$$

(1) 式の右辺は負の値を持つから，これにより，高度とともに気圧が低下することが説明できる。

[II]　地表付近から高さ１万メートル付近までの平均気温は，100 m 上昇するにつれて約 0.6 K 低下する。その原因としては，大気が絶えず上下方向に運動していることが考えられる。

なんらかの理由で n mol の空気のかたまりが上昇して行ったとする。周囲の空気の圧力が [I] で考えたように減少するので，この空気のかたまりはその圧力が周囲と等しくなるように膨張する。このときの膨張は，空気の熱伝導率が小さいので断熱膨張であり，空気のかたまりの温度は上昇するうちに低下する。断熱膨張・圧縮の性質を考えながら気温が高さとともに変わる様子を調べよう。

問 3　空気のかたまりの圧力は p，温度は T で，体積は V である。周囲の圧力が $p+\Delta p$ に，空気のかたまりの体積が $V+\Delta V$ に，空気の温度が $T+\Delta T$ に変わったとする。$\dfrac{\Delta T}{T}$ を $\dfrac{\Delta p}{p}$ および $\dfrac{\Delta V}{V}$ を使って表せ。ただし，Δp も ΔV も小さな量なので，その積が出てきたら，それは無視せよ。

問 4　断熱膨張での $\dfrac{\Delta T}{T}$ と $\dfrac{\Delta V}{V}$ の関係を熱力学第一法則を使って求め，断熱膨張すると空気の温度が低下することを確かめよ。以下，必要があったら，定積モル比熱を C_{v}，定圧モル比熱を C_{p} と表せ。

問 5　問 3 と問 4 の結果を合わせて，断熱過程では

$$\frac{\Delta T}{\Delta p}=\frac{R}{C_{\mathrm{p}}}\cdot\frac{T}{p} \tag{2}$$

が成り立つことを導け。

問 6　空気のかたまりが断熱的に距離 Δh 上昇したとき，気温は

$$\Delta T=-\frac{Mg}{C_{\mathrm{p}}}\,\Delta h \tag{3}$$

というように低下することを導け。

問 7　地表を $h=0$ とし，そこでの温度を T_0 とするとき，高さ h での気温を表す式を導け。また，100 メートル上昇すると気温は何度下がるか（有効数字 2 桁まで求めよ）。ただし空気の定積モル比熱は $C_{\mathrm{v}}=2.5R$ とする。

[III]　[II] で断熱膨張による空気の冷却を考えたとき，空気には通常水蒸気が含まれていて，それが凝縮する際に熱を出すことがあるという事実を無視した。[III] では，空気中の水蒸気が断熱膨張に与える影響について考える。そのために，水蒸気をまったく含まない空気を乾いた空気と呼び，水蒸気を含む通常の空気を湿った空気，あるいは，単に空気と呼ぶことにする。乾いた空気と水蒸気を含む温度 T の湿った空気が体積が V の容器の中に閉じ込められているとする。その容器から水蒸気を取り除いて残った乾いた空気の圧力を乾いた空気の分圧，乾いた空気を取り除いて残った水蒸気の圧力を水蒸気の分圧と呼ぶ。

n mol の湿った空気の圧力が p で，水蒸気の分圧 (水蒸気圧) が p_{w} のとき，この中に含まれる水蒸気の物質量 n_{w} は $\dfrac{p_{\mathrm{w}}}{p}\,n$ である。

空気中の水蒸気の割合が増加すると水蒸気圧も増加するが，熱平衡状態にある空気の水蒸気圧 p_{w} には温度によって決まる上限がある。この上限値を飽和水蒸気圧といい，$p_{\mathrm{s}}(T)$ (s=saturation; 飽和) と表すことにする。$p_{\mathrm{s}}(T)$ は温度 T の単調増加関数である。

ある温度 T の空気があり，その中の水蒸気の分圧がそのときの飽和水蒸気圧より小さく $p_{\mathrm{w}}<p_{\mathrm{s}}(T)$ という関係があったとする。この空気を冷やすと，温度 T の低下とともに $p_{\mathrm{s}}(T)$ が減少を始め，やがて $p_{\mathrm{w}}=p_{\mathrm{s}}(T)$ になる。空気が熱平衡状態にある場合，これ以上温度を下げると余分な水分子が凝縮を始めて水滴ができ，空気中の水蒸気が減少を始める。このとき，水蒸気から凝縮熱が放出される。凝縮熱 Q は凝縮する水蒸気の物質量 $-\Delta n_{\mathrm{w}}$ に比例するから，以下では

$$Q=-L\Delta n_{\mathrm{w}}$$

と表すことにする。L は 1 mol 当たりの凝縮熱という意味を持つ。凝縮熱は外から加えた熱と同じ効果をもつ。

問 8　圧力，温度がそれぞれ p，T の n mol の湿った空気があった。その空気を断熱膨張させたところ，空気の温度と圧力がそれぞれ ΔT および Δp だけ変化し，同時に物質量が $-\Delta n_{\mathrm{w}}$ の水蒸気が凝縮して凝縮熱が出た。このときの ΔT，Δp，Δn_{w} の関係を式で表せ。ただし，水蒸気の物質量 n_{w} は小さいので空気の比熱は乾いた空気のものと等しいとしてよい。

問 9　前問の空気の温度と圧力の変化が水蒸気を飽和状態に保ったまま起こり $p_{\mathrm{w}} = p_{\mathrm{s}}(T)$ の関係が保たれていたとき，Δn_{w} を Δp と ΔT を使って表せ。微小量の 2 次の項は無視してよい。また，水蒸気の物質量は小さいので，モル数 n は変化しないとしてよい。
[ヒント] x の関数 $y(x)$ があるとき，Δx に対して

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \quad \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\,\Delta x$$

と近似できる。

この結果と問 8 で導いた式とから

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{RT}{p\,C_{\mathrm{p}}} \cdot \frac{1 + \dfrac{L}{RT}\cdot\dfrac{p_{\mathrm{s}}}{p}}{1 + \dfrac{L}{C_{\mathrm{p}}T}\cdot\dfrac{p_{\mathrm{s}}}{p}\cdot\dfrac{T}{p_{\mathrm{s}}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}p_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}T}} \tag{4}$$

を得る。この式で水蒸気が凝縮することの効果は L に含まれている。$L = 0$ ならば右辺の 2 番目の因子の値は 1 になるが，L があるためにこの因子は 1 から外れる。外れの大きさによって，水蒸気の凝縮の効果が重要かどうかの判断ができる。

問 10　$L \quad 4 \times 10^4$ J/mol である。空気の断熱膨張に対して，水の凝縮の効果が無視できないことを確かめるために，(4) 式の右辺の 2 番目の因子の値を次のことを仮定して求めよ。
空気は水蒸気を含んでいる場合でも 2 原子分子理想気体として扱い，温度は 17°C，大気圧は 1013 hPa，水蒸気圧は 19.2 hPa（17 ℃での飽和水蒸気圧），$\dfrac{T}{p_{\mathrm{s}}}\dfrac{\mathrm{d}p_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}T} \quad 2 \times 10$ とする。

