物理チャレンジ 2015

第 1 問 A　解答用紙　1/2　**第 2 チャレンジ番号** |　|　|　|　氏名 ________

問 1　6 点

バネが x だけ伸びたとき質点は対称軸の方向に $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ だけ変位するから速度は $\dfrac{v}{\sqrt{3}}$ である。

質点の速さは v の $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ 倍

問 2　8 点

位置エネルギー $U = \dfrac{1}{2}kx^2 \times 3 = \dfrac{3}{2}kx^2$

運動エネルギー $K = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 \times 3 = \dfrac{1}{2}mv^2$

$U = \boxed{\dfrac{3}{2}kx^2}$，$K = \boxed{\dfrac{1}{2}mv^2}$

問 3　7 点

$U = \dfrac{1}{2}k'x^2$ と置くと $k' = 3k$ であるから $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k'}{m}} = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

$\omega_1 = \boxed{\sqrt{\dfrac{3k}{m}}}$

問 4　7 点

AC 間の距離は $2\sqrt{l^2 - y^2}$，AB 間，BC 間の距離は一定であるから，AC 間の静電エネルギーだけ考えればよい。$y = 0$ で $U = 0$ となるように基準を選ぶと

$$U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2\sqrt{l^2 - y^2}} - \frac{1}{2l}\right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 l}\left\{\left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right)^{-1/2} - 1\right\} \cong \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^3}\,y^2$$

$U = \boxed{\dfrac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^3}\,y^2}$

解答合計　　点

第 1 問 A　解答用紙　2/2　**第 2 チャレンジ番号**　|　|　|　氏名 ________

問 5　7 点

重心位置を y 座標の原点，粒子 B の y 座標を y_{B} とすると，粒子 A と C の y 座標はともに $y_{\mathrm{B}}-y$ である。重心位置が原点にあることから

$$2my_{\mathrm{B}}+m(y_{\mathrm{B}}-y)\times 2=0$$

したがって $y_{\mathrm{B}}=\dfrac{1}{2}y$

y_{B} と y の関係式　$\boxed{y_{\mathrm{B}}=\dfrac{1}{2}y}$

問 6　8 点

粒子 A，C の y 座標はともに $-y_{\mathrm{B}}$ であるから，その速度は $-v_{\mathrm{B}}$ である。したがって運動エネルギーは

$$K=\frac{1}{2}(2m){v_{\mathrm{B}}}^2+\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2\times 2=2m{v_{\mathrm{B}}}^2$$

位置エネルギーは

$$U=\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^3}y^2=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^3}{y_{\mathrm{B}}}^2$$

$K=\boxed{2m{v_{\mathrm{B}}}^2}$，$U=\boxed{\dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^3}{y_{\mathrm{B}}}^2}$

問 7　7 点

$K=\dfrac{1}{2}m_{\mathrm{eff}}{v_{\mathrm{B}}}^2$，$U=\dfrac{1}{2}k{x_{\mathrm{B}}}^2$ と置くと $m_{\mathrm{eff}}=4m$，$k=\dfrac{q^2}{2\pi\epsilon_0 l^3}$ であるから

$$\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{eff}}}}=\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 ml^3}}$$

$\omega_2=\boxed{\sqrt{\dfrac{q^2}{8\pi\epsilon_0 ml^3}}}$

解答合計
点

第1問B　解答用紙　1/4　**第2チャレンジ番号**　|　|　|　氏名 ____________

問1　4点

高度 h と $h+\Delta h$ の間にあり底辺が単位面積の空気の塊に働く重力は $\rho g \Delta h$ だから，力の釣り合いの条件は

$$(p+\Delta p)+\rho g \Delta h = p$$

これより

$$\Delta p = -\rho g \Delta h$$

Δp と Δh の関係は $\boxed{\Delta p = -\rho g \Delta h}$

問2　5点

n mol の理想気体の状態方程式より，その体積は,

$$V = \frac{nRT}{p}$$

したがって，空気の密度は

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{pM}{RT}$$

これと前問の結果から,

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT}\,p$$

問3　5点

空気は理想気体と考えているから理想気体の状態方程式が成り立つ。n mol の空気の場合，問題の状態変化の前後で

$$pV = nRT \qquad \text{(a)}$$

$$(p+\Delta p)(V+\Delta V) = nR(T+\Delta T) \qquad \text{(b)}$$

(b) 式から (a) 式を辺々引き，左辺から出てくる $\Delta p \Delta V$ を無視すると,

$$p\Delta V + V\Delta p = nR\Delta T$$

この等式を (a) 式で辺々割ると

$$\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \boxed{\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta p}{p}}$$

