チャレンジ・ガイド

力学・電磁気

特定非営利活動法人 物理オリンピック日本委員会

はじめに

本チャレンジ・ガイドは，物理チャレンジに挑戦しようと考えているチャレンジャーに，どのように物理を学習したらよいか，その指針を示すテキストとして，作成されました。内容は，高校物理を基本としますが，学習指導要領にはとらわれず，ある程度の微分積分（高校数学で習う程度）を使用し，物理として重要で興味深い事柄などを含めました。また，初心者の便を図るため，やや発展的な記述には，【発展】☆☆・・・，・・・☆☆【発展終】を付けましたので，はじめは読み飛ばしてもよいでしょう。

第２チャレンジ出場を目指しているチャレンジャーは，【発展】を含めた全体にわたって学習をすることを望みます。ただし，第１チャレンジ問題，第２チャレンジ理論問題，実験問題が，「チャレンジ・ガイド」の内容から出題されるわけではありません。

巻末に，しばしば用いられる数学公式をまとめておきましたので，適宜，参考にしてください。

最後に，本ガイドで使用している記号法について説明します。
ベクトルは，太字で，時間に関する微分は上にドットを付けて表示しました。例えば，

$$\vec{a} \;\to\; \boldsymbol{a}\,,\quad \frac{dx}{dt} \;\to\; \dot{x}\,,\quad \frac{d^2x}{dt^2} \;\to\; \ddot{x}\,,\;\cdots$$

です。

みなさんの意欲的な学習に期待しています。

執筆担当：杉山忠男

目　　次

力　　学

第１章　運動の表現

1.1　x 軸に沿った運動

(1) 速度

図 1.1 のように, 物体 P が x 軸に沿って運動しているとき, 時刻 t における P の位置を x，時刻 $t+\Delta t$ における P の位置を $x+\Delta x$ とするとき,

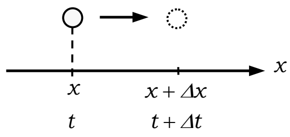

図 1.1

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

を，時刻 t から $t+\Delta t$ までの間の**平均速度**（average velocity）という。さらに，時間 Δt を微小時間として $\Delta t \to 0$ の極限をとった量を**瞬間速度**（instantaneous velocity）（あるいは単に**速度**（volocity））といい,

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \tag{1.1}$$

と表す。ここで，位置 x は時刻 t の関数で表され，$\dfrac{dx}{dt}$ を x の t に関する**導関数**（derived function）（あるいは単に**微分**（derivative））という。また，x の t に関する微分を，簡略化した記号で，x の上にドット（・）を付けて，$\dot{x}$ と表す。

（参考） 一般に，x の関数 $y = f(x)$ の x に関する微分は,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$$

と表される。

(2) $x-t$ グラフ

物体の位置 x と時刻 t の関係を表すグラフを $x-t$ **グラフ**という。時刻 t から $t+\Delta t$ までの平均速度 $\bar{v}$ は, 図 1.2 に示された $x-t$ グラフ上の２点 P(t, x), Q($t+\Delta t$, $x+\Delta x$)間を結ぶ直線の傾きで表され，時刻 t での瞬間速度 v は，$x-t$ グラフ上の点 P での接線の傾きで表される。

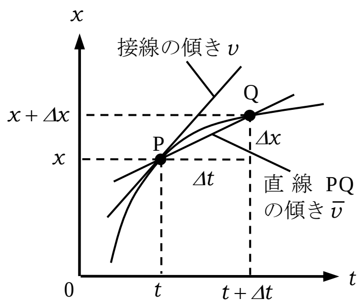

図 1.2

(3) 加速度

時刻 t における P の速度を v，時刻 $t+\Delta t$ における P の速度を $v+\Delta v$ とするとき,

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

を，時刻 t から $t+\Delta t$ までの間の**平均加速度**（average acceleration）という。さらに, 時間 Δt を微小時間として $\Delta t \to 0$ の極限をとった量を**瞬間加速度**（instantaneous acceleration）（あるいは単に**加速度**（acceleration））といい,

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x} \tag{1.2}$$

と表す。ここで，$\ddot{x}$ は加速度を表し，x の上のツゥードット（・・）は時刻 t での２階微分を示している。

(4)　$v-t$ グラフ

物体の速度 v と時刻 t の関係を表すグラフを **$v-t$ グラフ**という。時刻 t での瞬間加速度 a は，図 1.3 に示された $v-t$ グラフ上の点 P での接線の傾きで表される。

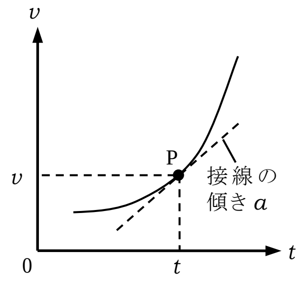

図 1.3

以下の(5)，(6)，(7)では数学の説明をする。

(5)　不定積分

微分すると $f(x)$ となる関数を，$f(x)$ の**原始関数**（primitive function）あるいは**不定積分**（indefinite integral）といい，$\int f(x)dx$ と表す。関数を微分すると，定数項はゼロになるので，$f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ と表すと，$f(x)$ の任意の不定積分は，

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1.3}$$

と表される。ここで，C は任意定数で**積分定数**（integral constant）とよばれる。

例：　$\int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C$（$C$ ：積分定数）

(6)　定積分

関数 $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とする。定数 a, b が与えられたとき，$F(b)-F(a)$ を記号 $\int_a^b f(x)dx$ で表し，**定積分**（definite integral）とよぶ。いま，$F(b)-F(a)$ を $\left[F(x)\right]_a^b$ と書くと，

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) \tag{1.4}$$

と表される。このとき定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は，図 1.4 に示されているように，$x = a$ から $x = b$ まで，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた面積 S を表す。

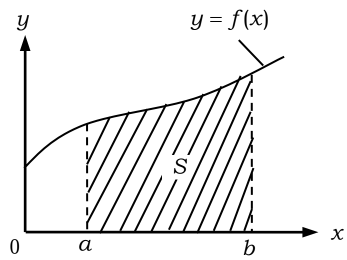

図 1.4

例：　$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{26}{3}$　これは，図 1.5 の斜線部分の面積を表す。

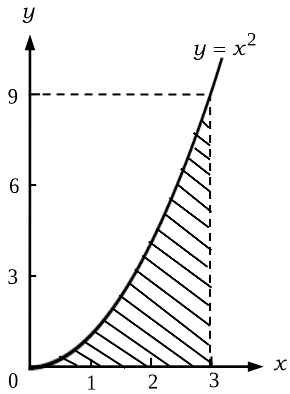

図 1.5

(7) 微積分の基本定理

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{1.5}$$

(証明)

関数 $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると，

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

と書けるから，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となる。

(8) 速度から位置座標，加速度から速度を求める

時刻 t_0 に位置 x_0 の点 P を速度 v_0 で通過した物体が，時刻 t に位置 x の点 R を速度 v で通過するとする。このとき，x と x_0 の関係は，その間の速度 $v(t')$（$t_0 < t' < t$）を用いて表される。同様に，v と v_0 の関係は，その間の加速度 $a(t')$ を用いて表される。

図 1.6 のように, 点 P と点 Q_1 の間の距離 Δx_1 は, その間の平均速度 $\bar{v}_1$ を用いて，

$$\Delta x_1 = \bar{v}_1 \Delta t$$

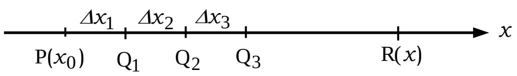

図 1.6

と表される。同様に，点 Q_1 と点 Q_2 間の距離 Δx_2 は，その間の平均速度 $\bar{v}_2$ とすると $\Delta x_2 = \bar{v}_2 \Delta t$，$Q_2$，$Q_3$ 間の距離 Δx_3 は，平均速度 $\bar{v}_3$ を用いて $\Delta x_3 = \bar{v}_3 \Delta t$，・・・と表される。こうして，点 P と点 R の間の距離 $x - x_0$ はこれらの和で表される。

$$x - x_0 = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots$$

ここで，時間を $\Delta t \to 0$ とした極限で上式の右辺は，定積分 $\int_{x_0}^x dx' = \int_{t_0}^t v dt'$ で表される。こうして，点 R の位置 x は，点 P の位置 x_0 から，

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v(t')dt' \tag{1.6}$$

と表される。

同様に，

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t')dt' \tag{1.7}$$

を得る。

(1.6)式の両辺を時刻tで微分すると，微積分の基本定理(1.5)より，$\dfrac{dx}{dt} = v(t)$となり，(1.7)式をの両辺を時刻tで微分すると，$\dfrac{dv}{dt} = a(t)$となり，それぞれ，(1.1)式，(1.2)式を得ることができる。

例題 1.1　速度・加速度

x軸上を運動する点 P の速度が時刻tの関数として，$v = 3t^2 - 2t - 1$で与えられるとき，その位置座標xと加速度aをtの関数として表し，$0 \leqq t \leqq 2$の範囲で$v-t$グラフと$x-t$グラフを描け。ただし，時刻$t=1$における点 P の位置は$x_0 = -1$であった。

【解答】

加速度aは，(1.1)式より，

$$a = \frac{dv}{dt} = \underline{6t - 2}$$

位置座標xは，(1.6)式に$x_0 = -1$を用いて，

$$x = -1 + \int_1^t (3t'^2 - 2t' - 1)\,dt' = -1 + \left[t'^3 - t'^2 - t'\right]_1^t = \underline{t^3 - t^2 - t}$$

$v-t$グラフと$x-t$グラフは，それぞれ図 1.7a,b のようになる。

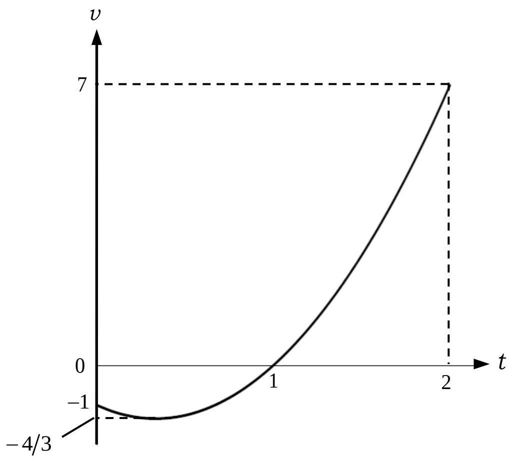

図 1.7a

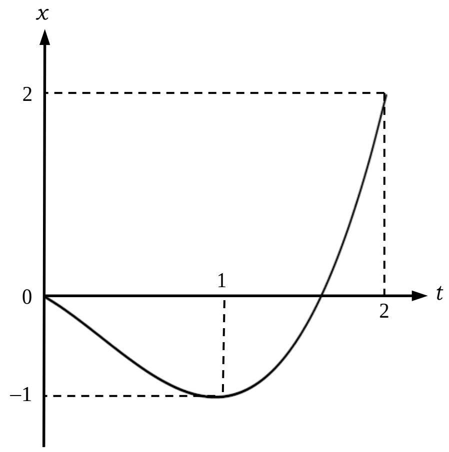

図 1.7b

■

(9)　等加速度直線運動

時刻$t=0$に位置x_0を速度v_0で通過した物体が，一定の加速度aで運動し，時刻tに位置xを速度vで通過する。このとき，$v = v_0 + \int_0^t a\,dt'$より，

$$v = v_0 + at \tag{1.8}$$

また， $x = x_0 + \int_0^t v dt' = x_0 + \int_0^t (v_0 + at')dt'$ より，

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.9}$$

を得る。さらに，(1.8)，(1.9)式より時刻 t を消去すると，

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{1.10}$$

となる。ここで， $x - x_0$ は位置の変化であり，物体が移動した道のりではないことに注意しよう。

＜ちょっと一言＞ (1.8)，(1.9)，(1.10)式は，等加速度直線運動を考える場合，非常に役立つ式であるが，加速度が一定ではない運動では，全く役立たない。加速度が変化するときは，基本的に，微分と積分の関係式(1.1)，(1.2)，(1.6)，(1.7)を用いることになる。

例題 1.2　加速度が負の等加速度直線運動

図 1.8 のように，x 軸上を加速度 -2 m/s で等加速度運動する点 P が，時刻 $t = 0$ s に原点 $x = 0$ m を速度 6 m/s で通過した。点 P の x 座標の最大値 x_{M}，2 度目に $x = 0$ を通過する時刻 t_0，および，$t = 0$ s から $t = 5$ s まで点 P が動いた道のりを求めよ。また，点 P の $v - t$ グラフと $x - t$ グラフを描け。

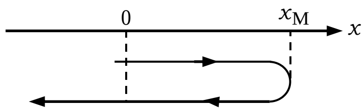

図 1.8

【解答】

x 座標が最大値をとる瞬間，点 P の速度 v はゼロとなる。したがって(1.10)式で $x_0 = 0$，$v_0 = 6$ m/s， $a = -2$ m/s， $v = 0$ m/s として，

$$0^2 - 6^2 = 2 \cdot (-2)(x_{\mathrm{M}} - 0) \quad \therefore \quad x_{\mathrm{M}} = 9 \text{ m}$$

(1.9)式で $x = 0$ とおき $t_0 \neq 0$ として，

$$0 = 6t_0 + \frac{1}{2}(-2)\,t_0^2 \quad \therefore \quad t_0 = 6 \text{ s}$$

点 P の速度がゼロになり，位置 x_{M} に達する時刻 t_{M} は，(1.8)式より，

$$0 = 6 + (-2)\,t_{\mathrm{M}} \quad \therefore \quad t_{\mathrm{M}} = 3 \text{ s}$$

$0 \leqq t < 3$ では x 軸正方向に，$3 < t \leqq 5$ では x 軸負方向に動く。$t = 5$ s における点 P の位置 x_1 は，(1.9)式より，

$$x_1 = 6t + \frac{1}{2}(-2)\,t^2 = 5 \text{ m}$$

となる。したがって， $t = 0$ s から $t = 5$ s まで点 P が動いた道のり l は，

$$l = x_{\mathrm{M}} + (x_{\mathrm{M}} - x_1) = 9 + (9-5) = \underline{13\ \mathrm{m}}$$

時刻t（>0）での速度vと位置xは，(1.8), (1.9)式より，

$$v = 6 + (-2)t = 6 - 2t$$

$$x = 6t + \frac{1}{2}(-2)t^2 = 6t - t^2 = -(t-3)^2 + 9$$

これより，図 1.9a,b を得る。

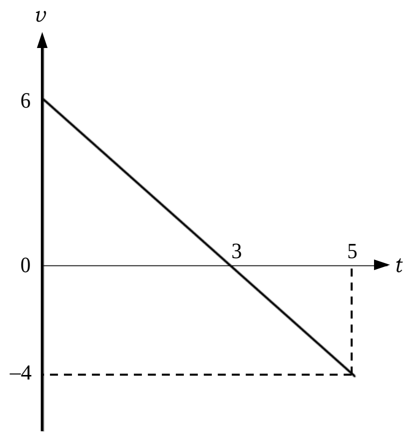

図 1.9a

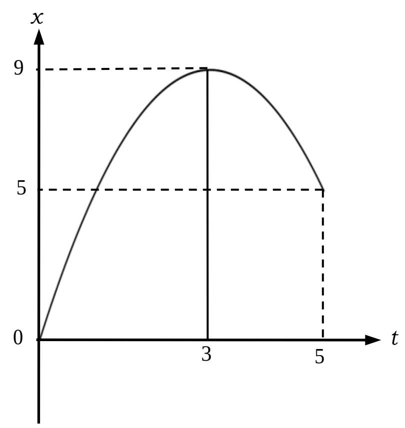

図 1.9b

■

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

1.2　３次元の運動

今後，ベクトルは矢印を用いずに太字で表すことにする。

(1)　位置，速度，加速度

質量をもち大きさの無視できる物体を**質点**（material particle）という。３次元空間では，質点の位置は位置ベクトル$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$で表される。図 1.10 のように，時間$\Delta t$の間に質点が位置$\boldsymbol{r}$の点 P から位置$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$の点P′まで曲線軌道 C に沿って動くとき，この間の質点の平均速度は$\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$と表され，

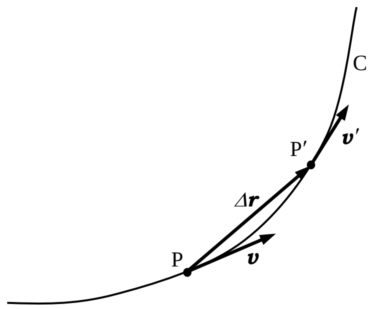

図 1.10

点 P での質点の（瞬間）速度$\boldsymbol{v}$は，

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

と表される。

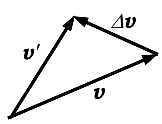

図 1.11

点P′での質点の速度を$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}$とすると，点 P での質点の（瞬間）加速度$\boldsymbol{a}$は（図 1.11），

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

と表される。

点 P での質点の速さ $v = |\boldsymbol{v}|$ と加速度の大きさ $a = |\boldsymbol{a}|$ はそれぞれ，

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ , \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

となる。

(2)　円運動

速度

図 1.12 のように，質点が点 O を中心に半径 r の円軌道上を運動している。時刻 t における質点の位置を P，速度を $\boldsymbol{v}$ ，時刻 $t + \Delta t$ における位置を P′ ，速度を $\boldsymbol{v}'$ とし，$|\boldsymbol{v}| = v$ ，$|\boldsymbol{v}'| = v'$ とする。Δt を微小時間とすると，$v' \fallingdotseq v$ であるから，$\mathrm{PP'} \fallingdotseq v \cdot \Delta t$ と表される。一方，$\angle \mathrm{POP'} = \Delta\theta$ とおくと角度をラジアンの単位で表せば，$\mathrm{PP'} = r \cdot \Delta\theta$ と書ける。これより，

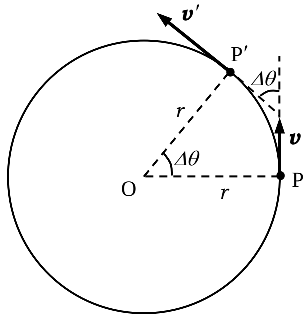

図 1.12

$$v \cdot \Delta t \fallingdotseq r \cdot \Delta\theta \quad \therefore \quad v \fallingdotseq r \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ここで，$\Delta t \to 0$ とすると，

$$v = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} = r\omega \tag{1.11}$$

となる。$\omega = \dot{\theta}$ を点 P における質点の**角速度**（angular velocity）という。

加速度

図 1.12 において，速度 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ のなす角は $\Delta\theta$ であるから，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ の始点を一致させ，$\boldsymbol{v}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ，$\boldsymbol{v}'$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。線分 OB 上に OA=OC となる点 C をとり，$\Delta\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を，

$$\Delta\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

と分解する（図 1.13)。ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$ はほぼ円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ に等しく円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ は，

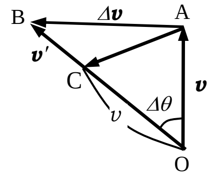

図 1.13

$$\overset{\frown}{\mathrm{AC}} \fallingdotseq v \cdot \Delta\theta$$

となり，$\mathrm{CB} = v' - v \equiv \Delta v$ と書ける。

点 P における接線方向の加速度（これを**接線加速度**という）は，

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega}$$

中心Oに向かう向きの加速度（これを**向心加速度**という）は，

$$a_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{AC}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \therefore \quad a_r = v\omega = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \tag{1.12}$$