この問題を解くと，上昇気流の中で空気は断熱膨張して温度が下がるものの，温度が下がるとそれに含まれている水蒸気が凝縮することに伴い放出される凝縮熱によって，温度低下は乾いた空気の半分程度に抑えられることがわかる。

湿った空気が山腹を昇るとき断熱膨張して水蒸気が凝縮すると，空気は乾いた空気となる。乾いた空気が山腹を下りるとき断熱圧縮されるので，この問題の [II] で考えた乾いた空気の断熱膨張の場合の温度降下と同じ大きさの温度上昇があると考えられる。フェーン現象の一つの原因は，山越えの空気では，上昇気流の温度の降下より下降気流の温度上昇の方が大きいことによると考えられている。

第 2 問（100 点）

人体内部には血管が張り巡らされ，そこを流れる血液が身体を作る細胞に酸素や養分を送り届けている。血管は心臓と合わせて循環器と呼ばれる閉じた流体系を成す。血液の循環は医学のみの研究対象ととらえがちであるが，物理法則が成り立つので物理学の研究対象でもある。

[I]　血液はまず心臓の左心室という部分で圧力をかけられ，大動脈と呼ばれる内径が 1.6 − 3.2 cm の 1 本の太い動脈に送り込まれる。大動脈から，上肢，下肢，腹部，頭などへ行く動脈が枝分かれしている。やがて血液は内径が 1 mm 程度の細動脈を経て，最後は毛細血管にしみ出す。その後，静脈系を経て最後に大静脈から心臓の右心房と呼ばれる部分に戻ってくる。

一般にパイプを水などの流体が流れるとき，ある断面を単位時間に通過する流体の体積を流量と呼ぶ。図 1 のように断面積が S のパイプを流速 v で流体が流れるとき，断面 AB を通過した流体は時間 Δt の後には CD に来ていて AB と CD の間の体積は $vS\Delta t$ だから，単位時間に断面 AB を通過する流体の体積すなわち流量 J は $J = vS$ によって計算できる。血流の場合，心臓の拍動 (周期運動) に伴って流れ方が時間変化するから，この関係は $J(t) = v(t)S$ と書く必要がある。その場合でも詳しい時間変化ではなく，拍動の周期より十分長い時間にわたって時間平均した平均流量 $\overline{J}$ や平均流速 $\overline{v}$ について考えれば良い場合が多い。これらの平均値の間には $\overline{J} = \overline{v}S$ の関係が成り立つ。

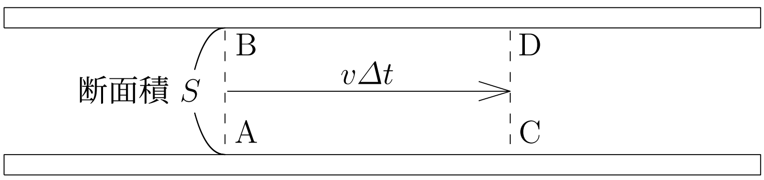

図 1

流体によって運搬される質量，運動量，エネルギーなどの流量も同様に計算できる。例えば，単位体積の流体に含まれるエネルギーの大きさを ρ_{E} とすると，図 2 の 2 つの断面 AB と CD の間にある流体が持つエネルギーは $\rho_{\mathrm{E}} vS\Delta t$ だから，断面 AB を単位時間に通過するエネルギーの大きさは $J_{\mathrm{E}} = \rho_{\mathrm{E}} J$ と計算できる。

次ページの図 2 は 2 つの貯水槽の下部をパイプでつないでこのような流れを作るための装置を示す。貯水槽の水面の高さを変えてパイプの両側の圧力が異なるようにするとパイプの中を圧力の高い方から低い方へ水が流れる。一般に，パイプの中の流量 J は両端の圧力差 Δp に比例し，

$$J = \frac{\Delta p}{R} \tag{1}$$

という形に表すことができる。ここで R は流動抵抗と呼ばれる。流動抵抗は流体の粘性が原因で流れを妨げようとする力が働くことによって生じる。ただし，太いパイプを粘性の小さなさらさらした流体が流れるとき，流動抵抗が無視できる場合がある。そのような流体は一般に完全流体と呼ばれる。

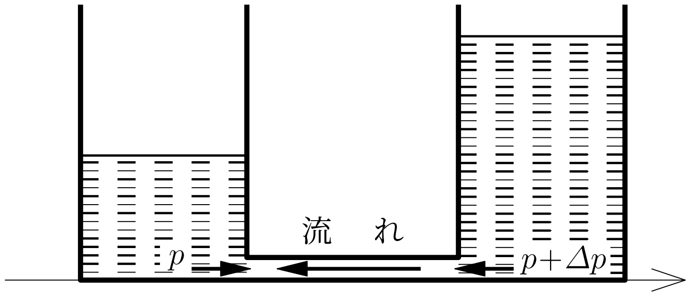

図 2

血液も大動脈を流れるときは近似的に完全流体と考えてよいが，血管が枝分かれして細くなると流動抵抗が無視できなくなる。

なお，必要があったら，以下に示す心臓と血液に関する基本的な物理量のデータを用い，数値的な答えは MKS 単位系を使って表せ。

＝循環器の基本的物理データ＝

(1) 左心室から毎分大動脈に送り出される血液の体積 (これを拍出量という)：5 リットル/分

(2) 左心室から送り出されるときの血液の圧力 * (これを最高血圧あるいは収縮期血圧という)：159 hPa（医療では血圧は mmHg の単位で表されるが，この問題では圧力の単位として hPa を使う。1 mmHg = 1.333 hPa である。）

(3) 心臓の周期運動の 1 分間当たりの回数 (これを心拍数という)：60 回

(4) 血液の密度: $1.06 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$

＊ 第 2 問で考察する管や容器の中の水や血液などの液体の圧力とは，すべて，液体が管や容器を内側から押す圧力から外側の大気圧を差し引いたものである。

問 1　大動脈を流れる血液の平均流量 $\overline{J}$ と平均流速 $\overline{v}$ の値を求めよ。ただし，大動脈の直径を 3.0 cm とせよ。

以下では，簡単のために，血流は拍動に伴う時間的変化をせず，大動脈の入り口での流量とそこでの流速はここで求めた平均値を持ち続けるものとし，その流量を J_0，流速を v_0 と表す。

問 2　大動脈と大静脈の間の血管のネットワークは複雑だが，ここではこれら 2 本の血管の端は，図 3 のように，平均直径が 8 μm で総数が 5×10^9 本の平行な毛細血管で繋がれていると考える。大動脈と大静脈を問 1 で考えた血液が流れるとして，毛細血管中の血液の平均流速 v' と v_0 との比 v'/v_0 の値を求めよ。