解答合計
点

第 1 問 B　解答用紙　2/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名

問 4　5 点

熱力学第一法則 $\varDelta U = Q + W$ に $\varDelta U = nC_{\mathrm{v}}\varDelta T$，$Q = 0$，$W = -p\varDelta V$ を代入すると，

$$nC_{\mathrm{v}}\varDelta T = -p\varDelta V$$

両辺を T で割ると

$$nC_{\mathrm{v}}\frac{\varDelta T}{T} = -\frac{p}{T}\varDelta V = -nR\frac{\varDelta V}{V} \quad \text{すなわち} \quad C_{\mathrm{v}}\frac{\varDelta T}{T} = -R\frac{\varDelta V}{V}$$

空気が膨張するとき，最右辺は負の値を持つから $\varDelta T < 0$ であり，断熱膨張すると空気の温度が低下することがわかる。

問 5　5 点

$$\frac{\varDelta T}{T} = \frac{\varDelta V}{V} + \frac{\varDelta p}{p}$$

と

$$C_{\mathrm{v}}\frac{\varDelta T}{T} = -R\frac{\varDelta V}{V}$$

から $\varDelta V$ を消去すると，

$$C_{\mathrm{v}}\frac{\varDelta T}{T} = -R\left(\frac{\varDelta T}{T} - \frac{\varDelta p}{p}\right)$$

$C_{\mathrm{v}} + R = C_{\mathrm{p}}$ を使って整理すると，(2) 式 $\left[\dfrac{\varDelta T}{\varDelta p} = \dfrac{RT}{pC_{\mathrm{p}}}\right]$ が導かれる。

問 6　5 点

問 2 の (1) 式より，

$$\varDelta p = -\frac{Mg}{RT}\,p\varDelta h$$

これを問 5 の (2) 式から求まる

$$\varDelta T = \frac{RT}{pC_{\mathrm{p}}}\,\varDelta p$$

の右辺に代入すると，

$$\varDelta T = -\frac{RT}{pC_{\mathrm{p}}}\,\frac{Mg}{RT}\,p\varDelta h = -\frac{Mg}{C_{\mathrm{p}}}\,\varDelta h$$

解答合計

点

第 1 問 B　解答用紙　3/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　　氏名 ________

問 7　　6 点

(3) 式に $\Delta T = T - T_0$，$\Delta h = h$ を代入すると，

$$T = -\frac{Mg}{C_\mathrm{p}}\,h + T_0$$

また $\Delta h = 100$ m のとき

$$\Delta T = -\frac{2.9\times10^{-2}\,\mathrm{kg/mol}\times 9.8\,\mathrm{m/s^2}}{3.5\times 8.31\,\mathrm{J/(mol\cdot K)}}\times 100\,\mathrm{m} = -0.98\,\mathrm{K}$$

高さ h での気温 $T =$ $-\dfrac{Mg}{C_\mathrm{p}}\,h + T_0$ ，100 m での気温の低下 0.98 K

問 8　　5 点

蒸発熱 Q があるときの熱力学第一法則は

$$nC_\mathrm{v}\Delta T = Q - p\Delta V$$

となる。ここで ΔV は空気の体積変化。$Q = -L\Delta n_\mathrm{w}$ を代入して

$$nC_\mathrm{v}\Delta T = -L\Delta n_\mathrm{w} - p\Delta V$$

問 3 で求めた関係

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

を使って ΔV を消去すると

$$nC_\mathrm{v}\Delta T = -L\Delta n_\mathrm{w} + V\Delta p - nR\Delta T$$

$C_\mathrm{v} + R = C_\mathrm{p}$ の関係を使って

$$nC_\mathrm{p}\Delta T = -L\Delta n_\mathrm{w} + V\Delta p \quad \text{あるいは} \quad nC_\mathrm{p}\Delta T = -L\Delta n_\mathrm{w} + \frac{nRT}{p}\Delta p$$