となる。

等速円運動では，$\dfrac{dv}{dt} = 0$であるから，$a_t = 0$であり，速さの変化する円運動では，$a_t \neq 0$である。また，向心加速度は，速さvが変化しているかどうかによらず，(1.12)式で与えられる。

例題 1.3　楕円の速度，加速度

質点の座標が時刻tの関数として，$\boldsymbol{r} = (x, y) = (A\cos\omega t, B\sin\omega t)$（$A > B > 0$，$\omega$：一定）と表されるとき，Pの描く軌道の方程式を求め，Pの加速度は原点からの変位に比例し，原点に向かう向きであることを示せ。また，その比例定数を求めよ。

【解答】

$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases}$を$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$に代入して，

$$\underline{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1}$$

これは，原点を中心とした長軸の長さ$2A$，短軸の長さ$2B$の楕円を表す。

加速度を$\boldsymbol{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$として，

$$\begin{cases} \ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -B\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y \end{cases} \quad \text{より，} \quad \boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$$

これより，加速度$\boldsymbol{a}$は原点からの変位$\boldsymbol{r}$に比例し，原点に向かう向きであることがわかる。また，その比例定数は，符号を除いて$\underline{\omega^2}$である。　■

＜微分公式＞

$$\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -\omega\sin\omega t\,, \quad \frac{d}{dt}(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆**【発展終】**

第２章　力について

2.1　いろいろな力

物体の運動状態を変化させたり，変形させるもとになるものを**力**（force）という。力は向きと大きさをもつベクトルである。物体に多くの力$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$,…がはたらいているとき，その合力$\boldsymbol{F}$ は,

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots$$

となる。

重力と質量

地球上の物体には，すべて**重力**（gravity）が作用する。空気抵抗が無視できる場合，物体を地球上で落下させると，物体の種類によらず加速度$g \fallingdotseq 9.8$ m/sで落下する。この加速度gを**重力加速度**（gravitational acceleration）という。物体にはたらく重力に比例し，地球上とか月の上とかなどという場所によらず物体に固有な量を**質量**（mass）（正確には，これを**重力質量**（gravitational mass））という。地球上で，質量mの物体には，大きさmgの重力がはたらく。

ばねの弾性力

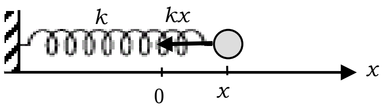

図 2.1

ばねが自然の状態から伸び縮みすると，ばねには**弾性力**（elastic force）が作用する。図 2.1 のように，ばねの一端を固定し，ばねが自然長のときの他端の位置を原点に，ばねの伸びる向きにx軸をとる。ばねの伸びがxのとき，ばねの弾性力Fは,

$$F = -kx \tag{2.1}$$

と表される。ここで，kは**ばね定数**（spring constant）である。

摩擦力

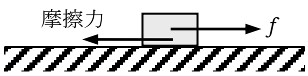

図 2.2

図 2.2 のように，粗い水平面上に静止している物体に水平方向に加える外力の大きさfをゼロから次第に大きくしていくと，物体にはたらく**摩擦力**（friction force）の大きさは図 2.3 のように変化する。fが大きさ$F_{\max}$の**最大摩擦力**（maximal friction force）になるまでは，物体にはたらく力はつり合い，物体は静止したままである。物体が滑っていないときにはたらく摩擦力を**静止摩擦力**（static friction force）という。したがって，静止摩擦力の大きさFは,

$$F \leqq F_{\max} \tag{2.2}$$

を満たす。fが$F_{\max}$を超えると物体は水平面上を滑り出し，速さに依らない大きさF'の動摩擦力がはたらく。そのとき一般に,

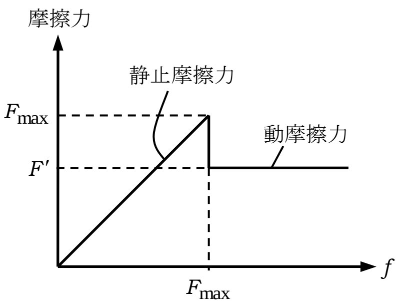

図 2.3

$$F' < F_{\mathrm{max}} \tag{2.3}$$

の関係が成り立つ。F_{max} と F' は，ともに接触面に垂直にはたらく**垂直抗力**（normal reaction）の大きさ N に比例する。したがって， F_{max} と F' はそれぞれの比例定数 μ, μ' を用いて，

$$F_{\mathrm{max}} = \mu N\ , \quad F' = \mu' N \tag{2.4}$$

と表される。このとき，それぞれの比例定数 μ, μ' を**静止摩擦係数**（coefficient of static friction），**動摩擦係数**（coefficient of kinetic friction）という。そこで，(2.3), (2.4)式より，不等式

$$\mu' < \mu \tag{2.5}$$

の成り立つことが分かる。

2.2　質点にはたらく力のつり合い

図 2.4 のように，質点 P にいろいろな力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$, ⋯が作用し，P が静止しているか等速度運動しているとき，P に作用している力はつり合い，それらの合力はゼロになっている。したがって，$\boldsymbol{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z})$， $\boldsymbol{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z})$， $\boldsymbol{F}_3 = (F_{3x}, F_{3y}, F_{3z})$， ⋯ とすると，

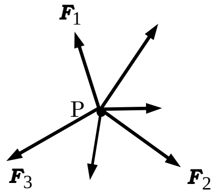

図 2.4

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots = 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \cdots = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

が成り立つ。

例題 2.1　摩擦のある水平面上の物体

図 2.5 のように，摩擦のある水平面上に質量 m の物体が置かれているとき，水平と角 θ をなす向きに大きさ F の外力を加える。F をゼロから次第に大きくしていくと，F がある値 F_0 を超えると物体は水平面上を動き出した。F_0 を求めよ。ただし，物体と水平面の間の静止摩擦係数を μ_0，重力加速度の大きさを g とする。

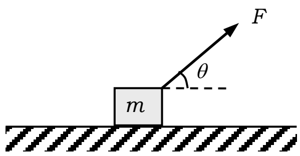

図 2.5

【解答】

水平面から物体にはたらく垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを f とすると，$F = F_0$ のとき， $f = \mu_0 N$ となるから，物体にはたらく力のつり合いは，

水平方向：$F_0 \cos\theta - \mu_0 N = 0$，　鉛直方向：$F_0 \sin\theta + N - mg = 0$

これらより N を消去して，

$$F_0 = \frac{\mu_0}{\cos\theta + \mu_0 \sin\theta} mg$$

■

2.3　剛体にはたらく力のつり合い

大きさをもち，力が加わっても変形しない理想的な物体を**剛体**（rigid body）という。また，無限に多くの質点が互いの位置関係を変えることなく連続的に分布した物体を剛体と考えることができる。力がはたらく点を**作用点**（point of application）といい，作用点を通り力のベクトルに沿った直線を**作用線**（line of action）という。剛体にはたらく力を作用線に沿って動かしても，その作用に変化はない。

(1)　ベクトルの内積と外積

ベクトルどうしの掛け算には，内積（スカラー積ともいう）と外積（ベクトル積ともいう）がある。

内積

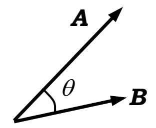

図 2.6

図 2.6 のように，２つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ について，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を θ（$0 \le \theta \le \pi$）とするとき，演算

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \equiv |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{2.7}$$

を**内積**（inner product）という。この定義より，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が平行のとき，内積の値は $\boldsymbol{A}$ の大きさと $\boldsymbol{B}$ の大きさの積に等しい。また，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が垂直のとき, 内積の値はゼロである。

外積

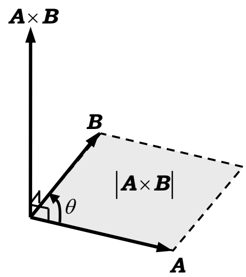

図 2.7

図 2.7 のように，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を隣り合う２辺とする平行四辺形の面積をその大きさとし，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を含む平面に垂直で $\boldsymbol{A}$ の向きから $\boldsymbol{B}$ の向きに右ネジを回すとき，ネジの進む向きのベクトルを $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と書き, **外積**（outer product）という。外積の大きさ $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$ は,

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{2.8}$$

と表される。ここで，$0 \le \theta \le \pi$ である。したがって，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が平行のとき，内積の値はゼロであり，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が垂直のとき，外積の値は $\boldsymbol{A}$ の大きさと $\boldsymbol{B}$ の大きさの積に等しい。また，外積は書ける順序を逆にすると符号が反転する。

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{2.9}$$

(2)　力のモーメント

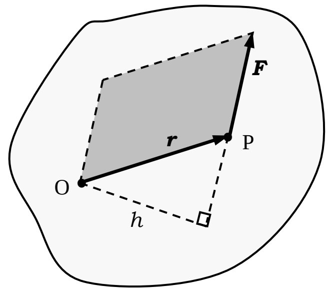

図 2.8

図 2.8 のように，ある剛体に力 $\boldsymbol{F}$ が作用するとき，点 O を原点として $\boldsymbol{F}$ の作用点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。このとき,

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{2.10}$$

を, 点 O のまわりの**力のモーメント**（moment of force）といい, 剛体を点 O のまわりに回転させようとするはたらきを表す。

点 O から力 $\boldsymbol{F}$（$|\boldsymbol{F}| = F$）の作用線に引いた垂線の長さを h とするとき，力のモーメントの大きさ N は,

$$N = F \cdot h \tag{2.11}$$

となる。

図 2.9 の剛体上の点 A に大きさF_1の力を図の矢印の向きに加え，点 B に大きさF_2の力を矢印の向きに加える。このとき，点 O から大きさF_1の力の作用線に引いた垂線の長さをh_1，大きさF_2の力の作用線に引いた垂線の長さをh_2とすると，この剛体の点 O のまわりの左回りの力のモーメントNは，

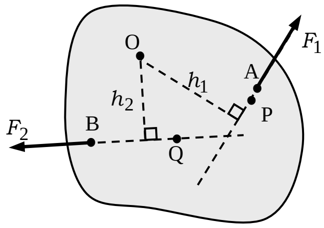

図 2.9

$$N = F_1h_1 - F_2h_2 \tag{2.12}$$

となる。いま，$N = 0$のとき，点 O のまわりのモーメントはつり合い，剛体はこの点のまわりに回転しない[1]。

重心

質量m_1の質点の位置を$\boldsymbol{r}_1$，質量m_2の質点の位置を$\boldsymbol{r}_2$とするとき，位置

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.13}$$

を**重心**（center of gravity）という。一般に，N個の質点の重心は，

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \cdots + m_N\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{N}}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$$

で定義される。例えば，一様な細い棒の重心はその中点であり，一様な円板の重心はその中心である。

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

(3)　剛体のつり合い

剛体にはたらく力のつり合いは，次のようになる。

Ⅰ　**合力はゼロ。**

剛体に力$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \cdots$が作用するとき，

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots = \boldsymbol{0}$$

これは，剛体の重心が静止するか等速度運動する条件であり，質点のつり合いと同様である。

Ⅱ　**力のモーメントの和がゼロ。**

剛体にモーメント$\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_3, \cdots$の力が作用するとき，

$$\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{N}_3 + \cdots = 0 \tag{2.14}$$

これは，剛体が回転しない条件である。

以下，条件Ⅱについて考えてみよう。

図 2.9 において，(2.12)式で与えられる力のモーメントがゼロであれば，この剛体は点

[1] このことは，厳密には，運動方程式から導かれる。

O のまわりに回転しない。大きさ F_1 の力の作用線上にあり，大きさ F_2 の力の作用線上にない点 P のまわりのモーメント N_P を考えると，N_P は F_2 の力のモーメントだけで与えられるため，この剛体は点 P のまわりに右回りに回転する。一方，大きさ F_2 の力の作用線上にあり，大きさ F_1 の力の作用線上にない点 Q のまわりのモーメントを考えると，この剛体は左回りに回転することがわかる。したがって，どの点のまわりの回転を考えるかで，モーメントはゼロになったり（このとき剛体は回転しない），ゼロにならなかったりする（このとき回転する）。

ここで，次のことが成り立つ。

合力ゼロ，かつ， ある一点のまわりのモーメントゼロ	⇒	任意の点のまわりの モーメントゼロ	(2.15)

図 2.9 の場合，大きさ F_1 と F_2 の合力はゼロではない。したがって，(2.15)の条件は成り立たず，ある 1 点のまわりのモーメントがゼロであっても，任意の点のまわりのモーメントはゼロにならない。(2.15)は，合力がゼロになり，さらに 1 点のまわりの力のモーメントがゼロになれば，任意の点のまわりのモーメントがゼロになることを示している。このことを，簡単な例で確かめてみよう。

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

例題 2.2　軽い棒のつり合い

図 2.10 のように，質量の無視できる長さ l の軽い棒の A 端に鉛直下向きに大きさ F_1 の力を，B 端に大きさ F_2 の力を加えて点 G で支えると，棒は水平を保った。そこで，点 G に鉛直上向きに大きさ $F = F_1 + F_2$ の力を加えて，棒に作用する合力をゼロにした。このとき，棒の任意の点 P のまわりのモーメントがゼロであることを示せ。

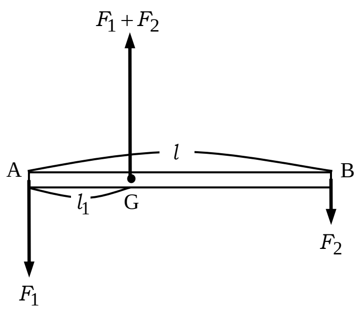

図 2.10

【解答】

点 G で支えると棒が水平を保つことから，G のまわりの力のモーメントはゼロである。したがって，AG 間の距離 l_1 は，

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot (l - l_1) \quad \therefore \quad l_1 = \frac{F_2}{F} l$$

端 A から点 P までの距離を x として，P のまわりのモーメント N_P は，左回りを正として，

$$N_\mathrm{P} = F_1 \cdot x + F(l_1 - x) - F_2(l - x) = F \cdot l_1 - F_2 \cdot l = 0$$

となる。この結果は距離 x によらず成立し，任意の点 P のまわりの力のモーメントはゼロであることがわかる。 ■

例題 2.3　立掛けられた梯子のつり合い

図 2.11 のように，質量M，長さ$2l$の一様な梯子を，粗い床と角θをなすようになめらかな壁に立てかけた。壁と梯子の間に摩擦はなく，梯子と床の間の静止摩擦係数は$\mu_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$である。質量$M$の人が床からこの梯子を登り始め，中点 O まで梯子が滑ることなく登ることができた。角θはどのような値か。

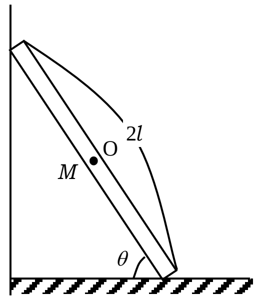

図 2.11

【解答】

人が中点 O に達したときの梯子のつり合いを考える。図 2.12 のように，梯子が床に接する点を A，壁に接する点を B とし，点 A で床から梯子に作用する垂直抗力をN_{A}，静止摩擦力をF_{A}，点 B で壁から梯子に作用する垂直抗力をN_{B}とする。梯子にはたらく力のつり合いは，重力加速度の大きさをgとして，

水平方向：$F_{\mathrm{A}} - N_{\mathrm{B}} = 0$，鉛直方向：$N_{\mathrm{A}} - 2Mg = 0$

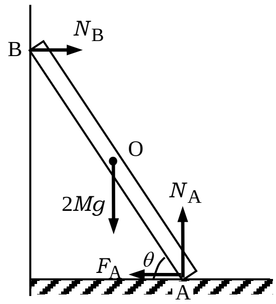

図 2.12

点 A のまわりの力のモーメントのつり合いは，

$$2Mg \cdot l\cos\theta - N_{\mathrm{B}} \cdot 2l\sin\theta = 0$$

また，点 A で梯子が床上を滑らない条件は，

$$F_{\mathrm{A}} \leq \mu_0 N_{\mathrm{A}}$$

これらより，

$$\mu_0 \geq \frac{F_{\mathrm{A}}}{N_{\mathrm{A}}} = \frac{Mg/\tan\theta}{2Mg} = \frac{1}{2\tan\theta} \qquad \therefore \quad \tan\theta \geq \frac{1}{2\mu_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

こうして，$\underline{\theta \geq 30^\circ}$を得る。 ■

斜面上の直方体

図 2.13 のように，水平面と角θをなす粗い平面上に一辺の長さaの正方形を底面とし，高さhの一様な直方体が置かれている。直方体の底面の正方形の斜面下側の辺を A，上側の辺を B とする。この直方体の底面に斜面からはたらく垂直抗力は，A に近づくにしたがって増加し（図 2.14），垂直抗力の合力の作用点 P は A, B 間の中点より A に近くなる。斜面の傾き角θが増加するにしたがって P は A に近づくが，A を越えて作用することはない。

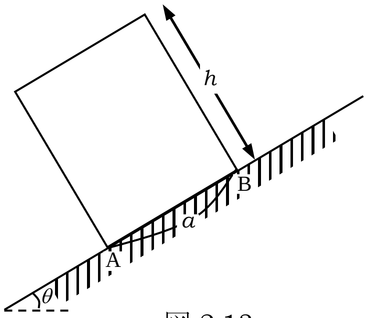

図 2.13

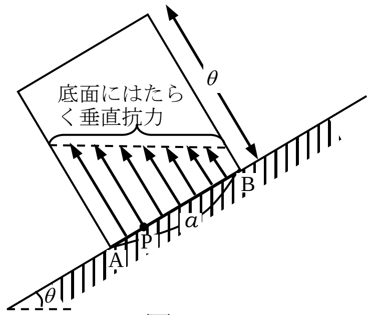

図 2.14

例題 2.4　直方体が倒れない条件

図 2.13 のように斜面上に直方体が置かれて静止しており，粗い面の傾角θを次第に大きくして行ったら，直方体は滑ることなく倒れた。このようなことが起きるためには，直方体の底面と粗い面の間の静止摩擦係数はいくら以上であればよいか。

【解答】

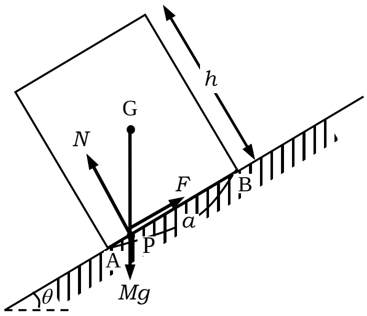

図 2.15

直方体の質量をM，重力加速度の大きさをgとして，直方体の重心 G に作用する重力Mgの作用線と斜面との交点を P とし，直方体は滑らないとする。直方体に作用する垂直抗力Nの作用点が点 P に一致すれば直方体は倒れることはない（図 2.15）。なぜなら，直方体に作用するすべての力, すなわち, 重力Mg, 垂直抗力N, 静止摩擦力Fの 3 つの力の作用線は点 P で交わり，P のまわりの力のモーメントはゼロとなりつり合うからである。したがって，点 P が A, B 間の外に出てしまうと，そこに垂直抗力ははたらき得ないので，直方体は倒れる（図 2.16）。直方体が倒れる直前，点 P は辺 A 上に達する。このとき，斜面の傾角θは,

$$\tan\theta = \frac{a}{h}$$

で与えられる（図 2.17）。このとき直方体が滑らなければ題意を満たす。

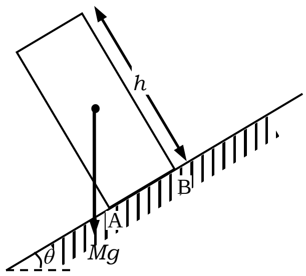

図 2.16

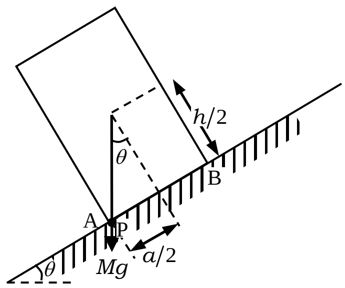

図 2.17

斜面の傾角がθのときの直方体のつり合いより，$N = Mg\cos\theta$，$F = Mg\sin\theta$となるから，このとき滑らないための，静止摩擦係数μ_0に対する条件は，

$$\mu_0 \geq \frac{F}{N} = \tan\theta \quad \therefore \quad \underline{\mu_0 \geq \frac{a}{h}} \qquad \blacksquare$$