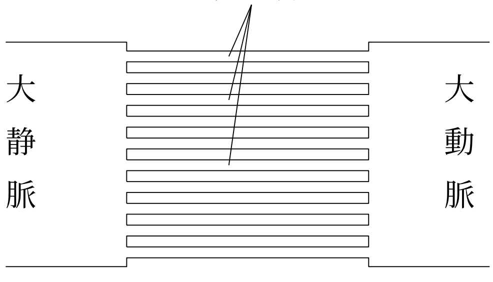

図 3

問 3　図 4(a) は心臓の出口に直結する大動脈の部分で，その弓なりに曲がった形状から大動脈弓と呼ばれる。細い枝が出ているがそれを無視すると，心臓から押し出された血液は図 4(b) のような U 字管を勢いよく通ることになる。心臓から弓部に単位時間に流れ込む血液の平均の運動量 J_P をこれまでに出てきた量の記号と血液の密度 ρ を使って表せ。

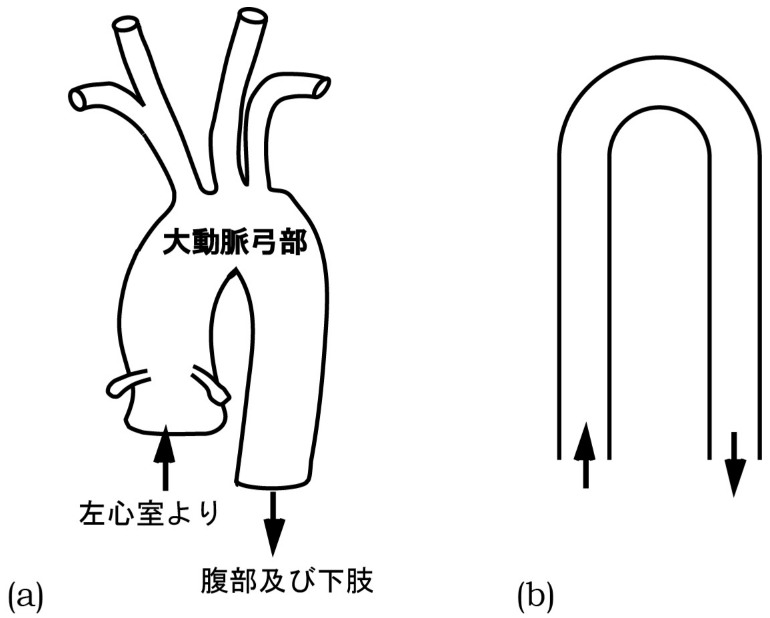

図 4

問 4　大動脈の弓部で血液の流れの向きは 180° 変わるものとする。この血液から血管の湾曲部に加わる力の大きさの値を求めよ。

[II]　ここで，心臓と血管からなる循環器系のモデルとして，次ページの図 5 のような，2 つのポンプを使って水を循環させる配管系を考えてみよう。ただし，心臓と肺の間を往復する経路はこのモデルから省いてある。

水はポンプ 1 によって一定の圧力 p_1 で押し出される。ポンプ 2 の出口にある弁 1 は右向きにしか開かないので，水は弁 2 からパイプ A → B → C → D を通って圧力が p_2 に固定されているポンプ 2 に吸い込まれる。もし，パイプの中の流動抵抗が 0 なら，A と D の間のパイプは水を自由に通す U 字管のようなものだから $p_1 = p_2$ でも水はこの回路を一周できるが，一般には，水は粘性による流動抵抗があるから，$p_1 > p_2$ でないと循環しない。以下では，AB 間と CD 間は比較的パイプが太いので流動抵抗は 0 であるが，BC 間は細いパイプのネットワークになっているために流動抵抗が大きいとする。

やがてポンプ 1 の中の水の体積がある最小値に達する。そのときポンプ 1 のピストンを押す力が突然小さくなりポンプ 1 の中の圧力が p_1 から p_2 より少し低い値に下がる。同時に，弁 1 が右向きに開き，弁 2 が閉じる。そこで，水はポンプ 2 からポンプ 1 へ戻っていく。ポンプ 2 の中の水が空になるとポンプ 1 のピストンに加わる力が再び大きくなりポンプ 1 の中の水の圧力が p_1 になったところではじめの状態に戻る。

これが 1 周期の間の心臓の運動のモデルである。心臓の場合はこの周期を心周期といい，左心室がポンプ 1 の役をし，右心房がポンプ 2 の役をしている。その場合，p_1 に相当する血圧が最高血圧である。

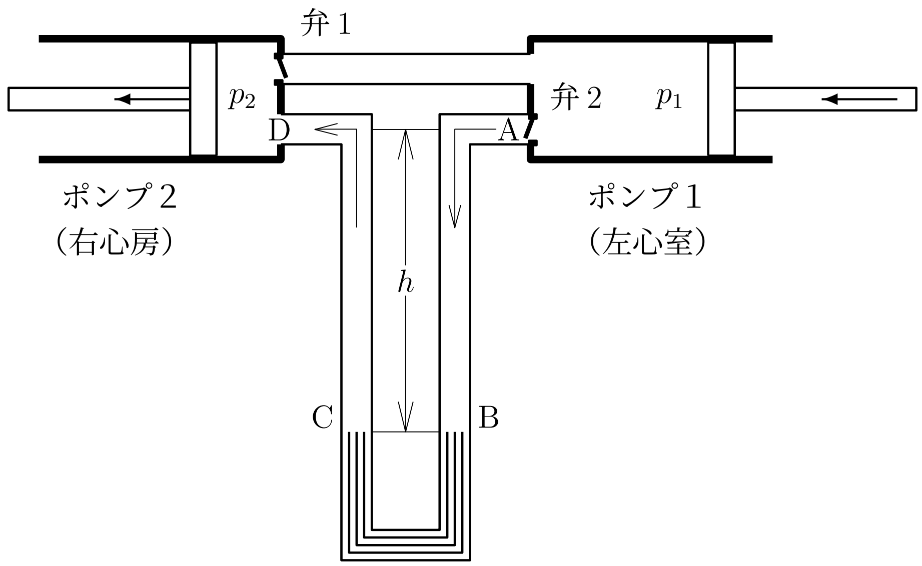

図 5

問 5　ポンプ 1 が圧力 p_1 で水を押し出す間，ポンプ 1 の出口 A から B まで，C からポンプ 2 の入り口 D まで水は一定の同じ速さで流れているとする。これらの出入り口より距離 h だけ鉛直下方にある B 点および C 点での水の圧力はそれぞれいくらか。水の密度を ρ とし，重力加速度の大きさを g とする。