ΔT，Δp，Δn_w の関係式　$nC_\mathrm{p}\Delta T = -L\Delta n_\mathrm{w} + V\Delta p$

解答合計　　点

問 9　5 点

始めの水蒸気の物質量は

$$n_\mathrm{w} = \frac{p_\mathrm{w}}{p}n = \frac{p_\mathrm{s}(T)}{p}\,n$$

温度変化するにもかかわらず水蒸気が飽和したままであるなら，その間に水蒸気の物質量が $n_\mathrm{w} + \varDelta n_\mathrm{w}$ と変化しなくてはならない。しかし，n は一定としてよいから，

$$n_\mathrm{w} + \varDelta n_\mathrm{w} = \frac{p_\mathrm{s}(T+\varDelta T)}{p+\varDelta p}\,n$$

辺々引き算をすると

$$\varDelta n_\mathrm{w} = \left[\frac{p_\mathrm{s}(T+\varDelta T)}{p+\varDelta p} - \frac{p_\mathrm{s}(T)}{p}\right] n = \left[\frac{p\,p_\mathrm{s}(T+\varDelta T) - p_\mathrm{s}(T)\,(p+\varDelta p)}{(p+\varDelta p)p}\right] n$$

分子は

$$p_\mathrm{s}(T+\varDelta T) - p_\mathrm{s}(T) \quad \frac{\mathrm{d}p_\mathrm{s}(T)}{\mathrm{d}T}\,\varDelta T$$

と近似すると，微小量 $\varDelta T$ と $\varDelta p$ に比例する項の和になる。そこで，分母の微小量 $\varDelta p$ は無視する。その結果,

$$\varDelta n_\mathrm{w} = \left[\frac{1}{p}\,\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{s}(T)}{\mathrm{d}T}\,\varDelta T - \frac{p_\mathrm{s}(T)}{p^2}\,\varDelta p\right] n$$

が得られる。

$$\varDelta n_\mathrm{w} = \boxed{\left[\frac{1}{p}\,\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{s}(T)}{\mathrm{d}T}\,\varDelta T - \frac{p_\mathrm{s}(T)}{p^2}\,\varDelta p\right] n}$$

問 10　5 点

$$\frac{1 + \dfrac{4\times 10^4\,\mathrm{J/mol}\times(19.2/1013)}{8.31\,\mathrm{J/(mol{\cdot}K)}\times 290\,\mathrm{K}}}{1 + \dfrac{4\times 10^4\,\mathrm{J/mol}\times(19.2/1013)}{3.5\times 8.31\,\mathrm{J/(mol{\cdot}K)}\times 290\,\mathrm{K}}\times 20} = \frac{1+0.31}{1+1.80} = \frac{1.31}{2.80} = 0.47$$

したがって，断熱膨張による温度の低下は乾いた空気のみとしたときの半分程度になる。

なお，分子の有効数字は 2 桁，分母の有効数字は 1 桁 (ないし 2 桁) であるから，答えの有効数字は 1 桁 (ないし 2 桁)。

（有効数字の扱いについては大きく減点しない。）

因子の値　0.5　(0.47 も可)

解答合計　点

第 2 問　解答用紙　1/4　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ______________

問 1　10 点

データ (1) の拍出量を 1 s あたりに換算して，

$$\overline{J} = 5.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \div 60\,\mathrm{s} = 8.33 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

大動脈の断面積 $S = \pi(3.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}/2)^2$ と平均流速を使うと

$$\overline{J} = 8.33 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} = \overline{v}S$$

これを $\overline{v}$ について解いて

$$\overline{v} = \frac{\overline{J}}{S} = \frac{8.33 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{3.14 \times (1.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} = 1.18 \times 10^{-1}\,\mathrm{m/s}$$

有効数字に注意して

$\overline{J} = \boxed{8 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}$，　$\overline{v} = \boxed{1 \times 10^{-1}\,\mathrm{m/s}}$