第３章　運動の法則

ここで考える力学は，ニュートンによって集大成された力学であるから，**ニュートン力学**（Newtonian mechanics）とよばれる。ニュートン力学では，自然界で必ず成り立つと考えられるいくつかの基本法則を考えて，それらを元に力学現象を考察しようとする。この基本法則は，運動の３法則と万有引力の法則の４つである。これらの中で，万有引力の法則は第６章で考えることにし，まず，運動の３法則を考えよう。

3.1　運動の３法則

ここで述べる３法則は，つねに成り立つと仮定する。これらの法則がなぜ成り立つかは問わない。

第１法則（慣性の法則）

「物体に力がはたらかないか，はたらいてもその合力がゼロであれば，その物体はいつまでも静止し続けるか，いつまでも等速直線運動を続ける」

この法則が成り立つのは，物体を**慣性系**（inertial system）とよばれる座標系で観測したときだけである。以下，特に断らない限り，物体を観測する座標系は慣性系としよう。

第２法則（運動方程式）

「物体に力を加えると，その物体には，力の向きに加速度が生じ，その加速度の大きさは，加える力の大きさに比例する」

この法則を式で表すと，次のようになる。

図 3.1 のように，物体 P に力 $\boldsymbol{F}$ を加えたとき，P に加速度 $\boldsymbol{a}$ が生じたとする。このとき，

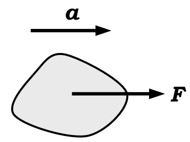

図 3.1

$$\boldsymbol{a} \propto \boldsymbol{F}$$

となるから，その比例定数を $1/m$ とおき，m を**質量**（mass）（詳しくは**慣性質量**（inertial mass））とよぶ。そうすると，

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{3.1}$$

が成り立つ。(3.1)式を**運動方程式**（equation of motion）という。

この運動方程式を仮定することによって，力と質量を定めることができる。加速度は，物体の運動を詳しく測定すれば分かる量であるが，力は分からない。そこで，運動方程式(3.1)を用いて，力と質量を次のように定める。

物体 P に力 $\boldsymbol{F}$ を加えたとき，P が加速度 $\boldsymbol{a}$ で運動したとする。次に，同じ物体 P に異なる力 $\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \cdots$ を加えたら，加速度 $2\boldsymbol{a}, 3\boldsymbol{a}, \cdots$ が生じたとする。このときそれぞれの力は，$\boldsymbol{F}_2 = 2\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_3 = 3\boldsymbol{F}, \cdots$ で与えられる。したがって，はじめに，物体 P に加速度 1m/s² を生じさせる力を 1N と定義しておけば，２倍，３倍，…の加速度を生じさせる力は，2N, 3N, …と定まる。こうして定まった力をある物体に加えたとき，物体の加速度を測定すれば，運動方程式より，その物体の質量が定まることになる。

第３法則（作用・反作用の法則）

「物体 A から物体 B に力が作用するとき，つねに，A には B から同じ大きさで逆向きの

力が作用する」

図 3.2 のように，物体 A から物体 B に作用する力を $\boldsymbol{F}$ とすると，A には B からその反作用 $-\boldsymbol{F}$ が作用する。この作用と反作用は，２つの物体間に作用する力であり，１つの物体に作用する力ではないことに注意しよう。すなわち，作用・反作用の法則は，１つの物体に作用する力のつり合い（合力ゼロ）とは無関係である。

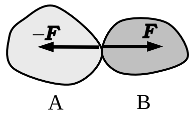

図 3.2

3.2　運動方程式を用いる例

例題 3.1　粗い斜面上を滑る物体の運動

質量 m の小物体 P を水平面と角 θ をなす粗い斜面上の点 A で静かに（初速度 0 で）放したところ，P は滑り出し，A から斜面の最大傾斜線に沿って距離 l だけ下方の点 B を通過した。P が点 B を通過するときの速さを求めよ。ただし，物体 P と斜面の間の動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする。

【解答】

物体 P にはたらく垂直抗力の大きさ N は，斜面に垂直方向の力のつり合いより，$N = mg\cos\theta$ と書けるから，P に作用する動摩擦力の大きさ f は，

$$f = \mu N = \mu mg\cos\theta$$

である（図 3.3）。これより，P の運動方程式は，斜面下向きの加速度を a として，

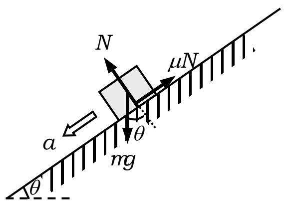

図 3.3

$$ma = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \quad \therefore \quad a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

加速度 a は一定値であるから，物体 P は等加速度運動をする。よって，点 B を通過する P の速さ v は，等加速度運動の式より，

$$v^2 - 0^2 = 2al \quad \therefore \quad v = \sqrt{2al} = \underline{\sqrt{2gl(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$$ ■

例題 3.2　重ねられた２物体の運動

図 3.4 のように，なめらかな水平面上に質量 M の板 A が置かれ，その粗い上面に質量 m の小物体 B が置かれている。板 A に付けられた糸を右向きに引き，その張力を次第に大きくしたところ，その大きさが T_1 を超えたところで，B が A 上を滑り出した。T_1 を求めよ。ただし，A と水平面の間に摩擦はなく，A と B の間の静止摩擦係数を μ_0 とする。

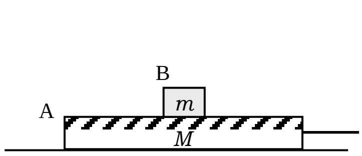

図 3.4

【解答】

板 A を引く張力の大きさが T_1 のとき，小物体 B には右向きに大きさ $\mu_0 mg$ の最大摩擦力が，A には左向きにその反作用（大きさ $\mu_0 mg$）がはたらく（図 3.5）。A と B の間に滑り

が生じる直前，A と B は同じ加速度aで運動している。物体系 AB および小物体 B の運動方程式はそれぞれ，

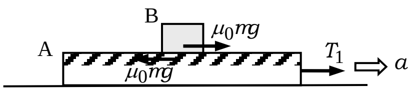

図 3.5

$$\text{AB}：(M+m)a = T_1, \qquad \text{B}：ma = \mu_0 mg$$

これらよりaを消去して，

$$\underline{T_1 = \mu_0(M+m)g}$$ ■

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

例題 3.3　台上の２物体の運動

図 3.6 のように，なめらかな床上になめらかな滑車の付いた質量Mの台車が置かれ，両端に同じ質量mをもつ小物体 P, Q の付けられた軽い糸が滑車にかけられている。台車の上面 AB と P の間の動摩擦係数をμ（<1）で，台車の側面 BC にはレールが付けられ，Q は面 BC から離れることはなくなめらかに上下することができる。はじめ，Q は床から高さhの位置で支えられ，台車とともに静止している。この状態ですべての支えをはずすと，Q が鉛直成分aの加速度で落下すると同時に，台車は水平方向左向きに加速度Aで動き始めた。aとAを求めよ。小物体 P と面 AB の間の摩擦以外，すべての摩擦，および滑車と糸の質量は無視でき，重力加速度の大きさをgとする。

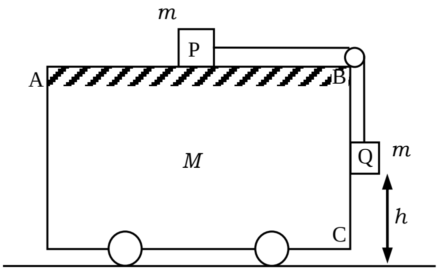

図 3.6

【解答】

糸の質量が無視できるので，小物体 P と Q に作用する糸の張力は等しい。その大きさをTとする。Q が下降する加速度aは，P の台車に対する相対加速度であるから，P の床に対する水平方向右向きの加速度は$a-A$となる。また，P には台車から水平左向きに大きさμmgの動摩擦力がはたらき，台車にはその反作用がはたらく（図 3.7)。また滑車には，図 3.8 のように，糸からの大きさTの張力が水平左向きと鉛直下方にはたらく。さらに，台車と Q は，水平方向左向きには，一体となって運動する。これらより，P, Q, および，台車と Q 一体のそれぞれの運動方程式は次のように表される。

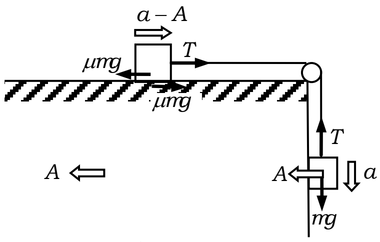

図 3.7

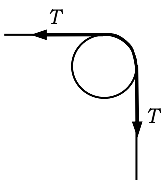

図 3.8

P の水平方向右向き：　$m(a-A) = T - \mu mg$

Q の鉛直方向下向き：　$ma = mg - T$

台車と Q 一体の水平方向左向き：$(M+m)A = T - \mu mg$

これらより T を消去して，

$$a = (1-\mu)\frac{M+2m}{2M+3m}g\,,\quad A = (1-\mu)\frac{m}{2M+3m}g \qquad \blacksquare$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

第４章　運動方程式を使う

4.1　運動方程式を解く

(1)　放物運動

地表面から質点を投げ出す運動は，物体に作用する空気抵抗を無視すると，放物線の軌道を描くため，**放物運動**（projectile motion）とよばれている。

質点を投げ出す点を原点に，地面に沿って水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとる。質量 m の質点 P を x 軸と角 θ をなす方向に初速 v_0 で投げ出す。空気抵抗および重力加速度 g の変化を無視すると，投げ出された P には，鉛直下方に重力 mg が作用するだけであるから， x 方向および y 方向の運動方程式は（図 4.1），

$$m\ddot{x} = 0,\quad m\ddot{y} = -mg \tag{4.1}$$

となる。

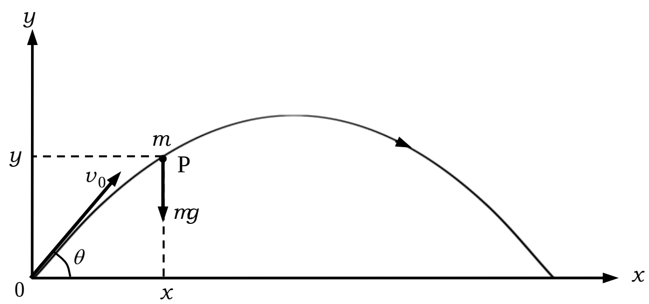

図 4.1

初期条件「$t = 0$ のとき，$(x, y) = (0, 0)$，$(v_x, v_y) = (\dot{x}, \dot{y}) = (v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$」を用いて，(4.1)式を時刻 t に関して積分する。

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta \\ v_y = v_0\sin\theta - gt \end{cases},\qquad \begin{cases} x = v_0\cos\theta\cdot t \\ y = v_0\sin\theta\cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{4.2}$$

(4.2)の第２式より t を消去すると，

$$y = \tan\theta\cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

となり，質点の軌跡は放物線になることがわかる。

質点の到達距離

投げ出された質点が地面に落下するまでの時間 t_0 は，(4.2)の第２式より，

$$v_0\sin\theta\cdot t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 = 0 \quad \therefore\quad t_0 = \frac{2v_0\sin\theta}{g} \quad (t_0 \neq 0)$$

となるから，落下点の x 座標 x_0 は，

$$x_0 = v_0\cos\theta\cdot t_0 = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

となる。

これより，初速v_0を与えていろいろな角度で投射された質点が最も遠くまで飛ぶ距離$x_{\max}$は，$\sin 2\theta \leq 1$より，

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

であり，そのときの投射角は,

$$2\theta = 90° \quad \therefore \quad \theta = 45°$$

であることがわかる。

例題 4.1　斜面上での投げ上げ

水平面と角θをなす斜面上の点 O から質点 P を斜面と角ϕ（$< 90° - \theta$）の向きに速さv_0で投げ上げる。P が斜面に垂直に衝突するためのθとϕの間に成り立つ関係式を求めよ。

【解答】

図 4.2 のように, 点 O を原点に斜面に沿ってx軸, 斜面に垂直にy軸をとり，$x-y$座標系で質点 P の運動を考えよう。質点に作用する重力加速度の

x成分は$a_x = -g\sin\theta$，y成分は$a_y = -g\cos\theta$

であるから，P が斜面に衝突する時刻t_0は，投げ上げてから時間t_0だけたったときの P のy座標が 0 になることより，

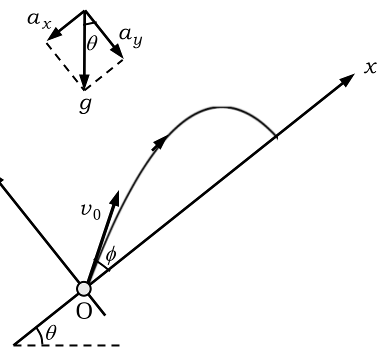

図 4.2

$$v_0 \sin\phi \cdot t_0 + \frac{1}{2} a_y t_0^2 = 0 \quad \therefore \quad t_0 = \frac{2v_0 \sin\phi}{g\cos\theta}$$

P が斜面に垂直に衝突するには，$t = t_0$のとき，P の速度のx成分が 0 なればよい。よって,

$$v_0 \cos\phi + a_x t_0 = 0 \quad \therefore \quad \underline{2\tan\theta \cdot \tan\phi = 1}$$ ■

例題 4.2　２質点の衝突

図 4.3 のように，地上の空間に原点 O をとり，水平方向にx軸，鉛直上向きにy軸をとる。質点 P を O から水平面（x軸）と角θをなす向きに速さv_0で投げ出すと同時に，点 A(1, 1) からもう 1 つの質点 Q をx軸正の向きに速さV_0で投げ出す。２つの質点が衝突するためのV_0 / v_0の値と，衝突するまでの時間を求めよ。ただし, 地面の影響は考える必要はなく, 重力加速度gは一定でつねに鉛直下方を向いており,

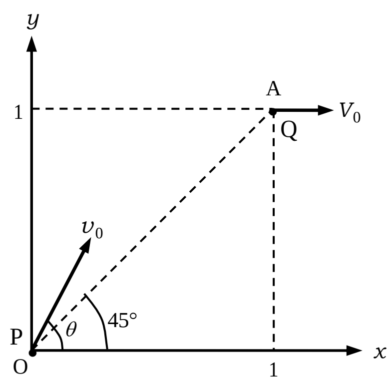

図 4.3

空気抵抗は無視する。

【解答】

質点 P と Q は，同じ重力加速度で運動するから，Q から見た P の相対加速度は 0 であり，Q から見ると，P は速度

$$\vec{v}_{\mathrm{r}} = (v_0\cos\theta, v_0\sin\theta) - (V_0, 0) = (v_0\cos\theta - V_0, v_0\sin\theta)$$

で等速度運動をする。したがって，はじめに $\vec{v}_{\mathrm{r}}$ が P から Q，すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1, 1)$ の向きを向いていれば，P と Q は必ず衝突する。よって，衝突する条件は，

$$v_0\cos\theta - V_0 = v_0\sin\theta \quad \therefore \quad \frac{V_0}{v_0} = \underline{\cos\theta - \sin\theta}$$

衝突するまでの時間 t は，はじめの P, Q 間の距離 $\sqrt{2}$ を，相対的な速さ

$$v_{\mathrm{r}} = \sqrt{(v_0\cos\theta - V_0)^2 + (v_0\sin\theta)^2}$$

で進む時間に等しいから，

$$t = \underline{\sqrt{\frac{2}{(v_0\cos\theta - V_0)^2 + (v_0\sin\theta)^2}}}$$ ■

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

(2)　粘性抵抗のある場合の質点の運動

質点にはたらく空気抵抗は，速さが遅ければ質点の速度に比例する**粘性抵抗**（viscous drag）の寄与が大きいが，速度が速くなると，速度の２乗に比例する**慣性抵抗**（inertial drag）の寄与が大きくなる。ここでは，速度に比例する粘性抵抗だけがはたらくとした場合の質点の運動を考えてみよう。

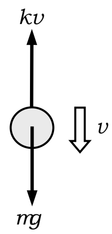

図 4.4

質量 m の質点が速さ v で空気中を落下しているとき（図 4.4），空気の粘性抵抗の比例定数を k，重力加速度の大きさを g，加速度を $a = \dfrac{dv}{dt}$ とすると，質点の運動方程式は，鉛直下向きを正として，

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \tag{4.3}$$

運動の定性的理解

運動方程式(4.3)で与えられる質点の落下運動は，簡単に理解することができる。時刻 $t = 0$ で $v = 0$ であったとすると，はじめ加速度は $a = \dfrac{dv}{dt} > 0$ であるから v は増加するが，v が大きくなるにつれて $\dfrac{dv}{dt}$ は小さくなり，v の増加の割合は次第に小さくなる。十分に

時間がたち，$v \to v_\infty = \dfrac{mg}{k}$ となると，$\dfrac{dv}{dt} \to 0$ となり，v は一定値 v_∞ となって変化しなくなる。これより，落下速度 v は時間 t とともに図4.5のように変化することがわかる。このときの v_∞ を**終端速度**（terminal velocity）という。

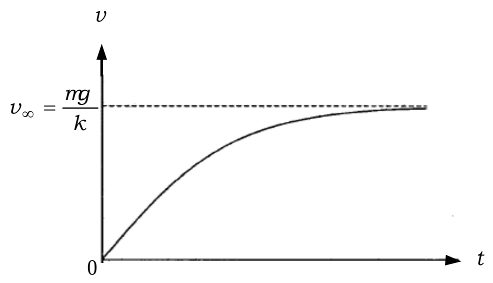

図 4.5

運動方程式を解く

運動方程式(4.3)は**変数分離型微分方程式**（differential equation with separable variables）とよばれ，物理ではしばしば登場する方程式であり，次のようにして解く（速度 v を t の関数として求める）ことができる。$k/m = \gamma$ とおいて，

$$\frac{1}{g-\gamma v}\frac{dv}{dt} = 1 \tag{4.4}$$

ここで，(4.4)式の両辺を t で積分する。

$$\int \frac{1}{g-\gamma v}\frac{dv}{dt}dt = \int dt$$

上式の左辺は，積分変数を t から t の関数である v に変換して積分する**置換積分法**（integration by substitution）を表しており，$\dfrac{dv}{dt}dt \to dv$ としてこの式は,

$$\int \frac{dv}{g-\gamma v} = \int dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\gamma}\log|g-\gamma v| = t + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{g}{\gamma}\left(1 - C_1 e^{-\gamma t}\right),\quad C_1 = \frac{1}{g}e^{-\gamma C}$$