この考察により，血圧の測定値は，それを測る場所と心臓との高さの違いによって変わることが推測できる。

心臓の場合，ポンプ 1 の水の圧力に相当する血液の圧力を左心室内圧と呼び，図 5 のポンプ 1 で水が入っている空間の体積に相当するものを左心室容積と呼ぶ。左心室内圧は図 5 のポンプの場合はピストンが水を押す力によって生じるが実際の心臓では心筋が緊張し収縮することによって生み出される。

このような左心室容積とその内圧の関係を 1 心周期の間で模式的に図示したものが図 6 に示した四角形 ABCD である。心臓のポンプモデルを参考にして，以下の設問に答えよ。

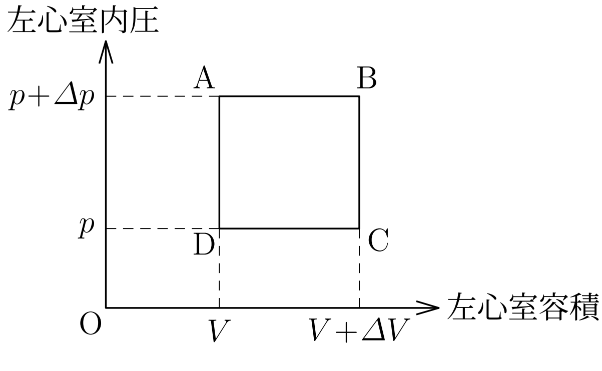

図 6

問 6　左心室が収縮し，血液を大動脈に送り出す過程は長方形 ABCD のどの部分か。時間的経過の向きも含めて答えよ。

問 7　心臓の仕事率を心周期 T と図 6 の中の記号のうち必要なものを用いて表せ。

(1) 式の Δp が左心室の出口と右心房の入り口での血液の圧力差で，J が大動脈に流れ込む血液の平均流量であるとき， R を身体全体の流動抵抗と呼ぶことにする。

問 8　身体全体の流動抵抗を図 6 の中の文字と T を用いて表せ。

[III]　血管壁に異物が付着して血管が細くなることを狭窄（きょうさく）といい，それによる流動抵抗の増大が深刻な循環器病の原因となる。そのようなことが起きたとき有効な治療法として，狭窄が起きた血管に平行に流動抵抗が小さい人工血管（バイパス）を取り付けるという方法がある。

半径が a の円筒型の管の流動抵抗は a^4 に反比例するという法則が知られている (ハーゲン-ポアズイユの法則)。ここでは血管のモデルとして，流動抵抗がこの法則に従うようなパイプをつないで作った図 7(a)，(b)，(c) の 3 種類の管を流れる水について考える。3 本とも左端と右端に加わる圧力の差 Δp によって水が押し流されているとする。

問 9　図 7(a) は，水の流動抵抗が R_0 のパイプを 3 本つなげて作った管である。つなげた管を流れる水の流動抵抗が $3R_0$ になることを導け。

問 10　中央の 1 本のパイプの半径が狭窄により 1/2 になり，その流動抵抗が R_1 になった（図 7(b)）。比 R_1/R_0 の値，および，この管を流れる水の流量 J_b と (a) の場合の流量 J_a との比 $J_\mathrm{b}/J_\mathrm{a}$ の値はいくらか。

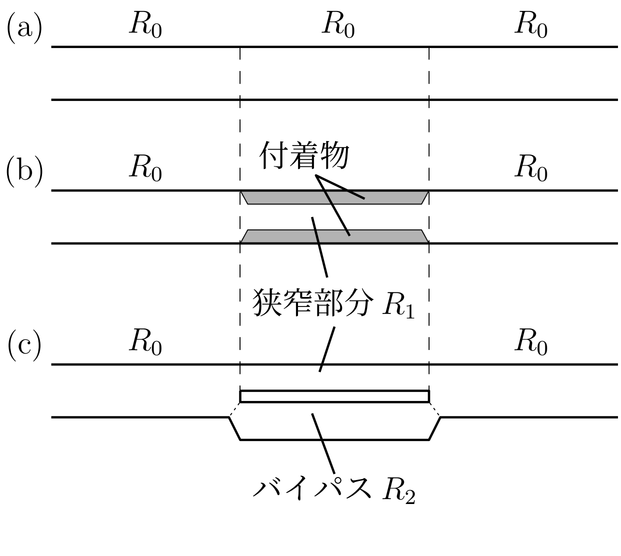

図 7

問 11　全体の流量を回復するためにバイパスのパイプを取り付けることを考える（図 7(c)）。流量が図 7(a) と等しいためにはバイパスの半径を最初のパイプの何倍にしなくてはならないか。小数第 2 位まで答えよ。

[IV]　血管や心臓は，ゴム紐のように引っ張ると伸び，その力を抜くと元の長さに戻るという弾性を持った膜でできている。そこで，弾性体の力学を使って，血圧が血管や心臓にどのような力を加えているかということを考えてみよう。

図 8(a) のように弾性体膜を硬い板の間に張り，板に大きさ F の力を加えて左右に引っ張ったとしよう。このとき板は膜を両側に大きさ F の力で引っ張る。力の向きに垂直な任意の直線 AB の右にある膜の部分は左にある膜の部分を大きさ F の力で右に引き，その反作用として直線 AB の左の膜の部分は右の部分を大きさ F の力で左に引く。図 8 の白丸がついた矢印は，前者の作用点と力の向きを模式的に表し，黒い丸がついた矢印はその反作用を表している。外部から板に力が加わると，このように膜の各部分に互いに引っ張り合う新たな力が生じる。このとき生じた力を弾性体膜の内部応力という。

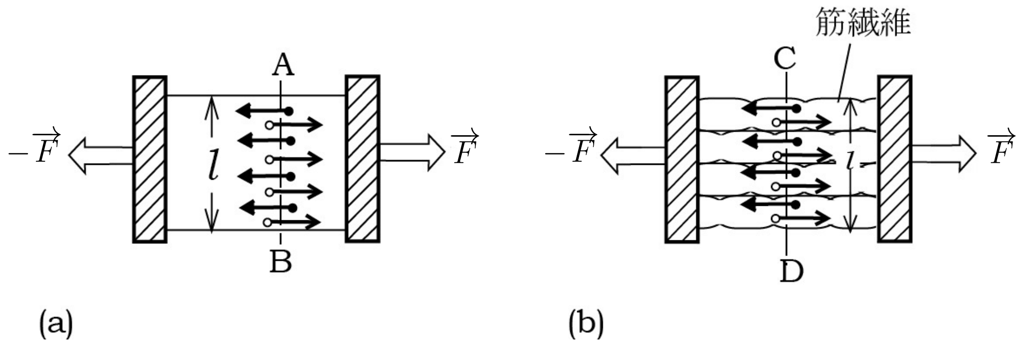

図 8

心臓を囲む膜は，図 8(b) のように筋繊維を並べてできた膜の形をしていて，それらの繊維の中に縮まろうとする力が生じ，直線 CD をはさんで左右の部分が互いに引き合うことがある。その場合，膜をはじめのように広げておくためには，外から左右にある大きさ F の力を加え続けなくてはならない。