問 2　6 点

毛細血管の全断面積を S'，そこでの平均流速を v' とすると，毛細血管の全流量は $v'S'$。これが 1 本の大動脈での J_0 と等しいとして，

$$v' = \frac{1}{S'} \times J_0 = \frac{3.14 \times (1.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2 v_0}{3.14 \times (4.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m})^2 \times 5 \times 10^9} = 2.81 \times 10^{-3} v_0$$

$$\therefore\ \frac{v'}{v_0} = 2.81 \times 10^{-3}$$

有効数字に注意して

$\dfrac{v'}{v_0} = \boxed{3 \times 10^{-3}}$

問 3　6 点

血液の密度を ρ とすると，単位体積中の血液の運動量は ρv_0。その血液が流量 J_0 で流れるとき，単位時間にある断面を通過する運動量は $J_P = \rho v_0 J_0$ あるいは $= \rho {v_0}^2 S$。

$J_P = \boxed{\rho v_0 J_0 \text{ あるいは } \rho {v_0}^2 S}$

問 4　6 点

単位時間に弓部に流れ込む運動量は前問で求めた。弓部で進行方向が 180° 変わって出て行く運動量はそれと大きさは等しく向きが反対。従って，弓部での単位時間当たりの運動量変化は前問で求めたものの 2 倍。これが血管から血液が単位時間に受ける力積だから，血液が受ける力 F。したがって

$$F = 2\rho v_0 J_0 = 2 \times 1.06 \times 10^3\,\mathrm{kg/m}^3 \times 1.18 \times 10^{-1}\,\mathrm{m/s} \times 8.33 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$
$$= 2.08 \times 10^{-2}\,\mathrm{N}$$

有効数字に注意して

力の大きさ $\boxed{2 \times 10^{-2}\,\mathrm{N}}$

解答合計
点

第2問　解答用紙　2/4　**第2チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問5　10点

AB間の水に働く力は上向きを正として，$(p_{\mathrm{B}}-p_1)S-\rho ghS$。CD間の水に働く力は $(p_{\mathrm{C}}-p_2)S-\rho ghS$。水が等速で流れていることから，この2つの力は，それぞれ，0。ゆえに，

$$p_{\mathrm{B}}=p_1+\rho gh,\quad p_{\mathrm{C}}=p_2+\rho gh$$

B点の圧力 $p_{\mathrm{B}}=$ $\boxed{p_1+\rho gh}$，C点の圧力 $p_{\mathrm{C}}=$ $\boxed{p_2+\rho gh}$

問6　6点

収縮期の血圧は残りの期間より高いことと収縮期では左心室容積は減少していくことから，B → A

血液を大動脈に送り出す過程は $\boxed{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$

問7　6点

左心室内圧(あるいはピストン1の圧力)を $(p+\mathit{\Delta}p)$ に保ったままその容積が $(V+\mathit{\Delta}V)$ から V に減少する間に左心室がする仕事は，$(p+\mathit{\Delta}p)\mathit{\Delta}V$。左心室内圧を p に保ったまま左心室容積が V から $V+\mathit{\Delta}V$ まで増加する間に左心室がされる仕事は $p\mathit{\Delta}V$。したがって，1心周期に左心室がする仕事 $\mathcal{W}$ は

$$\mathcal{W}=(p+\mathit{\Delta}p)\mathit{\Delta}V-p\mathit{\Delta}V=\mathit{\Delta}V\mathit{\Delta}p$$

これを心周期で割って仕事率は，

$$\frac{\mathcal{W}}{T}=\frac{\mathit{\Delta}V\mathit{\Delta}p}{T}$$

心臓の仕事率 $\boxed{\dfrac{\mathit{\Delta}V\mathit{\Delta}p}{T}}$

問8　6点

心臓から大動脈に流れ込む血液の平均流量 J は $J=\dfrac{\mathit{\Delta}V}{T}$ と書ける。一方定義により，

$$R=\frac{\mathit{\Delta}p}{J}$$

この2つから J を消去すると，

$$R=\frac{\mathit{\Delta}p}{(\mathit{\Delta}V/T)}=T\,\frac{\mathit{\Delta}p}{\mathit{\Delta}V}$$