となる。ここで，初期条件を「$t=0$ のとき，$v=0$」とすると，$C_1 = 1$ と定まり，

$$v = \frac{g}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \tag{4.5}$$

と求められる。

例題 4.3　質点の斜め投射

図 4.6 のように，時刻 $t=0$ に，質量 m の質点 P を原点 O から x 軸（水平方向）と角 θ_0 をなす向きに，初速 v_0 で投げ出す。P には粘性抵抗だけがはたらくとして，P の運動方程式を，x 方向と y 方向（鉛直方向で，上向きを正とする）に分けて立て，それより，P の速度 (v_x, v_y) を時刻 t の関数として求めよ。また，

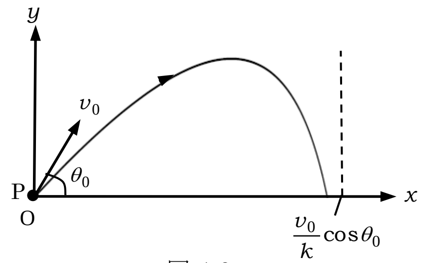

図 4.6

それらの終端速度を求め，v_x と v_y のグラフの概形をそれぞれ描け。重力加速度 g はつねに一定値であるとする。さらに，P の位置座標 (x, y) を時刻 t の関数として求め，P の軌跡のグラフの概形が図 4.6 のようになることを確かめよ。

【解答】

任意の時刻 t における質点 P の速度 $\boldsymbol{v}$ が x 軸となす角を θ とすると，$\boldsymbol{v}$ （$|\boldsymbol{v}| = v$）は，

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y) = (v\cos\theta, v\sin\theta)$$

と書ける。ここで，粘性抵抗の比例係数を mk とおくと，抵抗力 $\boldsymbol{f}$ は，

$$\boldsymbol{f} = (-mkv\cos\theta, -mkv\sin\theta) = (-mkv_x, -mkv_y)$$

となる。これより P の x 方向，y 方向の運動方程式はそれぞれ，

$$m\frac{dv_x}{dt} = -mkv_x \tag{4.6}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mkv_y - mg = -mk\left(v_y + \frac{g}{k}\right) \tag{4.7}$$

(4.6), (4.7)式はそれぞれ変数分離型微分方程式であるから，(4.3)式と同様に解くことができる。(4.6), (4.7)式にそれぞれ初期条件「$t = 0$ のとき，$v_x = v_0\cos\theta_0$，$v_y = v_0\sin\theta_0$」を用いて，

$$(v_x, v_y) = \underline{\left(v_0\cos\theta_0 \cdot e^{-kt},\ -\frac{g}{k} + \left(v_0\sin\theta_0 + \frac{g}{k}\right)e^{-kt}\right)}$$

を得る。これらの終端速度は $t \to 0$ として，

$$(v_x, v_y) \to \underline{\left(0,\ -\frac{g}{k}\right)}$$

また，v_x と v_y のグラフは，それぞれ図 4.7a,b のようになる。

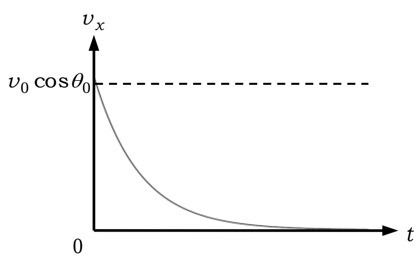

図 4.7a

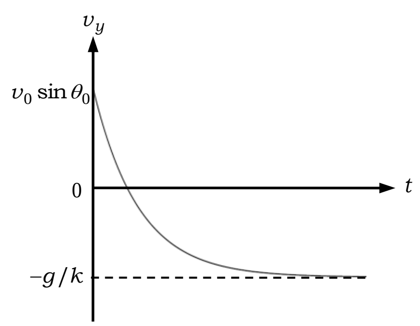

図 4.7b

さらに，v_x，v_y を初期条件「$t = 0$ のとき，$x = y = 0$」を用いて t に関して積分して，

$$(x, y) = \underline{\left(\frac{v_0}{k}\cos\theta_0\left(1-e^{-kt}\right),\ -\frac{g}{k}t+\frac{1}{k}\left(v_0\sin\theta_0+\frac{g}{k}\right)\left(1-e^{-kt}\right) \right)}$$

を得る。$t\to\infty$ で，上式の x 座標は $x\to\dfrac{v_0}{k}\cos\theta_0$， y 座標は $y\to-\infty$ となる。これより，

P の軌道のグラフの漸近線は $x=\dfrac{v_0}{k}\cos\theta_0$ となり，図 4.6 を得る。 ■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

4.2　慣性力

慣性系に対して加速度 $\boldsymbol{a}$ で加速度運動している座標系で質量 m の物体の運動を観測すると，物体には，真の力以外に，見かけ上の力である**慣性力**（inertial force） $-m\boldsymbol{a}$ が作用する。

(1)　加速度系での慣性力

図 4.8 のように，大きさ α の加速度で右向きに動いている電車内の粗い床上に，質量 M の物体が置かれ, 電車内でみると, 左向きに大きさ β の加速度をもって滑っているとする。物体と床の間の動摩擦係数を μ とする。この物体の運動を電車内の A 君（加速度系）と，電車外で地面に静止している B 君（静止系）が見る場合を考える。

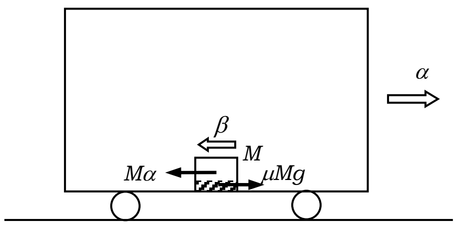

図 4.8

A 君が見る

物体には左向きに大きさ $M\alpha$ の慣性力がはたらいて電車の床上を左向きに滑り出し，床から大きさ μMg の動摩擦力が右向きにはたらく。それらの合力を受けて，物体は左向きに大きさ β の加速度で運動している。よって運動方程式は,

$$M\beta = M\alpha - \mu Mg \tag{4.8}$$

となる。

B 君が見る

物体の加速度は，右向きに $\alpha-\beta$ であり，物体に作用する力は，慣性力ははたらかないので，右向きの大きさ μMg の動摩擦力だけである。したがって，運動方程式は,

$$M(\alpha-\beta) = \mu Mg \tag{4.9}$$

となる。

静止系で解くことができる

(4.8)式と(4.9)式は，数学的に全く同じ式であり，このことは，慣性力を用いることなく静止系で物体の運動方程式立てて，問題を解くことができることを示している。した

がって，原理的に考える限り，加速度系で慣性力を用いた考察をする必要はないが，課題によっては，加速度系で考えた方が考え易い場合があり，そのような場合は，慣性力を用いて加速度系で考察するのがよい。

(2)　慣性力の一般的導出

図 4.9 のように，質量mの質点 P の慣性系の原点 O から位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$，加速度系の原点O′の点 O からの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_0$, P の点O′からの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}'$とすると，

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}' \qquad (4.10)$$

となる。真の力を$\boldsymbol{f}$とすると，慣性系で P の運動方程式は，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f} \qquad (4.11)$$

であるから，(4.10)式を(4.11)式に代入して，加速度系の加速度を$\boldsymbol{\alpha} = \ddot{\boldsymbol{r}}_0$とおくと，

$$m(\ddot{\boldsymbol{r}}_0 + \ddot{\boldsymbol{r}}') = \boldsymbol{f} \quad \therefore \quad m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{f} - m\boldsymbol{\alpha}$$

となる。これは，加速度系での運動方程式であり，そこには，真の力$\boldsymbol{f}$以外に，慣性力$-m\boldsymbol{\alpha}$が作用することを示している。

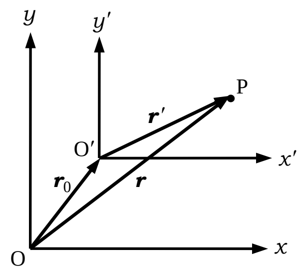

図 4.9

(3)　慣性力の例

加速度系で慣性力を考えると理解しやすい例を考えよう。

例題 4.4　電車の天井から吊るされた小球

図 4.10 のように，大きさαの加速度で右向きに動いている電車内で，質量mの小球が軽い（質量の無視できる）糸で天井から吊るされて，電車に対して静止している。このときの糸の張力，および，糸が鉛直方向となす角をθとしたときの$\tan\theta$の値を，電車内の人（加速度系）と電車外に静止している人（静止系）の両方の座標系で求めよ。ただし，空気の影響は無視し，重力加速度の大きさをgとする。

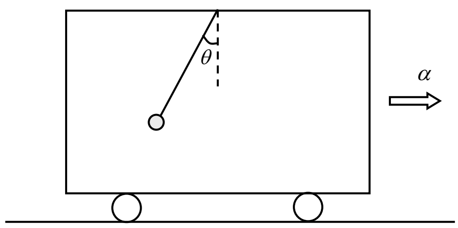

図 4.10

【解答】

(i)　加速度系

図 4.11 のように，小球には鉛直下向きに大きさmgの重力，水平左向きに大きさ$m\alpha$の慣性力がはたらくから，それとつり合うように糸から大きさ$T = \underline{m\sqrt{g^2+\alpha^2}}$の張力がはたらく。このとき，$\tan\theta = \underline{\alpha / g}$となる。

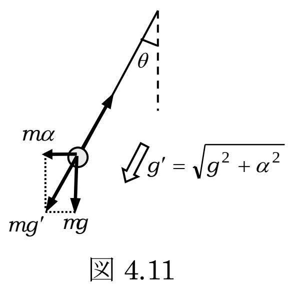

図 4.11

慣性力のはたらく電車内では，大きさ$g' = \sqrt{g^2+\alpha^2}$の

見かけ上の重力加速度（apparent acceleration of gravity）が，鉛直下方から角θだけ電車の加速度と逆向きに生じると見なすことができる。このとき，小球には，大きさmg'の**見かけ上の重力**（apparent gravity）が作用する。

(ii)　静止系

小球は，重力mgと張力Tが作用して，電車とともに大きさαの加速度で右向きに運動している。小球の水平方向の運動方程式と鉛直方向のつり合いの式は，

$$\text{水平方向：} m\alpha = T\sin\theta, \qquad \text{鉛直方向：} T\cos\theta - mg = 0$$

これらより，$\tan\theta = \underline{\alpha / g}$と$T = \underline{m\sqrt{g^2+\alpha^2}}$を得る。■

例題 4.5　電車内の風船

空気より軽いヘリウムの詰められた風船に付けられた糸の端を，大きさαの加速度で右向きに動いている電車の床に固定した。風船はどの位置に上がるか。風船に付けられた糸と鉛直方向のなす角の正接を求めよ。

【解答】

電車内のすべての物体には，見かけ上の重力がはたらくから，風船には，周囲の空気から風船と同体積の空気にはたらく見かけ上の重力と同じ大きさの力が，見かけ上の重力と逆向きにはたらく。したがって，<u>風船は電車の加速度の方向に向</u>き，糸が鉛直線となす角をθとすると，$\tan\theta = \underline{\alpha / g}$となる（図 4.12）。■

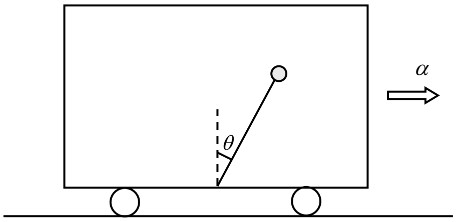

図 4.12

例題 4.6　三角柱台上の小物体の運動

質量Mの三角柱台がなめらかな水平面上に置かれ，水平面と角θをなす台のなめらかな斜面上に質量mの小物体が手で支えられ，台と小物体は静止している。手の支えをはずすと小物体が斜面上を滑り出すと同時に，台も水平面上を動き出した。小物体が滑るときの斜面に対する相対加速度の大きさを，台とともに動く観測者から見た運動を考えて求めよ。すべての摩擦や抵抗は無視し，重力加速度の大きさをgとする。

【解答】

図 4.13 のように，小物体が三角柱台の斜面上を滑っているとき，台の水平左向きの加速度の大きさをAとすると，小物体には，鉛直下方に大きさmgの重力，台からはたらく大きさNの垂直抗力に加えて，水平右向きに大きさmAの慣性力がはたらく。これらの力を受けて，

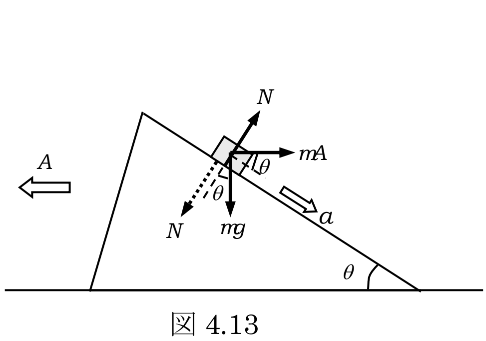

図 4.13

小物体は斜面上を斜面に対して大きさ a の加速度で滑る。また，水平左向きに小物体から台に加わる垂直抗力の水平成分 $N\sin\theta$ によって，台は左向きに加速度 A で運動する。

台から見た小物体と，水平面から見た台のそれぞれの運動方程式は,

小物体の斜面方向： $ma = mg\sin\theta + mA\cos\theta$ (4.12)

小物体の斜面垂直方向： $0 = N + mA\sin\theta - mg\cos\theta$ (4.13)

台の水平左方向： $MA = N\sin\theta$ (4.14)

(4.13), (4.14)式より N を消去して,

$$A = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g$$

これを(4.12)式に代入して,

$$\underline{a = \frac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g}$$

■

第５章　保存則―運動方程式の積分―

運動方程式が与えられれば，原理的にはすべての力学の問題は解くことができるはずであるが，運動方程式は，時間tに関する２階微分方程式であり，解くことのできるものは限られている。そこで，運動方程式を解かなくても，力学的状況を理解できるように，あらかじめ運動方程式を変形（積分）して，**保存則**（law of conservation）とよばれる法則をつくり，この法則を用いて力学現象を理解する方が，便利なことが多い。このような保存則には，運動量保存則，エネルギー保存則，角運動量保存則の３つがあるが，ここでは，前者の２つの保存則について考えよう。

5.1　運動量と力積

以下簡単化のために，特に断らない限り，x軸に沿った直線運動を考える。一般的には３次元運動の場合であっても，それぞれの座標軸に沿った保存則を合わせれば，同様な保存則が成り立つ。

(1)　運動方程式の積分

図 5.1 のように，質量mの質点 P が，時刻tとともに変化する力Fを受けながら，時刻t_1に速度v_1で，時刻t_2に速度v_2で運動していた。P が任意の時刻tにおいて, 座標xの点を速度vで動いているとすると，その運動方程式は,

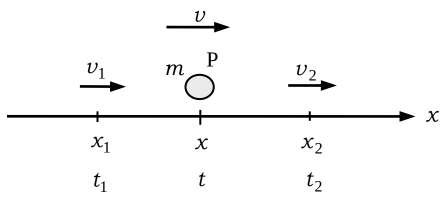

図 5.1

$$m\frac{dv}{dt}=F$$

と書ける。この式の両辺を時刻t_1からt_2まで積分する。

$$\int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}dt=\int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

この式の左辺は，第４章で述べたように，tからvへの置換積分であり，$\dfrac{dv}{dt}dt \to dv$となり，積分区間は$t_1 \to v_1$，$t_2 \to v_2$となる。このとき左辺は,

$$\int_{v_1}^{v_2} m\,dv = mv_2 - mv_1$$

となる。ここで，質量と速度の積を**運動量**（momentum）とよぶことにすると，この式は，時刻t_1からt_2　までの運動量変化を表している。

また，右辺は，力に微小時間dtをかけてそれらをt_1からt_2まで加え合わせることを表す。力Fが時間tだけ作用したとき，$F \cdot t$を**力積**（impulse）という。いまの場合，力が時間とともに変化するので，Fをtで積分した。そこで，Fをtで積分した量を力積Iと表そう。

こうして，運動量と力積の関係

$$mv_2 - mv_1 = I \tag{5.1}$$

が導かれる。

(2)　運動量保存則と外力の力積

２つの物体が互いに力を及ぼし合いながら運動する場合を考えよう。図 5.2 のように，質量 m_1 の質点１と質量 m_2 の質点２が，時刻 t_1 から t_2 まで互いに大きさ f の力を及ぼし合い，質点１が速度 v_1 から v_1' に，質点２が速度 v_2 から v_2' になったとする。この間の質点１と２の運動量と力積の関係はそれぞれ，

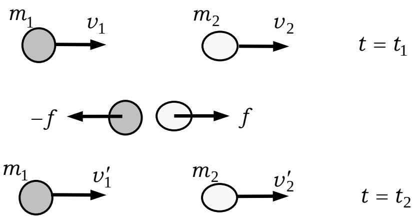

図 5.2

$$m_1v_1' - m_1v_1 = \int_{t_1}^{t_2} (-f)\,dt\,,\quad m_2v_2' - m_2v_2 = \int_{t_1}^{t_2} f\,dt \tag{5.2}$$

となる。ここで，質点１から２に及ぼす力と２から１に及ぼす力の間には，作用・反作用の法則（運動の第３法則）が成り立つことを用いた。これらを辺々加えると，力積の項は消えて，

$$m_1v_1' + m_2v_2' = m_1v_1 + m_2v_2 \tag{5.3}$$

を得る。この式は，力を及ぼし合う前後で２質点の運動量の和が等しいことを示しており，**運動量保存則**（law of conservation of momentum）が成り立っている。このとき，質点１と２が互いに及ぼし合う作用 f と反作用 $-f$ は**内力**（internal force）とよばれる。

いま，時刻 t_1 から t_2 の間に，質点１と２に**外力**（external force） F がはたらいたとすると，質点１の運動量は F による力積だけさらに変化し，

$$m_1v_1' - m_1v_1 = \int_{t_1}^{t_2} (-f)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$$

となる。このとき(5.3)式の代わりに，

$$(m_1v_1' + m_2v_2') - (m_1v_1 + m_2v_2) = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt \tag{5.4}$$

が成り立つ。(5.4)式は，一般に，

「全運動量変化＝外力の力積」　(5.5)

が成り立つことを示している。したがって，外力の力積がゼロであれば，全運動量は保存されるが，ゼロでなければ，その力積だけ全運動量は変化する。

ただし，外力は第３者から加えられる力であるから，その反作用は第３者に及ぶ。そこで，第３者を含めた運動量変化を考えれば，全体の運動量は保存されることになる。したがって，外力がはたらきえない全宇宙の運動量は保存されることになる。ここで，外力は，見方を変えて，全体の運動量変化を考えると内力と見なされることに注意しよう。

例題 5.1　板上の小物体の運動

図 5.3 のように，質量Mの板 Q がなめらかな床上に置かれ，粗い板の上面に質量mの小物体 P が置かれている。P と Q の間の動摩擦係数はμである。はじめ P と Q はともに静止していたが，P に水平右向きに大きさIの力積を瞬間的に加えたところ，P は Q 上を右向きに滑り出し，ある距離だけ滑った後，P と Q は同じ速度になって（一体になって）床上を右向きに滑って行った。P が Q 上を滑る時間と，一体になったときの PQ の速さを求めよ。板と床の間の摩擦は無視できる。

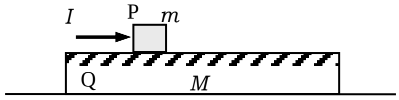

図 5.3

【解答】

小物体 P に大きさIの力積が与えられる瞬間に板 Q に作用する右向きの大きさμmgの動摩擦力による微小時間の力積は無視できる。よって，力積が与えられた直後の Q の速さもゼロと見なすことができる。