どちらの場合も，膜の左右が引き合う力の大きさ F を境界線 AB または CD の長さ l で割って得られる量

$$\alpha = \frac{F}{l}$$

によって引張り応力 α を導入して膜の中に生じる力を特徴付ける。心臓を囲む膜の場合，引張り応力は筋繊維の張力によってもたらされる。

このように，心臓とゴム風船では内部応力が生じる原因が異なるものの共通の力学で議論することができるので，しばらくは次ページの図 9(a) のような半径が r の球形のゴム風船に空気を入れて内側の圧力を外側より Δp だけ高くした場合を考えよう。この Δp が風船を押し広げようとする力とゴム膜に生じる内部応力により元に戻そうとする力の釣り合いから Δp と引張り応力 α の関係が得られる。以下の問に答えよ。

問 12　図 9(a) のようにゴム風船を水平な大円で仮想的に 2 分したとき，上下の半球面がたがいに引き合う力の大きさ F をこの弾性膜に働く引張り応力 α を使って表せ。

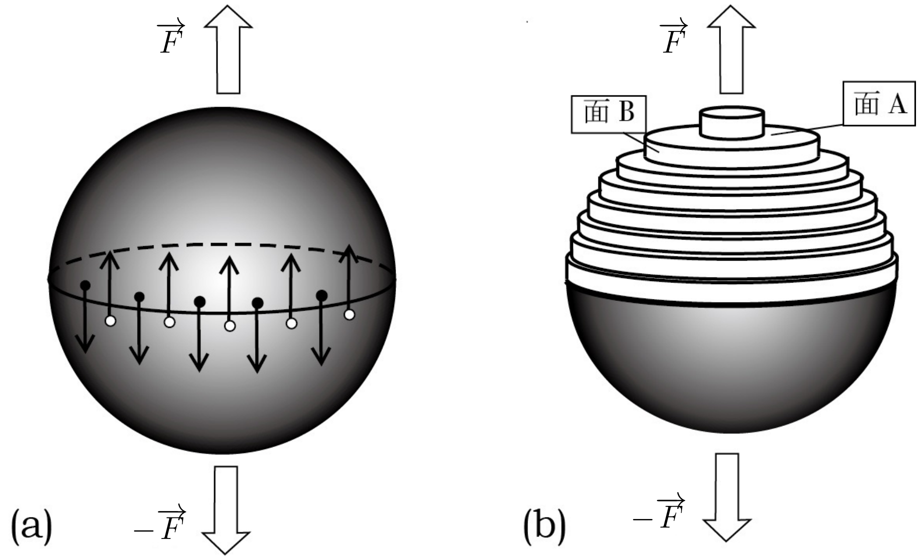

図 9

問 13　風船内部の空気の高い空気圧により風船の上半分が押し上げられる力の大きさを内外の圧力差 Δp を使って表せ。

[ヒント] 図 9(a) の上半球を図 9(b) のような階段状の面で置き換える。この面は面 A のような水平面を底面とし，面 B のような鉛直な側面からなる薄い円柱面を重ね合わせたものである。球の中の圧力が外より Δp だけ高いときにこの階段状の半球に加わる力の和の大きさと向きを考えてみよ。

前 2 問の力が釣合うことから内外の圧力差 Δp とゴム風船に働く引張り応力 α の間に

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{r}$$

という関係が成り立つことが分かる。これはラプラスの法則と呼ばれる。

そこで，このことを利用して，左心室が肥大し心不全症状をきたす拡張型心筋症の心臓で通常の心臓と同じ最高血圧の 159 hPa を維持するために心筋に生じなくてはならない張力について考えよう。左心室が球形の心筋膜で囲まれた風船の構造をしているとして，以下の問に答えよ。

問 14　(a) 球の半径が r から 20%伸びたときの引張り応力の増加率を求めよ。

(b) 筋繊維の数は病的心臓でも，正常な心臓でも同じである。正常血圧を維持するために，その病的心臓が出す力の増加率は筋繊維一本当たりいくらか。

ここで考えた拡張型心筋症とは，通常より心筋が薄く延びてしまい，心臓のポンプ機能が著しく低下する心疾患のことである。その治療法の一つが左室部分切除術 (バチスタ手術) で，その名の通り，肥大した心臓の左心室の 3 分の 1 程度を切除し心臓の形を整える心臓外科手術のことである。「バチスタ手術」という呼び名は，これを考案したブラジル人医師のランダス・バチスタに因んでいる。彼は，上の問題で考えたように左心室の膨らみが大きくなるほど心筋が大きな張力を発生しなくてはならないという物理法則 (ラプラスの法則) を思い出し，心筋症で膨らんだ心臓を小さくすれば筋繊維に掛かる負担が小さくなると考えこの手術を考案した。

これは，医療や生体科学で物理法則が応用できるという端的な例である。

第 3 問（100 点）

[I]　電池と電球を導線でつないでスイッチを入れると電球が光る。導線が長くなったとき，スイッチを入れてから電球が光るまでどのくらいの時間がかかるだろうか。簡単なモデルで考えてみよう。

問 1　導線に電圧をかけると，導線の中で電子が動く。

(a) 導線のある断面を単位時間当たりに通過する電子の数を電子の数密度 n，電子が導線に沿って移動する速さ v，導線の断面積 S を使って表せ。

(b) 銅では $n = 8.5 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$ である。断面積が $1\ \mathrm{mm}^2$ の銅線に 1 A の電流が流れているとき，電子が移動する速さ v はどれだけか。ただし，電子の電荷は -1.6×10^{-19} C である。

もし，スイッチを入れたことが問 1(b) で求めた速さ v で導線を伝わるとすると，導線の長さが ℓ のとき，スイッチを入れてから電球が点くまで $\dfrac{\ell}{v}$ の時間がかかることになりそうである。v の値は意外に小さく，電球が灯るまでの時間がそれほど長いとするのは現実的でない。

[II]　図のような，等間隔 d に保たれた 2 枚のリボン状の金属板を考えよう（以下では，リボン状の金属板を単にリボンという）。リボンの幅 w は間隔 d に比べて十分大きく，リボンの長さ ℓ は w に比べて十分大きいとする。以下では，リボンの一方の断面の中心を原点 O として，長さ方向を x，幅方向を y，リボンに垂直な方向を z とする座標をとる。電気定数（真空の誘電率）を ϵ_0，磁気定数 (真空の透磁率) を μ_0 と表す。