$R=$ $\boxed{T\,\dfrac{\mathit{\Delta}p}{\mathit{\Delta}V}}$

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　3/4　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ________________

問 9　6 点

この管の流量を J とすると，流動抵抗が R_0 のパイプの両端に加わる圧力は JR_0。3 本のパイプつながってできた管の両端に加わる圧力はこれらを加え合わせた $\Delta p = 3JR_0$。したがって，つながった管の流動抵抗は

$$R = \frac{3JR_0}{J} = 3R_0$$

問 10　10 点

(b) に流量 J_b の流れがあるとする。中央の $\frac{1}{3}$ の狭窄部分の流動抵抗が R_1 なら，その両端の圧力差は $R_1 J_\mathrm{b}$。したがって左端と右端の間の圧力差は $(R_1 + 2R_0)J_\mathrm{b}$。故に全体の流動抵抗は

$$R = \frac{(R_1 + 2R_0)J_\mathrm{b}}{J_\mathrm{b}} = R_1 + 2R_0$$

$R_1 = 2^4 R_0$ だから，$R = 18R_0$。したがって，

$$\frac{J_\mathrm{b}}{J_\mathrm{a}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

$\frac{R_1}{R_0} =$ 16 ，$\frac{J_\mathrm{b}}{J_\mathrm{a}} =$ $\frac{1}{6}$

問 11　6 点

流量が J_a に回復したときの中央の上下のパイプの流量を J_1 および J_2 とすると，

$$J_1 + J_2 = J_\mathrm{a} = \frac{\Delta p}{3R_0}$$

このとき中央の $\frac{1}{3}$ に加わる圧力も $\frac{\Delta p}{3}$ だから，

$$\frac{\Delta p}{3} = R_1 J_1 = R_2 J_2$$

が成り立つ。これらから J_1 と J_2 を消去すると，

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_0}$$

これを解いて，$R_1 = 2^4 R_0$ を代入すると，

$$R_2 = \frac{R_1 R_0}{R_1 - R_0} = \frac{16{R_0}^2}{15R_0} = \frac{16}{15}R_0$$

バイパスの半径を a' とすると $\frac{R_2}{R_0} = \frac{a^4}{a'^4}$ だから，

$$\frac{a'}{a} = \left(\frac{15}{16}\right)^{1/4} = 0.98$$

これより，バイパス用パイプは最初のパイプとほとんど太さが変わらないということが分かる。

バイパス用パイプの半径は最初のパイプの 0.98 倍

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　4/4　**第 2 チャレンジ番号**　　氏名

問 12　6 点

大円を挟んで引っ張り合う力は引っ張り応力と大円の円周の積だから，

$$F = 2\pi r\alpha$$

$F =$ $2\pi r\alpha$

問 13　6 点

面 B のような鉛直面に加わる力は場所によって 360° 変化するから，その和は互いに消しあう。面 A のような水平面は大円上に投影すると，ちょうど大円を埋め尽くすから，総面積は πr^2 。面 A に働く力は全て上向きだから，その和は上向きで大きさは $\pi r^2 \Delta p$ となる。

押し上げる力の大きさ　$\pi r^2 \Delta p$

問 14　10 点

(a) 血圧と引張り応力の関係はラプラスの法則より決まる。球の半径 r が 20%増加したにもかかわらず血圧が変わらないためには，α も同じ比率で増加しなくてはならないから，引張り応力の増加率は 20%

(b) $F = 2\pi r\alpha$ の r と α が 20%増加するから，

$$\Delta F = 2\pi r\alpha(1 + 0.2)^2 - 2\pi r\alpha = 0.44 \times 2\pi r\alpha$$

この増加した力を正常の大きさの心臓と同じ本数の心筋繊維が出さなくてはならないので 1 本の心筋繊維が出す張力は正常な筋繊維の 44%増。

または，問 13 の解で，r が 20%増加し，筋繊維の数は変わらないから，44%増。

(a) 引張り応力の増加率　20　%

(b) 筋繊維 1 本当たりの力の増加率　44　%

解答合計　　点

物理チャレンジ 2015

第 3 問　解答用紙　1/5　**第 2 チャレンジ番号**　|　|　|　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問 1　8 点