その後，P と Q に外部から水平方向の外力ははたらかないから，P, Q 全体の運動量は，はじめに P に加えられた力積Iに等しく，一定に保たれる。よって，一体になった PQ の速さをVとすると，

$$I=(m+M)V \quad \therefore \quad V=\underline{\frac{I}{m+M}}$$

P が Q 上を滑っている時間tの間，Q には右向きに動摩擦力μmgがはたらき，Q の速さは 0 からVになる（図 5.4）。Q の運動量と力積の関係は，

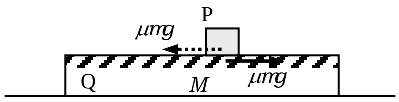

図 5.4

$$MV-0=\mu mg\cdot t \quad \therefore \quad t=\frac{MV}{\mu mg}=\underline{\frac{MI}{\mu mg(m+M)}}$$

■

(3)　衝突とはね返り係数

それぞれ速度v_1, v_2をもつ質点 1 と 2 が衝突し，速度v_1', v_2'になる直線上の衝突（v_1, v_2とv_1', v_2'はすべて同一直線上にある）を考えるとき，

$$e=-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2} \tag{5.6}$$

を**反発係数**（coefficient of restitution）（あるいは**はね返り係数**）という。もし，質点 2 が固定された面であるとすると，$v_2=v_2'=0$となるから，

$$v_1'=-ev_1 \tag{5.7}$$

となる。一般の衝突では，$0\le e\le 1$となる。

例題 5.2　小物体の床への衝突

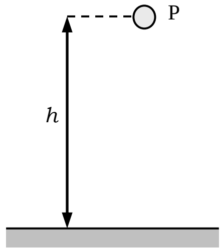

図 5.5

図 5.5 のように，小球 P を床から高さ h の点から初速 0 で落下させると，しばらく弾んだ後，はね返らなくなる。P が床に衝突してからはね返らなくなるまでの時間を求めよ。

ただし，P と床とのはね返り係数を e（$0 < e < 1$），重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗を無視する。また，P の大きさも無視できる。

【解答】

小球 P がはじめて床に衝突する直前の速さ v_0 は，等加速度運動の式より，

$$v_0^2 - 0^2 = 2gh \quad \therefore \quad v_0 = \sqrt{2gh}$$

１回目に衝突した直後の P の速さは，$v_1 = ev_0$ であり，２回目に衝突する直前の速さも同じ v_1 であり，１回目から２回目に衝突するまでの時間 t_1 は，

$$v_1 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0 \quad \therefore \quad t_1 = \frac{2v_1}{g} = e\frac{2v_0}{g} = et_0 \quad (t_1 \neq 0)$$

ここで，時間 t_0 を $t_0 = 2v_0 / g$ とおいた。

２回目に衝突した直後の P の速さは，$v_2 = ev_1 = e^2 v_0$ であるから，２回目から３回目に衝突するまでの時間 t_2 は，上と同様にして，$t_2 = 2v_2 / g = e^2 t_0$ となる。以下同様に，n 回目の衝突から $(n+1)$ 回目の衝突までの時間は，$t_n = e^n t_0$ となるから，無限回衝突してはね返らなくなるまでの時間 T は，

$$T = t_1 + t_2 + \cdots + t_n + \cdots = \frac{1}{1-e} t_1 = \frac{e}{1-e} t_0 = \underline{\frac{2e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}} \qquad ■$$

5.2　仕事とエネルギー

仕事の定義

仕事は，日常生活で用いる仕事とは異なり，物理では，次のように定義される。

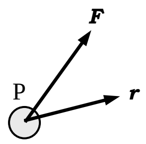

図 5.6

図 5.6 のように，質点 P に力 $\boldsymbol{F}$ を加えたとき，P が $\boldsymbol{r}$ だけ変位したとき，$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{r}$ の内積で定義される

$$W \equiv \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} \tag{5.8}$$

を**仕事**（work）という。

以下，$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{r}$ が x 軸に平行であるとする。

力 F が質点 P の位置 x とともに変化するとき，P が点 x_1 から点 x_2 まで移動する間の F のする仕事 $W(x_1 \to x_2)$ は，

$$W(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx \tag{5.9}$$

で与えられる。

(1)　仕事とエネルギー

5.1(1)で運動量と力積の関係を考えたときと同様に，質量mの質点Pが，Pの座標xとともに変化する力Fを受けながら，時刻t_1に座標x_1の点を速度v_1で通過し，時刻t_2に座標x_2の点を速度v_2で通過したとする（図5.1）。

今回は，Pの運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

の両辺に速度$v = \dfrac{dx}{dt}$をかけてt_1からt_2まで積分する。これは単に，右辺からPになされる仕事の表式を導くための積分操作である。

$$\int_{t_1}^{t_2} mv\frac{dv}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

この式の左辺は，tからvへの置換積分であり，積分区間は$v_1 \to v_2$となり，

$$左辺 = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

一方，右辺は，tからxへの置換積分であり，積分区間は$x_1 \to x_2$となり，

$$右辺 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = W(x_1 \to x_2)$$

こうして，関係式

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W(x_1 \to x_2) \tag{5.10}$$

を得る。ここで，質量mをもつPが速度vで運動しているとき，$\dfrac{1}{2}mv^2$をPの**運動エネルギー**（kinetic energy）とよぶ。(5.10)式は，Pに力Fが仕事をすると，その分，Pのもつ運動エネルギーが変化することを示している。

(2)　保存力と力学的エネルギー

質点に力を加えて動かすとき，力のする仕事が，質点の始点と終点だけで決まり，途中の経路によらない力を**保存力**（conservative force）といい，それに対して，仕事が途中の経路によって異なってしまう力を**非保存力**（nonconservative force）という。保存力には，重力，ばねの弾性力などがあり，非保存力には，摩擦力，垂直抗力などがある。

例題5.3　動摩擦力の仕事

小物体Pが直線的に移動する場合を考えて，Pに作用する動摩擦力は非保存力であるこ

とを示せ。

【解答】

図 5.7 のように，粗い水平面上に x 軸をとり，質量 m の小物体 P が位置 x_1 から x_2 $(>x_1)$ まで移動する間，P に作用する動摩擦力の仕事を考える。P と水平面の間の動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とすると，P には，大きさ μmg の動摩擦力が P の進行方向と逆向きに作用する。したがって，x_1 から x_2 まで，直接移動する間の動摩擦力のする仕事 $W_\mu(x_1 \to x_2)$ は，x 軸正方向の力を正として，動摩擦力 $-\mu mg$ と変位 $(x_2 - x_1)$ の積として，

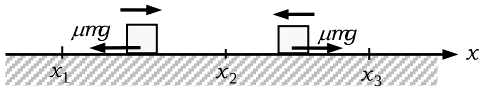

図 5.7

$$W_\mu(x_1 \to x_2) = -\mu mg \cdot (x_2 - x_1)$$

となる。一方，x_1 から x_2 を通り越して x_3 $(>x_2)$ まで移動した後，x_2 に戻る場合の動摩擦力の仕事 $W_\mu(x_1 \to x_3 \to x_2)$ を考える。この場合，$x_3 \to x_2$ では，動摩擦力は μmg であり，変位は $x_2 - x_3$ であることに注意して，

$$W_\mu(x_1 \to x_3 \to x_2) = -\mu mg \cdot (x_3 - x_1) + \mu mg \cdot (x_2 - x_3) = -\mu mg \cdot (2x_3 - x_1 - x_2)$$

$$\therefore \quad W_\mu(x_1 \to x_3 \to x_2) \neq W_\mu(x_1 \to x_2)$$

となる。したがって，x_1 から x_2 まで移動する間の動摩擦力のする仕事は，途中の経路によって異なり，動摩擦力は非保存力であることがわかる。 ■

例題 5.4　重力の仕事

質点 P が直線的に移動する場合，P に作用する重力は保存力の性質を満たすことを示せ。

【解答】

図 5.8 のように，鉛直上向きに h 軸をとり，質量 m の質点 P が高さ h_1 の点から h_2 $(>h_1)$ の点まで移動させる間の重力の仕事を考える。h_1 から h_2 まで，直接移動する間の重力の仕事 $W_g(h_1 \to h_2)$ は，

$$W_g(h_1 \to h_2) = -mg \cdot (h_2 - h_1)$$

P が h_2 を通り越して h_3 $(>h_2)$ まで上昇し，その後，h_2 に戻るときの仕事 $W(h_1 \to h_3 \to h_2)$ は，重力がつねに h 軸の負の向きに作用することに注意すると，

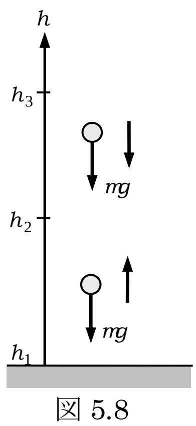

図 5.8

$$W(h_1 \to h_3 \to h_2) = -mg \cdot (h_3 - h_1) - mg \cdot (h_2 - h_3)$$
$$= -mg \cdot (h_2 - h_1)$$
$$= W_g(h_1 \to h_2)$$

となり，この場合，重力は保存力の条件を満たすことがわかる。 ■

(3)　保存力と位置エネルギー

次に，質点 P がある点にいるだけでもつ位置エネルギーという量を考えよう。点 A から点 O まで動く間の力 f のする仕事が，途中の経路によらず一定に定まるならば，すなわち，f が保存力であれば，P は A にいるだけで，点 O にいるときよりもその仕事の分だけエネルギーを余分にもっていると見なすことができる。このエネルギーを**位置エネルギー**という。位置エネルギーは，英語で potential energy という。‘potential’とは，‘潜在的’という意味である。

基準となる点 O を決めて，保存力 f による点 A の O に対する位置エネルギー $U_f(\mathrm{A})$ を，点 A から O まで P を移動させる間の f のする仕事 $W_f(\mathrm{A} \to \mathrm{O})$ と定義する。

$$U_f(\mathrm{A}) = W_f(\mathrm{A} \to \mathrm{O}) \qquad (5.11)$$

重力の位置エネルギー

地面を基準（位置エネルギーゼロ）としたときの高さ h の点の重力の位置エネルギー $U_g(h) = W_g(h \to 0)$ は（図 5.9），

$$U_g(h) = mg \cdot h = mgh \qquad (5.12)$$

となる。

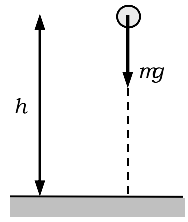

図 5.9

弾性エネルギー

質量の無視できる弾性定数 k のばねの左端を固定して右端に質点 P を付ける（図 5.10）。ばねが自然長のときの P の位置を原点 $x = 0$ に，ばねに沿って x 軸をとる。P を位置 x_0 に移動したとき，$x = 0$ を基準（位置エネルギーゼロ）として，P のもつ弾性力の位置エネルギー（これを，単に**弾性エネルギー**（elastic energy）という）$U_k(x_0) = W_k(x_0 \to 0)$ は，

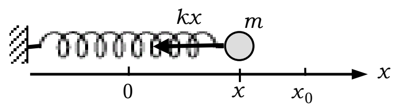

図 5.10

$$U_k(x_0) = \int_{x_0}^{0} (-kx)\,dx = \int_{0}^{x_0} kx \cdot dx = \frac{1}{2}kx_0^2 \qquad (5.13)$$

(4)　力学的エネルギー

質点 P に保存力 f と非保存力 F が作用すると，合力の仕事は，f のする仕事 W_f と F のする仕事 W_F の和である。そこで，基準点 O の座標を x_0 として(5.10)式を次のように書き直す（図 5.11）。

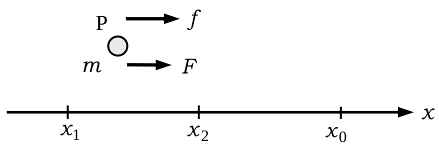

図 5.11

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= W(x_1 \to x_2) \\ &= W_f(x_1 \to x_2 \to x_0) - W_f(x_2 \to x_0) + W_F(x_1 \to x_2) \\ &= U_f(x_1) - U_f(x_2) + W_F(x_1 \to x_2)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left\{\frac{1}{2}mv_2^2 + U_f(x_2)\right\} - \left\{\frac{1}{2}mv_1^2 + U_f(x_1)\right\} = W_F(x_1 \to x_2) \tag{5.14}$$

いま，運動エネルギーと位置エネルギーの和を**力学的エネルギー**（mechanical energy）と定義すると，(5.14)式は,

「**力学的エネルギー変化＝非保存力の仕事**」 (5.15)

を表している。

例題 5.5　ばねから発せられる小球の高さ

図 5.12 のように，水平面 AD 上に置かれた質量の無視できるばね定数kのばねの左端は点 A に固定され，右端に接するように質量mの小球 P が置かれている。ばねが自然長のときのばねの右端の位置を B とし，ばねを距離aだけ押し縮めて P を放した。P は位置 B でばねから離れ，水平面上を D まで進み，D で滑らかに接続された水平面と角θをなす斜面上を上昇し，位置 E で P の速度が 0 になった。水平面上の距離lの BC 間だけに摩擦があり，P と面 BC の間の動摩擦係数をμ，重力加速度の大きさをgとする。BC 間以外の面の摩擦，および，P の大きさは無視できる。位置 E の水平面 AD からの高さhを求めよ。ここで，ばねの質量は無視できるので，位置 B で P が離れると，ばねは直ちに自然長で静止する。

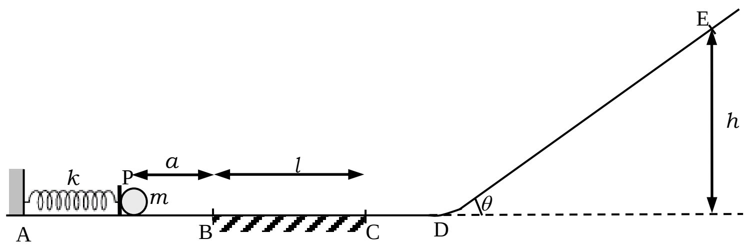

図 5.12

【解答】

ばねを自然長よりaだけ縮めたときの弾性エネルギーは$\frac{1}{2}ka^2$，水平面 AD を基準とした位置 E での P の重力の位置エネルギーはmgh，P が水平面 BC 間を滑っているときの動摩擦力の大きさはμmgである。ばねをaだけ縮めた状態と P が位置 E で速度が 0 になったときの間の，力学的エネルギー変化と動摩擦力（非保存力）の仕事との関係は,

$$mgh - \frac{1}{2}ka^2 = -\mu mg \cdot l \quad \therefore \quad h = \underline{\frac{ka^2}{2mg} - \mu l}$$ ■

例題 5.6　等質量２質点の弾性衝突

同じ質量mをもつ２つの質点 P, Q が弾性衝突する場合を考えよう。

(a)　直線的な衝突

図 5.13 のように，同じ質量mをもつ２つの質点 P, Q が，それぞれ速度v_1, v_2で弾性衝突したとき，衝突直後のそれぞれ速度v_1', v_2'を求めよ。質点の速度はすべて１直線上にあるものとする。

(b)　平面上の衝突

図 5.14 のように，質量mをもつ質点 P が速度$\vec{v}_0$で静止している質量mの質点 Q に弾性衝突した。衝突直後の２つの質点の速度のなす角を求めよ。

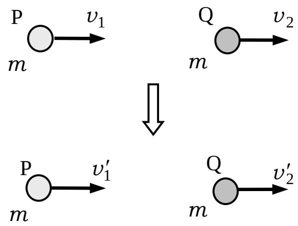

図 5.13

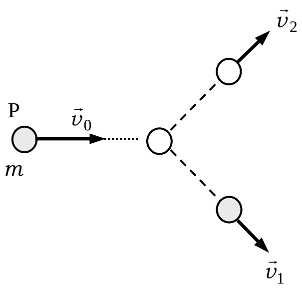

図 5.14

【解答】

(a)　衝突前後での運動量保存則とはね返り係数の式はそれぞれ，

$$mv_1 + mv_2 = mv_1' + mv_2',\quad 1 = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

これらより，

$$v_1' = \underline{v_2},\quad v_2' = \underline{v_1}$$

この結果は，よく知られた**２質点の速度交換**が起こることを示している。

(b)　衝突直後の質点 P と Q の速度をそれぞれv_1', v_2'とする。運動量保存則とエネルギー保存則の式は，ベクトル表現を用いてそれぞれ，

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2,\quad \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 = \frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2$$

運動量保存則の式の両辺を２乗してエネルギー保存則の式と比較すると，$|\vec{v}_0|^2 = \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0$などを用いて，

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \quad \therefore \quad \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

すなわち，２質点の速度のなす角は，$\underline{90^\circ}$ である。　■

5.3　物体系の運動

(1)　重心

質量$m_1, m_2, \cdots, m_n$のn個の質点が，それぞれ座標$x_1, x_2, \cdots, x_n$に置かれているとき，重心の座標x_Gを，

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)x_G \tag{5.16}$$

で定義する。(5.16)式の両辺を時刻tで微分すると，重心の速度$v_G = \dot{x}_G$は，それぞれの質点の速度を$v_1 = \dot{x}_1$，$v_2 = \dot{x}_2$，…，$v_n = \dot{x}_n$として，

$$m_1v_1 + m_2v_2 + \cdots + m_nv_n = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)v_G \tag{5.17}$$

で与えられることがわかる。(5.17)式の左辺は質点系の全運動量を表しているから，質点系に外力がはたらかなければ全運動量は保存し，重心の速度は一定に保たれることがわかる。

(2)　反発係数と相対運動

以下，簡単化のために，２つの質点系で考える。

質量m_1の質点が速度v_1で，質量m_2の質点が速度v_2で運動しているとき，それらの運動エネルギーの和Kは，

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\mu v_r^2 = K_G + K_R \end{aligned} \tag{5.18}$$

と書ける。ここで，$M = m_1 + m_2$は全質量，$v_r = v_1 - v_2$は相対速度であり，$\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$は**換算質量**（reduced mass）とよばれる。また，K_Gは重心運動エネルギー，K_Rは相対運動エネルギーとよばれる。(5.18)式は，単純な式変形で得られるものであるが，重要な意味をもつ。

時刻t_1において，質量m_1, m_2の２つの質点がそれぞれの速度v_1, v_2で運動している。その後，互いに力を及ぼし合い，時刻t_2にそれぞれ速度v_1', v_2'になったとする。この間，２質点の外から力が作用しなければ全運動量は保存され，重心の速度v_Gは一定に保たれ，重心運動エネルギーK_Gは変化しない。一方，この間に相対速度が$v_r = v_1 - v_2$から$v_r' = v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2) = -ev_r$に変化したとすると，相対運動エネルギーは，

$$K_R = \frac{1}{2}\mu v_r^2 \quad \Rightarrow \quad K_R' = \frac{1}{2}\mu v_r'^2 = e^2 \cdot \frac{1}{2}\mu v_r^2 = e^2K_R \tag{5.19}$$

と変化する。

いま，時刻t_1からt_2の間に質点間の衝突が起きたのであれば，eははね返り係数であり$0 \le e \le 1$である。これより，$e = 1$であれば全運動エネルギーは一定に保たれ，力学的エネルギーは保存されることがわかる。$0 \le e < 1$のとき，力学的エネルギーは失われる。