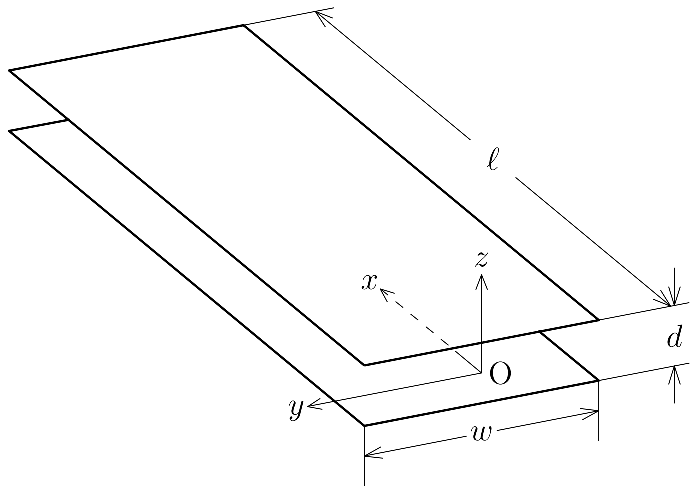

図 1

問 2　(a) 2 枚のリボンからなる平行板コンデンサーについて，長さ方向 (x 方向) の単位長当たりの容量を求めよ。

(b) リボン間の電圧が V のとき，x 方向の単位長当たりに蓄えられているエネルギーを V を用いて表せ。

(c) 電場はエネルギーをもち，電場の大きさが E のときの単位体積当たりのエネルギー（電場のエネルギー密度）が

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

であるとすると，リボンの間の電場の単位長当たりのエネルギーは (b) で求めたエネルギーに等しいことを説明せよ。

図 2 のように，リボンの一方の端 ($x = 0$) に起電力 $\mathcal{E}$ の電池をつなぎ，他方の端に抵抗 R をつけて，電流を往復させる。リボンの抵抗は無視できるとする。

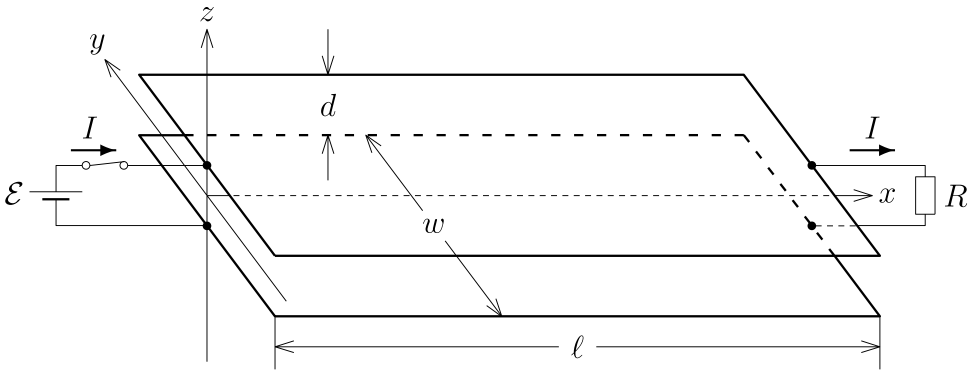

図 2

問 3　このとき単位時間に電池がする仕事を $\mathcal{E}$ と R で表せ。

2 枚のリボンを電流 I が往復すると，リボンの間には磁場が生じる。この磁場は，電流を x 方向の直線電流の集まりと考えて，直線電流の磁場を足し合わせて求めることができる。また，電流はリボンの中で一様であるとする。

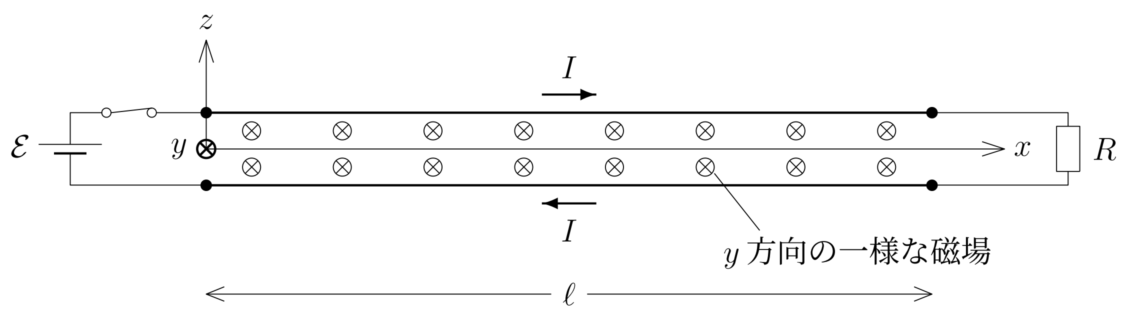

図 3

問 4　2 枚のリボンの中央の点 $\left(\dfrac{\ell}{2}, 0, 0\right)$ の点における磁場が y 軸の正の向きであることを説明せよ。

直線電流の磁場を実際に足し合わせると，点 $\left(\dfrac{\ell}{2}, 0, 0\right)$ における磁束密度の大きさ B は $B = \dfrac{\mu_0 I}{w}$ となる。また，$d \ll w \ll \ell$ なので，2 枚のリボンに挟まれた空間では（端にある狭い領域を除いて），これと同じ y 方向の一様な磁場が生じ，リボンの外側では磁場は 0 であると考えてよい。

問 5　(a) 図 3 のように，電池→上のリボン→抵抗→下のリボン→電池という回路は 1 回巻のコイルとみなせる。そのコイルを貫く磁束は x 方向の長さ ℓ に比例する。このコイルの（x 方向の）単位長当たりの（自己）インダクタンスを求めよ。

(b) 電流 I が往復するとき，x 方向の単位長当たりに蓄えられるエネルギーを I を用いて表せ。

(c) 磁場はエネルギーをもち，磁束密度が B のときの単位体積当たりのエネルギー（磁場のエネルギー密度）が

$$\frac{1}{2\mu_0}B^2$$

であるとすると，リボンの間の磁場の単位長当たりのエネルギーは (b) で求めたエネルギーに等しいことを説明せよ。

問 2(c) と問 5(c) を合わせると，電場が E，磁束密度が B の電磁場の単位体積当たりのエネルギー（電磁場のエネルギー密度）は次の式で与えられることになる。

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

ここで，電場のベクトルが $\overrightarrow{E}$，磁束密度のベクトルが $\overrightarrow{B}$ である点の「ポインティングベクトル」$\overrightarrow{P}$ を

$$\overrightarrow{P} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}$$

により定義する。$\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}$ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{E}$ と $\overrightarrow{B}$ のベクトル積と呼ばれ，電場と磁束密度が直交するときは図 4 のように表せる。$\overrightarrow{P}$ の向きは $\overrightarrow{E}$ から $\overrightarrow{B}$ に回した右ねじの進む向きで，その大きさは $\dfrac{EB}{\mu_0}$ である。