(a) 体積 vS の中の電子が通過するから，nvS

(b) 電子の電荷を $-e$ とすれば，電流の大きさは $envS$. したがって，$v = \dfrac{I}{enS}$.

$$v = \frac{1\,\mathrm{A}}{1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times8.5\times10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}\times(1\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2} = 7.4\times10^{-5}\,\mathrm{m/s}$$

有効数字は 1 桁。

(a) 電子の数 $\boxed{nvS}$ ，(b) $v = \boxed{7\times10^{-5}\ \mathrm{m/s}}$

問 2　8 点

(a) $\dfrac{\epsilon_0 w}{d}$

(b) $\dfrac{1}{2}\dfrac{\epsilon_0 w}{d}V^2$

(a) 単位長当たりの電気容量 $\boxed{\dfrac{\epsilon_0 w}{d}}$ ，(b) 単位長当たりのエネルギー $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{\epsilon_0 w}{d}V^2}$

(c) 長さ方向の単位長あたりのリボン間の体積は wd だから電場のエネルギーは $\dfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \times wd$

$E = \dfrac{V}{d}$ に注意すれば，$\dfrac{1}{2}\dfrac{\epsilon_0 w}{d}V^2 = \dfrac{1}{2}\epsilon_0 wdE^2$

問 3　7 点

電流は $\dfrac{\mathcal{E}}{R}$ であるから単位時間当たりの仕事 (電力) は

$$\mathcal{E}\cdot\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

である。

電池がする仕事 $\boxed{\dfrac{\mathcal{E}^2}{R}}$

問 4　8 点

上のリボンで $z = \dfrac{d}{2}$, $y = y_0$ と $z = \dfrac{d}{2}$, $y = -y_0$ にある 2 つの直線電流のつくる磁束密度を考えると，x 軸に垂直な面内であり，y 成分は同じであるが z 成分の符号が反対である。したがって，足し合わせると y 成分だけになる。このことは $|y_0| \leqq \dfrac{w}{2}$ のすべての直線電流の対について成り立つから，上のリボンの電流がつくる磁束密度は y 成分だけをもつ。下のリボンの電流がつくる磁束密度についても同様であり，磁場は y 方向である。

または，上のリボンで $z = \dfrac{d}{2}$, $y = y_0$ にある直線電流と，下のリボンで $z = -\dfrac{d}{2}$, $y = y_0$ にある反対向きの直線電流の組がつくる磁束密度は，z 成分は打ち消しあって y 成分だけになる。このことを用いても，同様に説明できる。

解答合計　点

第 3 問　解答用紙　2/5　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名

問 5　8 点

(a) リボン間に y 方向の一様な大きさ $\dfrac{\mu_0 I}{w}$ の磁束密度が生じる。電流はリボンの長さ方向に往復するから，電流が単位長あたりに囲む磁束は $\dfrac{\mu_0 I}{w}d$，単位長さ当たりの (自己) インダクタンスは $\dfrac{\mu_0 d}{w}$ となる。

(b) 単位長あたりに貯えられるエネルギーは $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mu_0 d}{w}I^2$.

(a) 単位長当たりのインダクタンス $\boxed{\dfrac{\mu_0 d}{w}}$ ，(b) 単位長当たりのエネルギー $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{\mu_0 d}{w}I^2}$

(c) 長さ方向の単位長あたりのリボン間の体積は wd だから磁場のエネルギーは $\dfrac{1}{2\mu_0}B^2 \times wd$. $B = \dfrac{\mu_0 I}{w}$ に注意すれば，$\dfrac{1}{2}\dfrac{\mu_0 d}{w}I^2$ となり一致。

問 6　8 点

(a) 電場 $\overrightarrow{E}$ は $-z$ 方向，磁束密度 $\overrightarrow{B}$ は $+y$ 方向なので $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}$ は $+x$ 方向