$e > 1$となるのは，２質点間で爆発などによりエネルギーが放出され，力学的エネルギ

ーが増加する場合である。

例題 5.7　動く台上の小物体の衝突 1

図 5.15 のように，なめらかな床上に，なめらかな斜面と水平面および鉛直な壁 W をもつ質量 M の台 D が静止している。D 上の水平面 BC から高さ h の点 A に，質量 m の小物体 P が支えられ，台とともに静止している。P の支えを外すと P は D 上を滑り出すと同時に，D は床上を滑り出す。斜面 AB は水平面 BC となめらかに接続している，P は BC 上に達した後，W とはね返り係数 e （$0 < e < 1$）で衝突し，その後，点 B を通過して斜面を上り，最高点 H に達した。点 H の水平面 BC からの高さ h' を求めよ。摩擦はすべて無視できるとする。

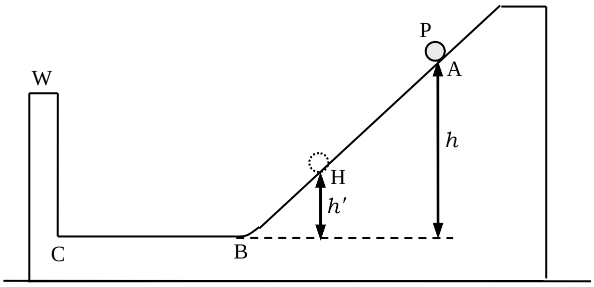

図 5.15

【解答】

はじめ小球 P と台 D は静止していたから全運動量はゼロであり，水平方向に外力は作用しない。よって全運動量はゼロのまま保存される。したがって，重心運動エネルギーはつねにゼロであり，P と D の運動エネルギーの和は，相対運動エネルギーに等しい。また，最高点 H では，P の D に対する相対速度はゼロであるから，P と D の速度はともにゼロであり，P と D の力学的エネルギーは，P の重力の位置エネルギーだけである。

衝突前後の運動エネルギーの和をそれぞれ K, K'，相対運動エネルギーをそれぞれ $K_{\mathrm{R}}, K'_{\mathrm{R}}$，水平面 BC に対する点 A と点 H での，P の重力の位置エネルギーをそれぞれ $U_{\mathrm{A}}, U_{\mathrm{H}}$ とする。このとき，力学的エネルギー保存則は，

$$K_{\mathrm{R}} = K = U_{\mathrm{A}} = mgh\,,\quad K'_{\mathrm{R}} = K' = U_{\mathrm{H}} = mgh'$$

と書ける。また，P と壁 W のはね返り係数は e であるから，

$$K'_{\mathrm{R}} = e^2 K_{\mathrm{R}}$$

となり，

$$mgh' = K'_{\mathrm{R}} = e^2 K_{\mathrm{R}} = e^2 \cdot mgh \qquad \therefore \quad h' = \underline{e^2 h}$$

■

第６章　円運動と単振動

6.1　円運動と遠心力

(1)　遠心力

図 6.1 のように，長さlの糸一端を水平面上の点 O に固定し，他端に質量mの質点 P を取り付け，P に速さvを与えて，O を含む水平面内で O のまわりに円運動させた。円運動の角速度は$\omega = v/l$であるから，その向心加速度の大きさa_rは，

$$a_r = \frac{v^2}{l} = l\omega^2 \qquad (6.1)$$

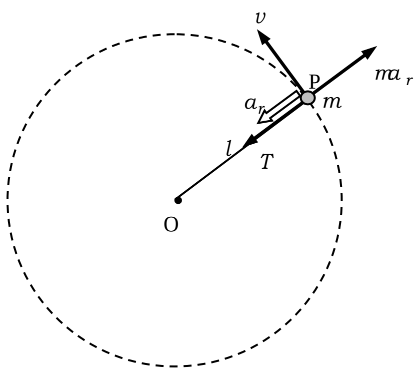

図 6.1

で与えられる（1.2 節参照）。この運動を，P とともに回転する観測者（回転座標系）S から見ると，P に大きさ$f_c = ma_r$の慣性力が O から離れる向きにはたらく。この慣性力を**遠心力**（centrifugal force）という。

回転していない慣性系から見ると，質点 P の中心方向の運動方程式は，糸の張力をTとすると，(6.1)式を用いて，

$$ma_r = T \qquad (6.2)$$

となる。一方，観測者 S から見ると，質点 P は静止しているから，P に作用する力はつり合っている。したがって，中心方向の力のつり合いの式は，

$$T = f_c = ma_r$$

となり，(6.2)式と一致する。このことは，円運動の問題を考えるとき，**中心方向の運動方程式を用いても，遠心力を考えて力のつり合いの式を用いても，どちらでも同等である**ことを示している。

例題 6.1　円錐振り子

図 6.2 のように，長さlの糸の一端を天井の点 O に固定し，他端に質量mの小球 P を取り付け，糸が鉛直線となす角をθにして水平面内で等速円運動させた。P の速さvと円運動の周期Tを求めよ。重力加速度の大きさをgとし，空気抵抗や摩擦は無視する。

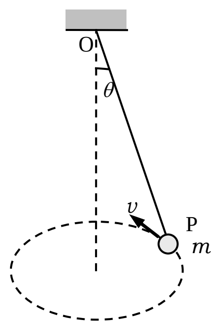

図 6.2

【解答】

円軌道の半径は$l\sin\theta$であるから，糸の張力をSとすると，小球 P の円運動の中心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{l\sin\theta} = S\sin\theta$$

また，P は水平面内で運動することから，鉛直方向の力のつり合いより，

$$S\cos\theta = mg$$

これらより S を消去して，

$$v = \underline{\sqrt{gl\sin\theta \cdot \tan\theta}}$$

円運動の周期 T は，

$$T = \frac{2\pi l\sin\theta}{v} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}}$$ ■

(2)　鉛直面内の円運動

図 6.3 のように，長さ l の糸の一端を点 O に固定し，他端に質量 m の小球 P を取り付け，P に最下点 A で水平方向に初速 v_0 を与えた。糸が鉛直線と角 θ（$0 \le \theta \le \pi$）をなすときの P の速さを v，糸の張力の大きさを T とすると，重力加速度の大きさを g として，P の運動方程式はそれぞれ，

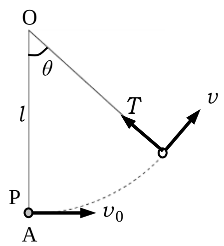

図 6.3

$$\text{中心方向：} m\frac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta \qquad (6.3)$$

$$\text{接線方向：} m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta \qquad (6.4)$$

となる。

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

まず，(6.4)式の両辺に $v = l\omega = l\dfrac{d\theta}{dt}$（$\omega$ は角速度）をかけて t で積分（エネルギー積分）を行う。左辺は 5.2 節で行ったように，$t \to v$ への置換積分により，

$$\int mv\frac{dv}{dt}dt = \int mv\,dv = \frac{1}{2}mv^2 + C \quad (C\text{：積分定数})$$

となる。右辺は，$t \to \theta$ への置換積分により，

$$-\int mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}dt = -mgl\int\sin\theta\,d\theta = mgl\cos\theta + C' \quad (C'\text{：積分定数})$$

ここで，初期条件「$t = 0$ のとき，$v = v_0$，$\theta = 0$」を用いて積分定数を決めて，鉛直面内の円運動におけるエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (6.5)$$

を得る。

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆**【発展終】**

(6.3), (6.5)式より，糸と鉛直線のなす角が θ のとき，糸の張力 T は，

$$T = m\frac{v_0^2}{l} + mg(3\cos\theta - 2)$$

となる。これより，θ が増加するとともに T は単調に減少し，最高点 B で糸の張力 T_1 は，

$$T_1 = m\frac{v_0^2}{l} - 5mg$$

となる。

小球 P が円軌道の最高点 B まで達するためには，それまで張力が作用し，糸は張ったままでなければならない。したがって，P が円運動をし続けるための初速 v_0 に対する条件は，$T_1 \geq 0$ より，

$$v_0 \geq \sqrt{5gl} \tag{6.6}$$

となる。また，最高点 B での P の速さ v_1 は，(6.5)式で $\cos\theta = -1$（$\theta = \pi$）とおいて，

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 4gl} \geq \sqrt{gl}$$

となる。

例題 6.2　動く円柱内面での円運動

図 6.4 のように，半径 r のなめらかな円柱状内面をもつ質量 m の台 D がなめらかな水平面上に置かれ，その左側の水平面上から質量 m の小球 P が，D に垂直に速さ v_0 で滑ってきて円柱状内面を滑り上がり，その最高点 H まで達した。この間，台 D は水平面上を右向きに滑るが，水平面から浮き上がることはないとする。P が点 H に達するためには，v_0 はいくら以上でなければならないか。摩擦や空気抵抗はすべて無視できる。

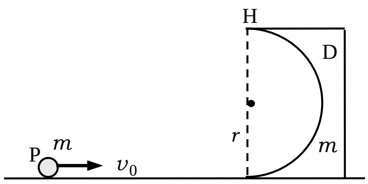

図 6.4

【解答】

小球 P は最高点 H に達したとき，台 D に対して水平方向右向きの速度をもつ。このとき，P に作用する遠心力の大きさは，P の D に対する**相対的な速さ**を u とすると[2]，$m\dfrac{u^2}{r}$ となり，その向きは鉛直上向きである。したがって，D から P に鉛直下向きに作用する垂直抗力の大きさ N は，

[2] 円運動の運動方程式は，円運動している座標系から見て成り立つ式であることに注意しよう。したがって，台 D に対する相対速度 u を用いる。もし，D が加速度運動している場合には，慣性力も考慮しなければならない。

$$N = m\frac{u^2}{r} - mg$$

となり，P が円柱状内面から離れないための u に対する条件は， $N \geq 0$ より，

$$u \geq \sqrt{gr} \tag{6.7}$$

となる。

また，P と D に水平方向に外力は作用しないので，それらの運動量の和は保存され，摩擦もないので，力学的エネルギーも保存される。P が最高点 H に達したときの D の速さを V とすると，このときの P の水平面に対する速度は右向きに $V-u$ となるから，運動量保存則は，

$$mv_0 = mV + m(V-u)$$

力学的エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}m(V-u)^2 + mg\cdot 2r$$

と書ける。これらより， V を消去して(6.7)式より，

$$v_0^2 = u^2 + 8gr \geq 9gr \quad \therefore \quad v_0 \geq \underline{3\sqrt{gr}}$$

を得る。 ■

6.2 単振動

(1) 単振動と等速円運動

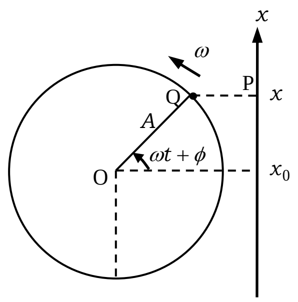

図 6.5

図 6.5 のように，点 O を中心とした半径 A の円周上を角速度 ω で等速円運動している点 Q がある。Q を x 軸へ正射影した点 P の運動を**単振動**（simple harmonic oscillation）という。時刻 $t=0$ における P の座標を $x = x_0 + A\sin\phi$ とすると，時刻 t における P の座標 x は，

$$x = x_0 + A\sin(\omega t + \phi) \tag{6.8}$$

となる。単振動を表す(6.8)式において， ω を**角振動数**（angular frequency）， A を**振幅**（amplitude），$\omega t + \phi$ を**位相**（phase）， ϕ を**初期位相**（initial phase）という。このとき，単振動が元の状態に戻るまでの時間すなわち**周期**（period） T は， ω を用いて $T = 2\pi/\omega$ となる。

一般に，質量 m の質点 P に，振動中心からのずれに比例する**復元力**（restoring force）（振動中心に戻そうとする力）がはたらくと，P は単振動をする。実際，P に x 軸上で $x = x_0$ に戻そうとする復元力が作用するとき，その運動方程式は， k を定数として，

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) \tag{6.9}$$

と書ける。(6.9)式に(6.8)式を代入すると，$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$ より，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.10}$$

のとき，(6.8)式は運動方程式(6.9)を満たし，角振動数が(6.10)式で与えられる単振動をすることがわかる。これより，周期は,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{6.11}$$

となる。

質量 m の質点 P の運動方程式が(6.9)式で与えられたとき，P は $x = x_0$ を中心に，角振動数が(6.10)式（周期が(6.11)式）で与えられる単振動することがわかる。ただし，運動方程式(6.9)から決まるのはここまでであり，単振動の振幅と初期位相は定まらない。それらは初期条件が与えられてはじめて定まる。

例えば，初期条件を

「$t = 0$ のとき， $x = 0$， $v = \dot{x} = 0$」　　(6.12)

とすると，(6.9)式を満たす P の位置 x が $x = x_0$ を中心に正弦関数で表されることから，そのグラフは，直観的に図 6.6 のようになることがわかる。これより，この場合の P の運動は,

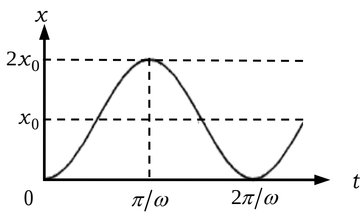

図 6.6

$$x = x_0(1 - \cos\omega t) \tag{6.13}$$

で与えられることがわかる。

解の数学的導出法

ω が(6.10)式で与えられるとき，$x - x_0 = \sin\omega t$ および $x - x_0 = \cos\omega t$ を(6.9)式に代入すると，ともに満たすことがわかる。このように，微分方程式を満たす関数を**解**（solution）という。一般に，２階微分方程式の２つの解がわかると，それらを任意定数倍したものの和は，**一般解**（general solution）とよばれ，すべての解を含む。一方，任意定数を含まない個別の解を**特解**（particular solution）（あるいは特殊解）という。そこで， B と C を任意定数として(6.9)式の一般解を,

$$x - x_0 = A\sin(\omega t + \phi) = B\sin\omega t + C\cos\omega t \tag{6.14}$$

とおく。(6.14)式の両辺を時刻 t で微分すると,

$$v = \dot{x} = B\omega\cos\omega t - C\omega\sin\omega t$$

となるから，これらに初期条件(6.12)を適用すると， $\omega \neq 0$ より,

$$B = 0,\quad C = -x_0$$

となる。こうして，(6.12)を満足する特解(6.13)を得ることができる。

(2)　エネルギー保存則

単振動の問題を解く上で，非常に役立つものに，単振動のエネルギー保存則がある。これは，通常の力学的エネルギー保存則と，やや異なる形式で用いられることが多い。

運動方程式(6.9)の両辺に $\dot{x}$ をかけて t で積分すると，

$$m\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right),\quad k(x-x_0)\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k(x-x_0)^2\right)$$

となる。$v = \dot{x}$ と書き，C を積分定数として，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = C \tag{6.15}$$

を得る。

例題 6.3　鉛直ばね振り子

図 6.7 のように，天井から吊るされた質量の無視できるばねに質量 m の小球 P を吊るしたところ，ばねは自然長から l だけ伸びてつり合った。つり合ったときの P の位置を原点に鉛直下向きに x 軸をとる。時刻 $t=0$ に，P を $x=2l$ の位置まで引き延ばして静かに放したところ，P は振動を始めた。P がはじめてばねの自然長の位置 $x=-l$ を通過する時刻と，そのときの速度を求めよ。重力加速度の大きさを g とする。

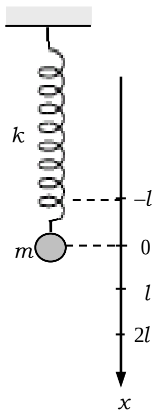

図 6.7

【解答】

ばね定数を k とすると，つり合いの位置での小球 P のつり合いの式は，

$$mg - kl = 0 \quad \therefore \quad k = \frac{mg}{l}$$

P の位置が x のとき，ばねの伸びは $x-(-l) = x+l$ であるから，その運動方程式は（図 6.8），

$$m\ddot{x} = mg - k(x+l) = -kx$$

これより，P は $x=0$ を中心に，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動をすることがわかる。また，初期条件「$t=0$ のとき，$x=2l$，$v=\dot{x}=0$」より，時刻 t での位置 x は，

$$x = 2l\cos\omega t \tag{6.16}$$

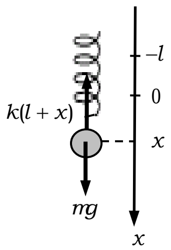

図 6.8

と表される。よって，はじめて $x=-l$ を通過する時刻 t_1 は，

$$-l = 2l\cos\omega t_1 \quad \Rightarrow \quad \cos\omega t_1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = \underline{\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

また，(6.16)式より，はじめて $x=-l$ を通過する速度 v_1 は，

$$v_1 = -2l\omega\sin\omega t_1 = -2l\omega\sin\frac{2\pi}{3} = \underline{-l\sqrt{\frac{3k}{m}}}$$

■

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

(3)　単振動のいくつかの例

　単振動は物理全体の理解にとって重要であるから，ここで，単振動とそれに関連する例をいくつか考えておこう。

例題 6.4　ばねに付けられた板上の小物体

　図 6.9 のように，下端が床に固定され，上端に質量 M の薄い板 A が付けられたばね定数 k の，質量の無視できるばねが鉛直に置かれている。A の上には，質量 m の小物体 P が置かれ，つり合いの位置 O で静止している。いま，点 O を原点に鉛直上向きに x 軸をとる。ばねを押し縮めて A を位置 $x=-L$ で放したら，位置 S で P は A から離れて上昇した。位置 S の座標 x_1 と，その点を通過する A と P の速さ v_1 を求めよ。

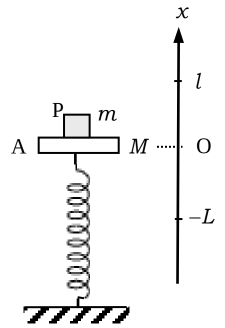

図 6.9

【解答】

　ばねが自然長のときの板 A の位置を $x=l$ とすると，位置 O でのつり合いの式は，

$$kl-(M+m)g=0 \quad \therefore \quad l=\frac{(M+m)g}{k}$$

　板 A の上に小物体 P が載って運動しているとき，P にはたらく垂直抗力の大きさを N とする。A の位置が x のときの P と A の運動方程式を立てると（図 6.10），

$$\text{P：}\ m\ddot{x}=N-mg \tag{6.17}$$

$$\text{A：}\ M\ddot{x}=k(l-x)-N-Mg \tag{6.18}$$

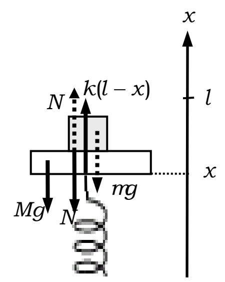

図 6.10

　これらより加速度 $\ddot{x}$ を消去すると，

$$N=\frac{m}{M+m}k(l-x)$$

となる。$N\geq 0$（すなわち，$x\leq l$）のとき，P は A に接しており，P が A から離れる瞬間，$N=0$ となるから，位置 S は $N=0$ より，

$$x_1=l=\underline{\frac{(M+m)g}{k}}$$

　ここで，位置 S は，ばねが自然長のときの A の位置であることに注意しよう。

　運動方程式(6.17)と(6.18)の辺々和をとると，

$$(M+m)\ddot{x}=k(l-x)-(M+m)g=-kx$$

となる。これよりエネルギー保存則は，C を定数として，

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2+\frac{1}{2}kx^2=C$$

と書けるから，$\begin{cases} x = -L \\ \upsilon = 0 \end{cases}$ と $\begin{cases} x = l \\ \upsilon = \upsilon_1 \end{cases}$ を上式の左辺に代入して等しいとおくと，

$$\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}k\left\{\frac{(M+m)g}{k}\right\}^2$$

$$\therefore \quad \underline{\upsilon_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m}L^2 - \frac{M+m}{k}g^2}}$$ ■