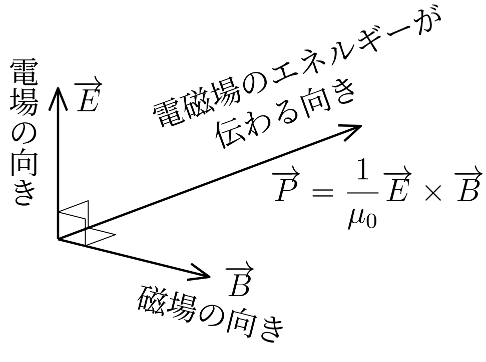

図 4

ポインティングベクトル $\overrightarrow{P}$ は，$\overrightarrow{P}$ に垂直な単位断面積を単位時間に通過する電磁場のエネルギーを表すとされている。図 2 の場合に確かめてみよう。

問 6　図 2 の場合について次を求めよ。

(a) $0 < x < \ell$ において x 軸に垂直な断面におけるポインティングベクトルの向き。

(b) ポインティングベクトルの大きさと，問 3 で求めた単位時間に電池がする仕事との比。

[III]　図2のように電池をつないだ状態では，電池から流れ出るエネルギーが2つのリボンの間を x 軸の向きに流れ続け，抵抗のところで熱に変わることが分かった。それでは，このエネルギーはどのような速さでリボンの間を伝わっていくのだろうか。例えば，はじめに(時刻 $t<0$ では)図3の電池のそばにあるスイッチは開いた状態に置き，$t=0$ にスイッチを入れたとき，電池から出る電場や磁場はリボンの間をどのような速さで伝わるのであろうか。

この場合，向かい合ったリボンの間の電場も磁場もはじめはいたるところ0であったものが，スイッチに近い場所から次第に0でない値に変わっていくのだから，これらの量はすべて場所 x の関数で，その関数の形が時刻 t とともに変化するはずである。その形を求めることを考えよう。そのための基礎的な方程式は2つある。

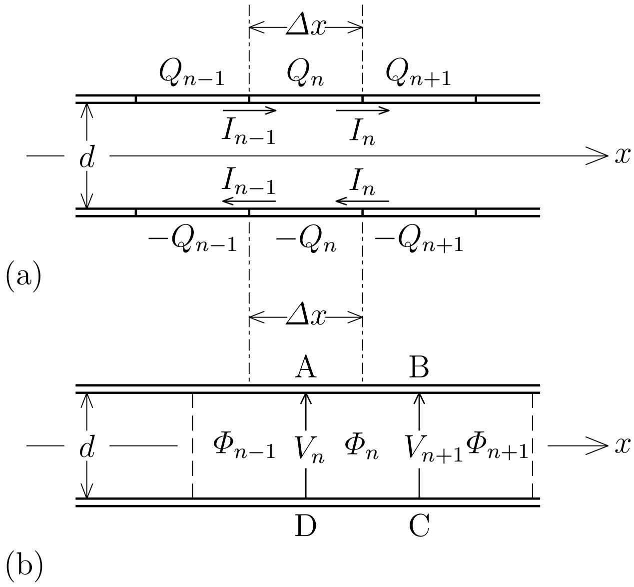

図5

最初の方程式は電気量保存の法則を表したものである。その法則の意味を説明するために，リボンを図5(a)のように，仮想的に間隔 d で向き合った長さ Δx の1対のリボンからなる容量 ΔC の小コンデンサーに分割し，リボンの端から $n=0,\,1,\,2,\,3,\,\cdots$ と番号をつける。n 番目の小コンデンサーの両極板上の電気量を $\pm Q_n$ とし，n 番目のコンデンサーと $(n+1)$ 番目のコンデンサーの間を流れる電流を図5(a)のように I_n と表す。そのとき，ある極板上の電気量の単位時間の増加分は両隣の電極から流れ込む電流の和に等しいというのがこの場合の電気量保存則である。

もう一つの方程式は電磁誘導の法則を表したものである。電磁誘導の法則はしばしばコイルを貫く磁束とコイルに発生する起電力の関係として学ぶが，その起電力は空間の仮想的な閉じた経路に対しても考えることができる。その説明のためにリボンの間の空間を図5(b)のように長さ Δx に分割する。分割してできたそれぞれの空間は四角形ABCDを底面とし長さが w の直方体と同じもので，n 番目の直方体を紙面の表から裏の方へ貫く磁束を Φ_n と表す。この磁束はAからBに向けて流れる電流 I_n (CからDへ流れる同じ強さの電流)に比例する。この比例係数(インダクタンス)を ΔL とする。この Φ_n が増加すると，その増加を妨げる向きに四角形ABCDを底面とする直方体を周回するように起電力が生じ，Aの電位がBより高くなり，Cの電位がDより高くなる。その結果，単位時間当たりの Φ_n の増加分がAD間の電圧 V_n とBC間の電圧 V_{n+1} の差に等しくなるというのがこの場合の電磁誘導の法則である。

以下では，図 5(b) の AB の長さは図 5(a) の小コンデンサーの x 軸に平行な一辺の長さと等しく Δx である。また，図 5(b) の A を図 5(a) の Q_n に帯電している極板の中央に一致させ，その位置を $n\Delta x$ として x 座標の代わりに使う。

なお以下の問題は，「等価回路」を用いて考えることもできる。まず，リボンが小コンデンサーの集まりであることから，電気容量が ΔC の多数のコンデンサーの並列結合を考える。次に，微小部分の上と下を流れる電流によりリボンの間に磁束密度が生じることを表すインダクタンス ΔL を，上下に分けて $\dfrac{\Delta L}{2}$ のコイルの直列接続を組み込む。こうして，リボンの物理的な特性と数学的に等価な特性をもった図 6 のような電気回路を考えることができる。以下の問題はこれを使って解いてもよい。

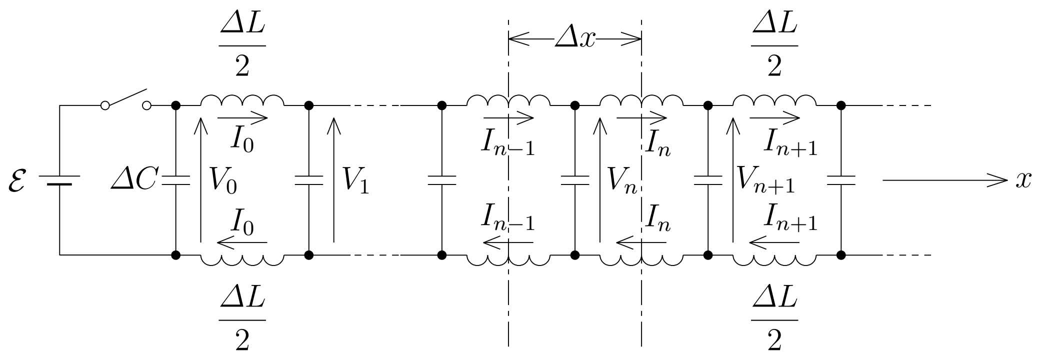

図 6

問 7　上で述べた電気量保存の法則と電磁誘導の法則から

$$I_{n-1}(t) - I_n(t) = \Delta C\,\frac{\mathrm{d}V_n(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (n \geqq 1) \tag{1}$$

$$V_n(t) - V_{n+1}(t) = \Delta L\,\frac{\mathrm{d}I_n(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