(b) ポインティングベクトルの大きさは $\dfrac{1}{\mu_0}EB = \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\mathcal{E}}{d}\dfrac{\mu_0 I}{w} = \dfrac{\mathcal{E}I}{wd}$，一方，単位時間に電池がする仕事は $\mathcal{E}I$ であるから，その比は $\dfrac{1}{wd}$ である。

(a) $\overrightarrow{P}$ の方向 $\boxed{+x \text{ 方向}}$ ，(b) P と仕事との比 $\boxed{\dfrac{1}{wd}}$

問 7　8 点

(a) V_n は微小容量に蓄えられた電荷 Q_n によって $\dfrac{Q_n}{\Delta C}$ と表され，Q_n の時間変化は左右から流れ込む電流の差によって与えられる。電流の向きを考慮して与式となる。

(b) 磁束 Φ_n の変化は $\Delta L\,\dfrac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}t}$ である。これが V_n と V_{n+1} の差に等しいから，与式となる。
または，等価回路で考えると，微小インダクタンスの両端の逆起電力は $\dfrac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}t}$ に比例する。上の節点の間の電圧と，下の節点の間の電圧は対称的に変化するから，与式となる。

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　3/5　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ______________

問 8　7 点

(1) 式の両辺を t で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}I_{n-1}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}t} = \Delta C \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} V_n$$

左辺の $\dfrac{\mathrm{d}I_{n-1}}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}t}$ に (2) 式を用いると $\dfrac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\Delta L}(V_n - V_{n+1})$ であるから

$$[V_{n+1}(t) - V_n(t)] - [V_n(t) - V_{n-1}(t)] = \Delta C \Delta L \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} V_n(t)$$

を得る。

問 9　7 点

$\Delta C = \dfrac{\epsilon_0 w}{d}\Delta x$，$\Delta L = \dfrac{\mu_0 d}{w}\Delta x$ だから

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta C \Delta L}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

問 10　8 点

$V_n(t) = f(p)$ とすると，(3) 式の左辺の $V_{n+1}(t)$，$V_{n-1}(t)$ は

$$V_{n+1} = f(p - \Delta x) = f(p) - \Delta x \frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\mathrm{d}^2 f(p)}{\mathrm{d}p^2} + \cdots$$

$$V_{n-1} = f(p + \Delta x) = f(p) + \Delta x \frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\mathrm{d}^2 f(p)}{\mathrm{d}p^2} + \cdots$$

と表されるから，(3) 式の左辺は

$$[V_{n+1}(t) - V_n(t)] - [V_n(t) - V_{n-1}(t)] = (\Delta x)^2 \frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p} + \cdots$$

一方，右辺は

$$(\Delta x)^2 \frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} V_n(t) = (\Delta x)^2 \frac{1}{c^2} c^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2} f(p) + \cdots = (\Delta x)^2 \frac{\mathrm{d}^2 f(p)}{\mathrm{d}p^2} + \cdots$$

両辺を比べると，$(\Delta x)^2$ までの範囲で等しい。

解答合計　　点

問 11　　8 点

(a) $n=0$ とすると $f(p)=f(ct)$ であるから，$p \geqq 0$ では $f(p)=\mathcal{E}$，$p<0$ では，$f(p)=0$，したがって，

$$V_n=\mathcal{E} \qquad ct>x=n\Delta x$$
$$V_n=0 \qquad x=n\Delta x>ct$$

被積分関数は $t<\dfrac{n\Delta x}{c}$ のとき 0，$\dfrac{n\Delta x}{c}<t<\dfrac{(n+1)\Delta x}{c}$ のとき $\mathcal{E}$，$\dfrac{(n+1)\Delta x}{c}<t$ のとき $\mathcal{E}-\mathcal{E}=0$ であるから，

$$I_n(t)=0 \qquad \cdots \quad t<\frac{n\Delta x}{c}$$
$$I_n(t)=\frac{1}{\Delta L}\mathcal{E}\left(t-\frac{n\Delta x}{c}\right) \qquad \cdots \quad \frac{n\Delta x}{c}<t<\frac{(n+1)\Delta x}{c}$$
$$I_n(t)=\frac{1}{\Delta L}\mathcal{E}\frac{\Delta x}{c}=\frac{\mathcal{E}}{c}\frac{\Delta x}{\Delta L} \qquad \cdots \quad \frac{(n+1)\Delta x}{c}<t$$