例題 6.5　台車に引かれた物体の運動

図 6.11 のように，質量 m の物体 P が，台車に繋がれた質量の無視できるばね（ばね定数は k ）に付けられて粗い床上に置かれている。ばねが自然長の状態から台車は瞬間的に右向きに一定速度 V で動き出した。その後，台車から見るとばねは周期的な振動運動をした。ばねの伸びの最大値を求めよ。また，P が再び床に対して静止するときのばねの伸びを求めよ。ただし，物体と床の間の静止摩擦係数を 2μ，動摩擦係数を μ，重力加速度を g とする。

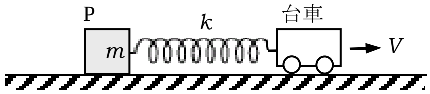

図 6.11

【解答】

はじめに物体 P が床の上を滑り出すときのばねの伸び x_0 は，滑り出す直前の P のつり合いより，

$$kx_0 = 2\mu mg \quad \therefore \quad x_0 = \frac{2\mu mg}{k}$$

ばねの伸びが x で P が滑っているとき，P の運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx + \mu mg = -k\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \tag{6.19}$$

これより P は，床上を滑っている限り，台車から見るとばねの伸びが $x = x_0/2$ となる点を中心に角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動をすることがわかる。

ばねの伸び x は，台車から見た P の左向きへの変位を表している。図 6.12 のように，左向きに x 軸をとると，P は，$x = 0$ から $x = x_0$ までは床上を滑らず，左向きに速さ V で等速度運動（図 6.12 の 2 重線部分）し，$x = x_0$ を通過後，しばらくは(6.19)式で表される単振動（図 6.12 の 1 重線部分）をすることがわかる。したがって，ばねの伸びの最

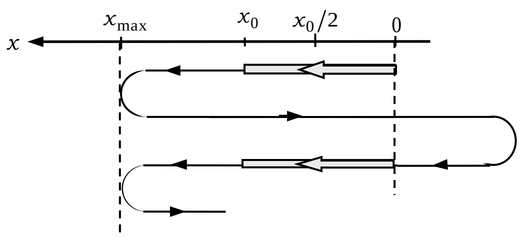

図 6.12

大値 $x_{\max}$ は，$\begin{cases} x = x_0 \\ v = V \end{cases} \to \begin{cases} x = x_{\max} \\ v = 0 \end{cases}$ までのエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k\left(x_0 - \frac{x_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(x_{\max} - \frac{x_0}{2}\right)^2$$

より，

$$\underline{x_{\max} = \frac{\mu mg}{k} + \sqrt{\frac{m}{k}V^2 + \left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2}}$$

単振動は，振動中心に関して対称な運動であるから，$x = x_0$ と $x = 0$ での速さは等しく V である。よって，ばねが最も縮んだ後，P が $x = \underline{0}$ を通過するとき，P の台車に対する左向きの速さは V となり，床に対して静止する。その後，P は，$x = x_0$ になるまで床上で静止する。 ■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

(4) 単振り子

図 6.13 のように，一端が天井の 1 点 H に固定された長さ l の質量の無視できる糸の他端に, 質量 m の小球 P が付けられている。糸が鉛直になった状態での P の位置を点 O とする。P に点 O で水平方向の初速 v_0 を与えると，P は O を中心に振り子運動をする。この運動を**単振り子**（simple pendulum）という。点 O を原点に，点 H を中心とした半径 l の円弧に沿って座標軸 s をとり，糸と鉛直線のなす角 θ が十分小さい（$|\theta| \ll 1$）微小振動を考える。重力加速度の大きさを g とする。

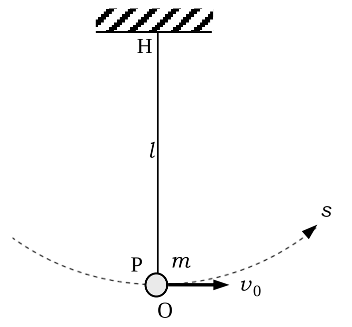

図 6.13

P の座標を $s = l\theta$ とすると，s 軸に沿った P の運動方程式は，$\ddot{s} = l\ddot{\theta}$，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ を用いて，

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \fallingdotseq -mg\theta \quad \therefore \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \tag{6.20}$$

となる。(6.20)式は，角 θ に関する単振動の方程式であり，その角振動数 ω，周期 T はそれぞれ,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{6.21}$$

で与えられる。

もう１つの方法

上で考えた微小角の単振り子を，少し異なる方法で調べることができる。それは，図 6.14 ように，点 O を原点に水平右向きに x 軸をとり，小球 P の運動を，近似的に x 軸

に沿った直線運動とみなす方法である。糸が鉛直線と角 θ（$|\theta| << 1$）をなすとき，鉛直方向に動かないとみなすことから, 力のつり合いは, 糸の張力を S として,

$$mg = S\cos\theta \fallingdotseq S$$

と書ける。座標が x のとき，P の運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -S\sin\theta \fallingdotseq -mg\frac{x}{l} \quad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{g}{l}x$$

となり, この式は, 単振動を表す(6.20)式と同じであり, その角振動数 ω と周期 T は，(6.21)式で与えられる。

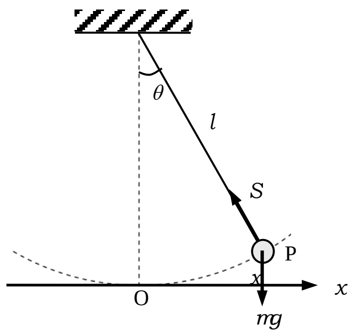

図 6.14

例題 6.6　慣性質量と重力質量

3.1 節で述べたように，ニュートン力学（高校で学ぶ力学）では，運動方程式(3.1)の左辺の質量を慣性質量とよぶ。そこで慣性質量を m_{I} で表す。一方，重力に比例する質量を重力質量とよび m_{G} で表す。図 6.13 で示される単振り子において，小球 P の慣性質量を m_{I}，重力質量を m_{G} として微小振動の周期を求めよ。

【解答】

小球 P にはたらく重力は $m_{\mathrm{G}}g$ と書けるから，P の運動方程式は,

$$m_{\mathrm{I}}l\ddot{\theta} = -m_{\mathrm{G}}g\sin\theta \fallingdotseq -m_{\mathrm{G}}g\theta \quad \therefore \quad \ddot{\theta} = -\frac{m_{\mathrm{G}}g}{m_{\mathrm{I}}l}\theta$$

これより，角振動数 ω' と周期 T' は,

$$\omega' = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{G}}g}{m_{\mathrm{I}}l}}, \qquad T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\frac{m_{\mathrm{I}}}{m_{\mathrm{G}}}}}$$

■

6.3　重心と相対運動

この節では，１次元系において，互いに内力を及ぼし合う２質点（２物体）の運動を考えよう。

重心

図 6.15 のように，質量 m_1 の質点１に質量 m_2 の質点２から力 f が作用し, 質点２にはその反作用 $-f$ が作用するとする。質点１，２の運動方程式は,

$$1:\quad m_1\ddot{x}_1 = f \qquad (6.22)$$

$$2:\quad m_2\ddot{x}_2 = -f \qquad (6.23)$$

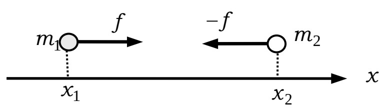

図 6.15

と書ける。(6.22)＋(6.23) として時間 t で積分することより,

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1v_1 + m_2v_2 = C \qquad (6.24)$$

となる。ここで, $v_1 = \dot{x}_1$, $v_2 = \dot{x}_2$ である。

(6.24)式は，外力が作用しないときの運動量保存則を表し，重心の速度 v_{G} は，

$$v_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{C}{m_1 + m_2} = \text{一定}$$

であることを示している。

相対運動

(6.22)$/m_1$ − (6.23)$/m_2$ より，換算質量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を用いると，

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f = \frac{f}{\mu}$$

となる。ここで，質点１の２に対する相対座標 $x_r = x_1 - x_2$ を導入して，

$$\mu \ddot{x}_r = f \tag{6.25}$$

を得る。(6.25)式を**相対運動方程式**（equation of relative motion）という。この式をエネルギー積分，すなわち，両辺に $v_r = \dot{x}_r$ をかけて t で積分すると，左辺から相対運動エネルギー

$$K_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2} \mu v_r^2$$

の表式を得ることができる。

例題 6.7　ばねでつながれた２球の運動

図 6.16 のように，質量 m と M の小球 P と Q が，質量の無視できる自然長 l_0，ばね定数 k のばねにつながれて，ばねが自然長の状態でなめらかな水平面上に置かれている。P に Q に向かう右向きの初速 v_0 を与えたところ，P と Q は振動しながら右向きに動いて行った。Q から見た P の振動の振幅と周期を求めよ。

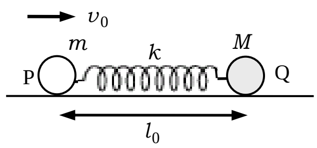

図 6.16

【解答】

ばねに沿って P から Q の向きに x 軸をとり，P, Q の座標をそれぞれ x, X とするとそれぞれの運動方程式は（図 6.17），

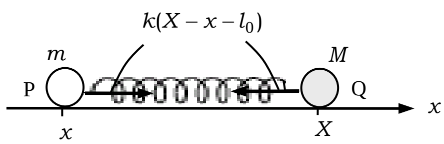

図 6.17

$$\text{P}:\quad m\ddot{x} = k(X - x - l_0) \tag{6.26}$$

$$\text{Q}:\quad M\ddot{X} = -k(X - x - l_0) \tag{6.27}$$

ここで，$x_r = x - X$，$\mu = \dfrac{mM}{m+M}$ とおいて，(6.26)$/m$ − (6.27)$/M$ より，

$$\ddot{x}_r = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) k(x_r + l_0) \quad \therefore \quad \mu \ddot{x}_r = -k(x_r + l_0) \tag{6.28}$$

これより，Q から見ると P は，$x_r = -l_0$ を中心に角振動数$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$ の単振動をすることがわかる。これより単振動の周期T は，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}}$$

求める振幅を A_r として，

$$\begin{cases} x_r = -l_0 \\ v_r = \dot{x}_r = v_0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_r = -l_0 + A_r \\ v_r = 0 \end{cases}$$

について，(6.28)式に対するエネルギー保存則を適用すると，

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = \frac{1}{2}kA_r^2 \quad \therefore \quad A_r = v_0\sqrt{\frac{\mu}{k}} = \underline{v_0\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}}$$ ■

第７章　万有引力の法則とケプラーの法則

図 7.1 のように，質量 m をもつ質点 P と質量 M をもつ質点 Q が距離 r だけ離れて存在するとき，P，Q 間には，大きさ

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{7.1}$$

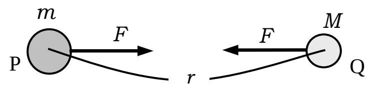

図 7.1

の引力が作用する。これを**万有引力**（universal gravitation）といい，このような関係が成り立つ法則を，**万有引力の法則**（law of universal gravitation）という。元々この法則は，ニュートンによってケプラーの法則から導かれたものであるが，ニュートンは，この法則を，運動の３法則と同様に，力学の出発点にとるべき基本法則の１つと考えた。ケプラーの法則は，太陽のまわりを回る惑星の運動を観測した結果として得られた法則であり，そこから導かれた万有引力の法則は，観測結果と同様な法則であると見なされる。

ケプラーの法則（Kepler's laws）は，次の３つの法則からなる。

第１法則：惑星は太陽を１つの焦点とする楕円軌道上を運動する。楕円軌道は円軌道を特別な場合として含む。

第２法則：太陽のまわりを回る惑星の面積速度は一定である（面積速度については，7.2 節で説明する）。この法則は，個々の惑星の軌道運動で成り立つ。

第３法則：惑星の公転周期の２乗は，楕円軌道の長半径（長軸の長さの半分）の３乗に比例する。この法則は，いろいろな惑星の軌道間で成り立つ。

7.1　万有引力の法則

(1)　万有引力の法則の導出

まず，万有引力の法則が，ケプラーの法則からどのように導かれるか考えてみよう。

一般に，太陽のまわりを回る惑星は，太陽を１つの焦点とする楕円軌道を描いている。楕円軌道に対するケプラーの法則を用いて万有引力の法則を導く計算は，やや面倒である。しかし，惑星の軌道の多くは円軌道に近い。そこで，円軌道であるとすると，万有引力の法則は簡単に導くことができる。ここでは，惑星の軌道は円軌道であるとして，ケプラーの第３法則を用いて万有引力の法則を導いてみよう。ここでは，太陽も惑星も質点と見なすことにする。

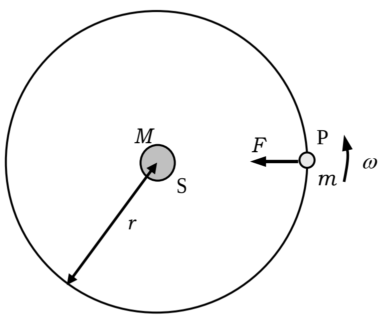

図 7.2

図 7.2 のように，質量 M の太陽 S のまわりを質量 m の惑星 P が，半径 r の円軌道を描いて周期 T（すなわち，角速度 $\omega = 2\pi / T$ ）の等速円運動をしているとする。 M は m より十分大きく，S は動かないものとする。惑星 P に S の向きにはたらく力の大きさを F とすると，P の円運動の式は，

$$mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = F$$

となる。ここで，ケプラーの第３法則を用いる。第３法則における楕円軌道の長半径は，円軌道に移行すると半径 r になる。そこで，この場合の第３法則は， k を比例定数として，

$$T^2 = kr^3$$

となる。これを上の式に代入して，

$$F = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2} \propto \frac{m}{r^2} \tag{7.2}$$

を得る。ここで，作用反作用の法則を用いると，太陽にも大きさ F の力がはたらくはずである。しかるに，太陽に作用する力であれば，太陽の質量 M にも比例するはずであり，

$$F \propto \frac{Mm}{r^2}$$

と書ける。ここで，比例定数を G とおいて(7.1)式を得る。

このように，惑星が太陽のまわりを円運動していると見なすと，簡単に万有引力の法則を導くことができる。

(2)　ケプラーの第３法則

(7.1)式と(7.2)式を比較すると，

$$GM = \frac{4\pi^2}{k} \quad \therefore \quad k = \frac{4\pi^2}{GM}$$

となる。こうして，ケプラーの第３法則は，一般の楕円軌道に拡張すると，周期を T ，長半径を a として，

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{7.3}$$

となる。

例題 7.1　太陽が動く場合のケプラーの第３法則

惑星から太陽に万有引力が作用すると，太陽も動くはずである。太陽と惑星の外から力がはたらかないとすると，重心は動かないと見なすことができる。そうすると，図 7.3 のように，太陽 S と惑星 P は，相対して重心 G のまわりに円運動をする。S, P 間の距離を l として，円運動の周期の２乗と太陽と惑星の間の距離 l の３乗の比の値を求めよ。

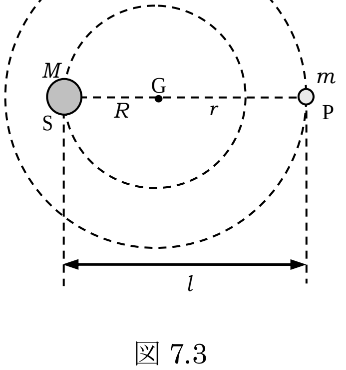

図 7.3

【解答】

$\overline{\mathrm{SG}} = R$， $\overline{\mathrm{PG}} = r$ とすると，

$$R=\frac{m}{M+m}l\,,\quad r=\frac{M}{M+m}l$$

となる。これより，周期をTとして，惑星 P の円運動の式より，

$$m\cdot\frac{M}{M+m}l\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=G\frac{Mm}{l^2}\quad\therefore\quad\frac{T^2}{l^3}=\frac{4\pi^2}{G(M+m)}\tag{7.4}$$

を得る。(7.4)式より，T^2とl^3の比は一定ではなく，惑星の質量mに依存することがわかる。ただし，$M>>m$であるから，ほとんど一定値と見なせることがわかる。 ■

(3) 球形物体による万有引力

これまでは，太陽も惑星も質点として大きさを無視してきたが，大きさがある場合，万有引力の法則は，どのように表されるのであろうか。

天体間に作用する万有引力

天体の質量密度（単位体積あたりの質量）ρが中心からの距離rだけで与えられるとき，すなわち，$\rho=\rho(r)$である（これを，「質量が球対称に分布する」という）とき，天体の外部の質点にはたらく万有引力は，天体の全質量が中心の１点に集まっている点天体からはたらく万有引力に等しい。また，質量が球対称に分布する物体に作用する万有引力は，全質量が中心の１点に集まった質点に作用する万有引力に等しい。したがって，質量が球対称に分布する２つの天体間に作用する万有引力は，それぞれの天体の中心に集まった２質点間に作用する万有引力で与えられる。

このことは，質点間に作用する万有引力を用いて証明されるが，ここでは，その証明には立ち入らない。

天体の内部の質点に作用する万有引力

図 7.4 のように，質量が球対称に分布する半径Rの天体の中心 O から距離R_1（$<R$）の点にある質点 P に作用する万有引力は，O を中心とした半径R_1の球体内の全質量が O に集中したと見なされる質点からはたらく万有引力に等しい。O からの距離R_1からRの間に分布する質量（図 7.4 の網掛け部分の質量）が質点 P に作用する万有引力の合力はゼロとなる。このことを例題 7.2 で示すために，まず立体角を導入しよう。

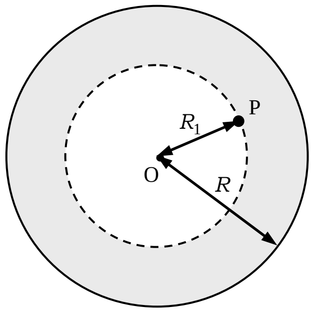

図 7.4

立体角

図 7.5 のように，点 O を中心にした半径rの球面の面積ΔSの領域を O から見込む，立体的な角を**立体角**（solid angle）という。立体角$\Delta\Omega$は，

$$\Delta\Omega\equiv\frac{\Delta\Omega}{r^2}\tag{7.5}$$

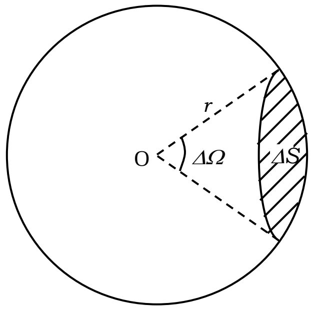

図 7.5

で定義される。全方向の立体角 Ω は，半径 r の球面の表面積は$4\pi r^2$ であるから，

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

となる。

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

例題 7.2　外部球殻からはたらく万有引力

図 7.6 のように，点 O を中心にした半径 r と $r+\Delta r$ の球面で挟まれた球殻 K から，その内部の点 P に置かれた質量 m の質点に作用する万有引力の合力がゼロであることを示せ。ただし，球殻の質量密度はどこでも等しいとする。