が導かれることを説明せよ。

問 8　連立方程式 (1)，(2) から $I_n(t)$ を消去して，$V_n(t)$ についての次の方程式を導け。

$$[V_{n+1}(t) - V_n(t)] - [V_n(t) - V_{n-1}(t)] = \Delta C\Delta L\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}V_n(t) \tag{3}$$

問 9　問 2(a)，問 5(a) の結果および ϵ_0 と μ_0 を含む次の関係（c は光速）

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

を用いると，

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta C\Delta L}} = c$$

となることを説明せよ。ここで，ΔL の式を求める際には，Φ_n を構成する磁束密度 B_n は問 5(a) で用いた式と同様に $B_n = \dfrac{\mu_0 I_n}{w}$ としてよい。

問 10　方程式 (3) の解 $V_n(t)$ の候補として $p = ct - n\varDelta x$ の任意の関数 $f(p)$ を考えると，$f(p)$ は方程式 (3) を $(\varDelta x)^2$ の精度で近似的に満たすことを説明せよ。ただし，$\varDelta x$ が微小であるから，(3) 式の左辺では，微小量 a についての展開式

$$f(A+a) = f(A) + a\frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}A} + \frac{1}{2}a^2\frac{\mathrm{d}^2 f(A)}{\mathrm{d}A^2} + \cdots$$

を用いることができることに注意せよ。

同様に，$q = ct + n\varDelta x$ の任意の関数 $g(q)$ も方程式 (3) を近似的に満たすことが示される (また，$I_n(t)$ に対しても (3) 式と同じ形の方程式が成り立つ)。したがって，連立方程式 (1), (2) の解は任意関数 f，g を用いて

$$V_n(t) = f(ct - n\varDelta x) + g(ct + n\varDelta x) \tag{4}$$

と近似的に表される。

図 5(a)，5(b) (または図 6) で，時刻 $t < 0$ では，V_n，I_n はすべて 0 であるとする。時刻 $t = 0$ に，$x = 0$ の端に起電力 $\mathcal{E}$ の電池をつなぐと，$n = 0$ の小コンデンサーの電圧は 0 から $\mathcal{E}$ に変化する。電圧の変化が x 軸の正方向に伝わっている間は，連立方程式 (1), (2) の解は

$$V_n(t) = f(p) = f(ct - n\varDelta x) \tag{4$'$}$$

で与えられる。

問 11　(a) (2) 式を t について積分し，$t = 0$ では $I_n = 0$ であることを用いると，次式が得られる。

$$I_n(t) = \frac{1}{\varDelta L}\int_0^t \mathrm{d}t\,[V_n(t) - V_{n+1}(t)]$$

$\varDelta x$ は微小量として，これから $t > 0$ における電流 $I_n(t)$ を求めよ。

(b) 電圧・電流が変化した後には，

$$\frac{V_n(t)}{I_n(t)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,\frac{d}{w}$$

であることを説明せよ。

さて，実際はリボンは連続につながっているのに，電気量保存則と電磁誘導の法則を使うのに便利なように，図 5(a) のように小コンデンサーに分けて考えた。そのために (4$'$) 式には不連続な量 $n\varDelta x$ が入ってきてしまった。そこで，元のリボンの上に連続に分布する点での電圧として，(4$'$) 式の代わりに

$$V(x,t) = f(ct - x) \tag{5}$$

という表式を使えばよい。

f の具体的な形は数学的には決まらず，$x = 0$ に加える信号の物理的考察によって決めなくてはならない。まず，図 2 のスイッチは $t = 0$ に入れたので，スイッチの位置を $x = 0$ とすると，$V(0,t)$ は図 7 のように変化するということに注意する。

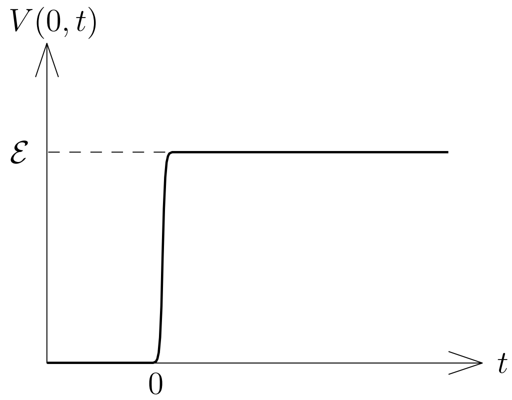

図 7

問 12　$V(x,t) = f(ct - x)$ だったとする。$V(0,t)$ が $t > 0$ で図 7 のように変化するとき，ある時刻 $t > 0$ の $V(x,t)$ を x の関数としてグラフに表し，それを使って，$V(x,t) = \mathcal{E}$ の領域が x 軸の向きに速さ c で進むことを説明せよ。

問 13　(a) 電圧・電流の変化が伝わった後では，電場のエネルギー密度と磁場のエネルギー密度は等しいことを説明せよ。

(b) 電圧・電流の変化が伝わった後におけるポインティングベクトルを求め，ポインティングベクトルの大きさが，(a) で求めた電磁場のエネルギー密度と速さ c の積に等しいことを説明せよ。

全体をまとめると，簡単化したモデルについての考察であったが，スイッチが入ったという信号 ($x = 0$ における電圧あるいは電流の変化) は，問 1(b) で求めたような導線の中の電子の移動速度ではなく，光速 c で伝わり，電磁場のエネルギーがポインティングベクトルとして同じ速度 c で伝わることが分かった。したがって，電球が灯るまでの時間の導線の長さ依存性は $\dfrac{\ell}{c}$ である。さらに図 2 において，終端 (右端) の抵抗 R が問 11(b) で与えた電圧と電流の比に等しく設定されているときには，その比を乱されることがないので，x 方向に進んでいった電磁波のエネルギーは抵抗 R に完全に吸収されて反射は起こらない。これは整合 (マッチング) と呼ばれていて，実際の高周波回路 (例えばテレビのアンテナ線，オシロスコープの信号線) の接続などに活用されている。

[参考]

真空中の光速度	$c = 2.99792458 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$
磁気定数	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ 　 $1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{H/m}$ (または $\mathrm{N/A^2}$)
電気定数	$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2}$ 　 $8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$