$$I_n(t)=\boxed{\begin{array}{ll} 0 & \cdots \quad t<\dfrac{n\Delta x}{c} \\ \dfrac{1}{\Delta L}\mathcal{E}\left(t-\dfrac{n\Delta x}{c}\right) & \cdots \quad \dfrac{n\Delta x}{c}<t<\dfrac{(n+1)\Delta x}{c} \\ \dfrac{\mathcal{E}}{c}\dfrac{\Delta x}{\Delta L} & \cdots \quad \dfrac{(n+1)\Delta x}{c}<t \end{array}}$$

(b) 十分時間が経ったとき $V_n=\mathcal{E}$，$I_n=\dfrac{\Delta x}{\Delta L}\dfrac{\mathcal{E}}{c}$ であるから，$\dfrac{V_n}{I_n}=c\dfrac{\Delta L}{\Delta x}$ である。

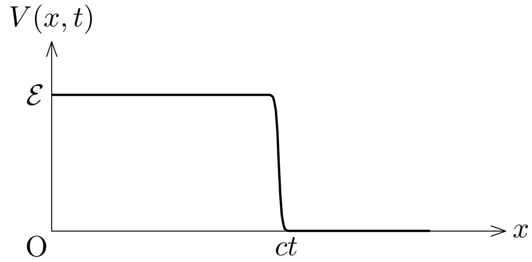
$c=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$，$\dfrac{\Delta L}{\Delta x}=\dfrac{\mu_0 d}{w}$ を代入すると与式 $\dfrac{V_n}{I_n}=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\epsilon_0}}\dfrac{d}{w}$ を得る。

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　5/5　**第 2 チャレンジ番号**　氏名

問 12　7 点

$V(x,t)=f(ct-x)$ は x 軸の正方向に速さ c で移動する波形を表すから



問 13　8 点

(a) 十分時間がたった後では，$V_n=\mathcal{E}$，$I_n=\dfrac{\mathcal{E}}{c}\dfrac{\Delta x}{\Delta L}$ である。$\dfrac{\Delta L}{\Delta x}=\dfrac{\mu_0 d}{w}$，$c=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ を用いると，$I_n=\mathcal{E}\dfrac{w}{d}\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ である。電場の大きさは $\dfrac{\mathcal{E}}{d}$，電場のエネルギー密度は

$$\frac{1}{2}\epsilon_0\Big(\frac{\mathcal{E}}{d}\Big)^2$$

磁束密度の大きさは $\dfrac{\mu_0 I_n}{w}$，磁場のエネルギー密度は

$$\frac{1}{2\mu_0}\Big(\frac{\mu_0 I_n}{w}\Big)^2=\frac{1}{2}\epsilon_0\Big(\frac{\mathcal{E}}{d}\Big)^2$$

となり，電場のエネルギー密度と磁場のエネルギー密度は等しい。

(b) 電場は $-z$ 方向で大きさは $\dfrac{\mathcal{E}}{d}$, 磁束密度は y 方向で，大きさは $\dfrac{\mu_0 I_n}{w}=\dfrac{\mu_0}{w}\dfrac{w}{d}\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\mathcal{E}$。したがってポインティングベクトルの向きは x 方向，大きさは

$$\frac{1}{\mu_0}\,\frac{\mathcal{E}}{d}\,\frac{\mu_0}{w}\,\frac{w}{d}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\mathcal{E}=\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\Big(\frac{\mathcal{E}}{d}\Big)^2$$

一方，電磁場のエネルギー密度は $\epsilon_0\Big(\dfrac{\mathcal{E}}{d}\Big)^2$，$c=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ だから，$c\epsilon_0\Big(\dfrac{\mathcal{E}}{d}\Big)^2=\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\Big(\dfrac{\mathcal{E}}{d}\Big)^2$ となり，電磁場のエネルギー密度と速さ c の積はポインティングベクトルの大きさに等しい。

解答合計　点