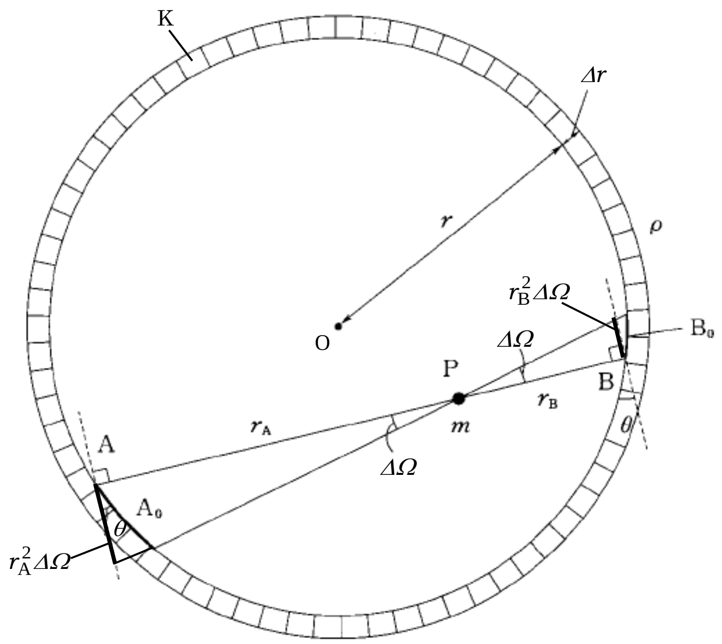

図 7.6

【解答】

点 P を通る任意の直線を引き，質量密度 ρ の球殻 K と交わる点を A, B とし，P から微小な立体角 $\Delta\Omega$ で見込まれる A, B のまわりの球殻の一部の領域 A_0, B_0 の質量が点 P に及ぼす万有引力を考える。線分 PA, PB の長さをそれぞれ r_A, r_B，PA, PB に垂直な面が A_0, B_0 となす角を θ とすると，A_0, B_0 の質量 $\Delta M_A, \Delta M_B$ はそれぞれ，

$$\Delta M_A = \rho\frac{r_A^2\Delta\Omega}{\cos\theta}\Delta r\,,\quad \Delta M_B = \rho\frac{r_B^2\Delta\Omega}{\cos\theta}\Delta r$$

と書ける。これより，P, A_0 間，P, B_0 間にはたらく万有引力は逆向きであり，その大きさ $\Delta F_A, \Delta F_B$ はそれぞれ，

$$\Delta F_{\mathrm{A}} = G\frac{m\cdot\Delta M_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{A}}^2} = Gm\rho\frac{\Delta\Omega}{\cos\theta}\Delta r\ ,\quad \Delta F_{\mathrm{B}} = G\frac{m\cdot\Delta M_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{B}}^2} = Gm\rho\frac{\Delta\Omega}{\cos\theta}\Delta r$$

となり，$\Delta F_{\mathrm{A}} = \Delta F_{\mathrm{B}}$ であることがわかる。

点 P を通る任意の直線が球殻と交わる点の近くで上のことが成り立つので，球殻 K から点 P にある質点に作用する力の合力はゼロであることがわかる。

このことは，点 P の外側のすべての球殻に対して成り立つので，P の外側部分の球体の質量が P に及ぼす万有引力の合力はゼロとなる。したがって，点 P にある質点に作用する万有引力は，半径 OP の球体内の全質量が点 O に集中したと見なされる質点からはたらく万有引力に等しいことがわかる。 ■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

例題 7.3　地球に掘られたトンネル内の小物体の運動

図 7.7 のように，半径 R の地球に掘られた長さ $2a$ の直線状のトンネルの端 A から，質量 m の小物体を静かに放したら，ある時間 T だけ経過した後，A に戻ってきた。地球は一様な質量密度 ρ の球形とし，万有引力定数を G とする。小物体に摩擦や空気抵抗ははたらかないとし，地球の自転の影響は無視して小物体の速さの最大値 v_{max} と周期 T を求めよ。

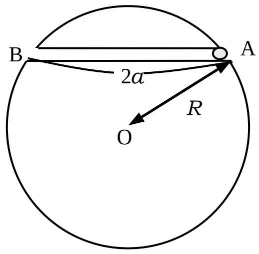

図 7.7

【解答】

図 7.8 のように，地球の中心 O からトンネルに垂線 OH を引き, 点 H を原点として端 A の向きに x 軸をとる。座標 x の点を P とし，OP= r とすると，小物体には，半径 r の球体内の地球の質量

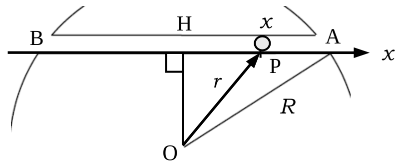

図 7.8

$$M = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

から万有引力がはたらく。その大きさ F は,

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho Gmr$$

となる。これより，小物体の運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -F\cdot\frac{x}{r} = -Kx \qquad \left(K = \frac{4}{3}\pi\rho Gm\right)$$

となるから，小物体は，点 H を中心に角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = 2\sqrt{\dfrac{\pi\rho G}{3}}$ の単振動をすることがわかる。よって，その周期 T は,

$$\underline{T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}}$$

また，小物体は $x=a$ で初速 0 で放されたので，単振動のエネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2=\frac{1}{2}Ka^2 \quad \therefore \quad v_{\max}=a\sqrt{\frac{K}{m}}=\underline{2a\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}}$$ ■

7.2　万有引力とケプラーの法則

(1)　万有引力による位置エネルギー

位置エネルギーの基準点（位置エネルギーが 0 となる点）はどこにとってもよいのであるが，質量 M の質点 Q による質量 m の質点 P のもつ万有引力の位置エネルギーは，Q から無限に遠く離れた点を基準にとるのが普通である。

図 7.9 のように，質点 Q の位置を原点に，質点 P に向かう向きに x 軸をとり，P が $x=r$ の点でもつ位置エネルギー $U(r)$ を求めよう。$x=\infty$ を基準とすると，位置エネルギーの定義より，$U(r)$ は，P を $x=r$ から $x=\infty$ まで動かす間の万有引力のする仕事 $W(r\to\infty)$ に等しいから，P に作用する万有引力は，$-x$ 方向を向いていることに注意して，

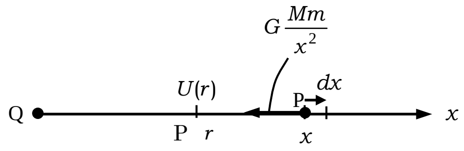

図 7.9

$$U(r)=W(r\to\infty)=\int_r^\infty\left(-G\frac{Mm}{x^2}\right)dx=-GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_r^\infty=-\frac{GMm}{r} \tag{7.6}$$

となる。

(2)　ケプラーの第 1 法則

図 7.10 のように，質量 M の質点 Q から距離 r 離れた点を速さ v で運動している質量 m の質点 P がもつ力学的エネルギー E は，

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r} \tag{7.7}$$

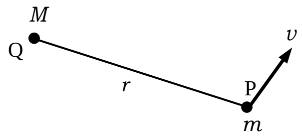

図 7.10

と書ける。

質点 Q から万有引力を受けて運動する質点 P は，その力学的エネルギー E の値により，Q を焦点とする次のような 2 次曲線の軌道を描く。

$E<0$: 楕円軌道（特別な場合として円軌道を描く）

$E=0$: 放物線軌道

$E>0$: 双曲線軌道

(3)　ケプラーの第 2 法則

図 7.11 のように，固定された質点 O から距離 r だけ離れた点を質点 P が速度 $\boldsymbol{v}$ （$|\boldsymbol{v}|=v$）で運動して

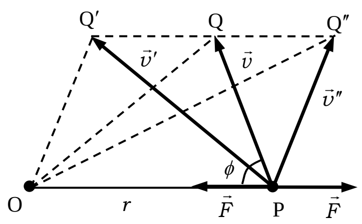

図 7.11

いる。ここで，線分 OP を**動径**（moving radius）といい，動径が単位時間に掃く面積を**面積速度**（areal velocity）という。動径 OP と速度 $\boldsymbol{v}$ のなす角を ϕ （$0 \leq \phi \leq \pi$）とするとき，面積速度 s は，OP と $\boldsymbol{v}$ を隣り合う２辺とする三角形の面積で与えられ，

$$s = \frac{1}{2} rv \sin\phi$$

と表される。

いま，引力の**撃力**（impulsive force）（瞬間的に作用する非常に強い力）$\vec{F}$ （$\left|\vec{F}\right| = F$）が作用し，P の速度が瞬間的に $\boldsymbol{v}'$ に変化した。このとき，$\boldsymbol{v}$ の終点をQ，$\boldsymbol{v}'$ の終点をQ′とすると，$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{PO}}$ であるから，

$$s = \triangle \mathrm{OPQ} = \triangle \mathrm{OPQ'}$$

となり，撃力 $\vec{F}$ が作用する前後で面積速度が一定に保たれることがわかる。

一方，質点 P に斥力の撃力 $\vec{F}'$ が作用し，P の速度が瞬間的に $\boldsymbol{v}'' = \overrightarrow{\mathrm{PQ''}}$ に変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{QQ''}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となるから，

$$s = \triangle \mathrm{OPQ} = \triangle \mathrm{OPQ''}$$

となり，面積速度が一定に保たれる。こうして，P に作用する線分 OP に平行な力（これを**中心力**（central force）という）が作用するとき，質点 P の点 O のまわりの面積速度は一定に保たれることがわかる。万有引力は中心力の一種である。

（注意）

この議論は直観的なものであり，厳密には，撃力が作用する微小時間の間の質点 P の位置の変化を考慮した議論が必要である。

7.3　ケプラー運動

万有引力を受けた物体の運動を，**ケプラー運動**（Keplerian motion）という。ここでは，ケプラー運動のいろいろな例を取り上げよう。

例題 7.4　静止衛星の打ち上げ

地球の赤道上空の円形軌道を１日で一周する人工衛星（これを**静止衛星**（stationary satellite）という）を打ち上げることを考えよう。地球を質量 $M = 6.0 \times 10^{27}$ kg，半径 $R = 6.4 \times 10^{6}$ m の一様な球体とし，万有引力定数を $G = 6.7 \times 10^{-14}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}}$ とする。

(a)　静止衛星の軌道半径 r_0 は R の何倍か。

静止衛星を軌道に乗せるために，図 7.12 のように，まず小さな円軌道（軌道半径 r）に衛星を乗せ，次に，円軌道上の点 P で加速して地球の中心 O から遠地点 Q までの距離が r_0

の楕円軌道に乗せる。最後に，点 Q で再び加速して静止軌道に乗せることにする。

(b)　楕円軌道上の近地点 P と遠地点 Q での衛星のそれぞれの速さ v_1, v_2 を求め，点 Q で増加させる速さ Δv を求めよ。

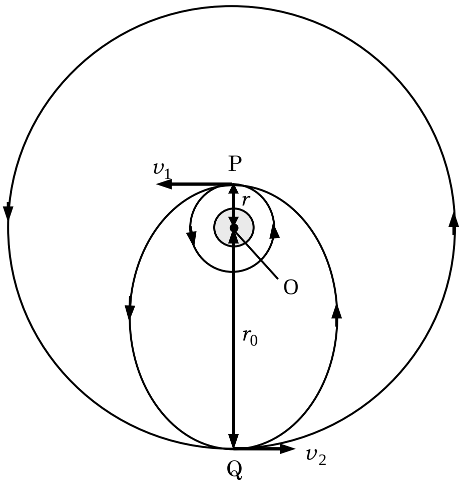

図 7.12

【解答】

(a)　地球を一様な球体としているので，その全質量が地球の中心に集まっているとして万有引力の法則を用いることができる。静止衛星の質量を m，周期（1 日）を T とすると，その円運動の式は,

$$mr_0\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{Mm}{r_0^2}$$

これより，$T = 24\times60\times60\,\mathrm{s}$ を用いて,

$$\frac{r_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \underline{6.6}\ （倍）$$

(b)　近地点 P と遠地点 Q での力学的エネルギー保存の式は,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

と表される。また，動径と速度ベクトルは，P と Q でともに垂直であるから，面積速度一定の式は,

$$\frac{1}{2}rv_1 = \frac{1}{2}r_0v_2$$

となる。これらより,

$$\underline{v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_0}{r(r+r_0)}}}\ ,\quad \underline{v_2 = \sqrt{\frac{2GMr}{r_0(r+r_0)}}}$$

一方，静止衛星の速さを v_0 とすると，円運動の式より,

$$m\frac{v_0^2}{r_0} = G\frac{Mm}{r_0^2} \quad \therefore \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

となるから，点 Q で増加させる速さ Δv は,

$$\Delta v = v_0 - v_2 = \underline{\sqrt{\frac{GM}{r_0}}\left(1-\sqrt{\frac{r}{r+r_0}}\right)}$$

■

例題 7.5　円軌道と楕円軌道を描く惑星の力学的エネルギー

質量 M の太陽Sのまわりを半径 r の円軌道を描いて回る質量 m の惑星 P_1 の力学的エネルギーを求めよ。また，Sを１つの焦点とする長半径 a の楕円軌道を描いて回る質量 m の惑星 P_2 の力学的エネルギーを求めよ。S の質量は十分大きく動かないとし，S から無限に遠く離れた点を位置エネルギーの基準とする。また万有引力定数を G とする。

【解答】

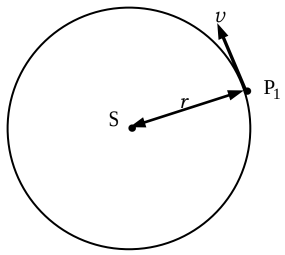

図 7.13

図 7.13 のように，惑星 P_1 の速さを v とすると，万有引力を受けた P_1 の円運動の式

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

を用いて，P_1 の力学的エネルギー E_1 は,

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = \underline{-\frac{GMm}{2r}}$$

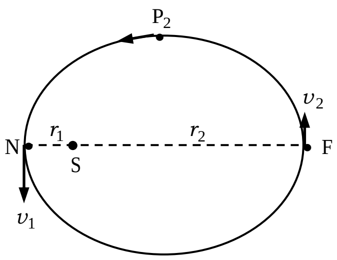

図 7.14

図 7.14 のように, 衛星 P_2 の近地点 N での速さを v_1，遠地点 F での速さを v_2，S, N 間の距離を r_1，S, F 間の距離を r_2 とする。面積速度の２倍を h とすると， h と力学的エネルギー E はそれぞれ,

$$h = r_1 v_1 = r_2 v_2$$

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

となる。これらより v_i （$i = 1, 2$）を消去して r_i の２次方程式

$$Er_i^2 + GMmr_i - \frac{1}{2}mh^2 = 0 \tag{7.8}$$

を得る。(7.8)式は r_1 と r_2 に対して成り立つので，解と係数の関係より，

$$r_1 + r_2 = -\frac{GMm}{E}$$

ここで， $r_1 + r_2$ は長軸の長さ $2a$ に等しいことから，楕円軌道を描いてまわる惑星の力学的エネルギー E は，長半径 a を用いて，

$$\underline{E = -\frac{GMm}{2a}}$$ ■

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

【付録】　剛体の回転運動

A.1　角運動量保存則

第５章で述べたように，運動方程式から導かれる保存則には，運動量保存則，エネルギー保存則，角運動量保存則がある。ここでは，角運動量保存則を考えることにする。

図 A.1 のように，原点 O からの位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ で運動している質量 m の物体に力 $\boldsymbol{f}$ が作用するとき，その運動方程式は，

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{f} \tag{A.1}$$

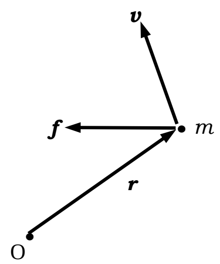

図 A.1

と書ける。この式の両辺に，左から $\boldsymbol{r}$ を外積としてかけると，

$$m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f} \tag{A.2}$$

となる。この式の左辺を変形するために，次の積の微分を考える。

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

ここで，$\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ であり，外積の定義から $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=0$ であるから，(A.2)式の左辺は，運動量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ を用いて，

$$m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})$$

となる。ここで，$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ を点 O のまわりの角運動量とよぶ。

一方，(A.2)式の右辺 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$ は，点 O のまわりの力のモーメントであるから，(A.2)式は，

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=\boldsymbol{n} \tag{A.3}$$

と表される。(A.3)式は，

「**物体の角運動量変化は，物体に作用する力のモーメントに等しい**」

ことを示している。

A.2　中心力と角運動量保存則

第７章で述べたように，点 O の方向を向いた力を中心力という。中心力 $\boldsymbol{f}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と平行である（ $\boldsymbol{f}\,/\!/\,\boldsymbol{r}$ ）から，

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}=0$$

である。そうすると，(A.3)式は

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=0$$

となり，角運動量は時間的に変化しない，すなわち，**中心力が作用するとき，角運動量保存則が成り立つ**ことがわかる。

面積速度一定

第７章で学んだように，中心力が作用するとき，面積速度は一定になる。実は，面積速度と角運動量の間には，簡単な関係が成り立つ。

位置 $\boldsymbol{r}$ の点を質量 m の物体が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているとき, 原点 O のまわりの面積速度 s は， $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ を隣り合う２辺とする三角形の面積として，

$$s=\frac{1}{2}rv\sin\theta \quad (r=|\boldsymbol{r}|,\ \ v=|\boldsymbol{v}|) \tag{A.4}$$

で与えられることを，第７章で述べた。ここで， θ （ $0\le\theta\le\pi$ ）は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角である。

一方，角運動量の大きさ $l=|\boldsymbol{l}|$ は,

$$l=mvr\sin\theta=2m\cdot s \tag{A.5}$$

と書ける。

一般に，面積速度もベクトルを用いて，

$$\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} \tag{A.6}$$

で定義され， $s=|\boldsymbol{s}|$ である。そうすると，中心力が作用して角運動量が保存されるとき，面積速度は一定に保たれることは明らかである。

A.3　剛体の固定軸のまわりの回転運動方程式

ここでは，固定された回転軸を z 軸にとり， z 軸のまわりの剛体の回転運動を考えることにする。

角運動量の角速度を用いた表現

剛体の角運動量を考えるために，まず，質点の角運動量を用いた表現を書いておこう。

図 A.2 のように， $x-y$ 平面上で質量 m の質点が点 P（位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ ）を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているとする。速度の O→P 方向の成分を v_r，OP に垂直で反時計回りの成分を v_θ とすると，OP が x 軸となす角を θ として，

$$\begin{cases} v_r=\dot{r} \\ v_\theta=r\dot{\theta}=r\omega \end{cases} \tag{A.7}$$

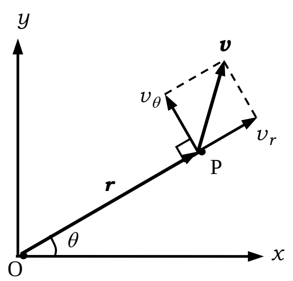

図 A.2

と表される。この式の v_r は明らかであろう。また， v_θ も，角

速度 $\omega=\dot{\theta}$ で半径 r の円運動をしている質点の速さを考えれば理解できるであろう。これより，質点の点 O のまわりの反時計回りの角運動量 l は，

$$l=r\cdot mv_\theta=mr^2\omega \tag{A.8}$$

と表される。

慣性モーメント

図A.3のように，大きさのある物体を，質量 m_i（$i=1, 2, \cdots$）の質点の集合体と考えよう。いま，物体が紙面に垂直な回転軸 O のまわりに角速度 ω で回転している（物体を構成している各質点がすべて同じ角速度 ω で回転している）とき，回転軸から各質点までの距離を r_i とすると，物体の角運動量，すなわち，各質点の角運動量の和 L は，

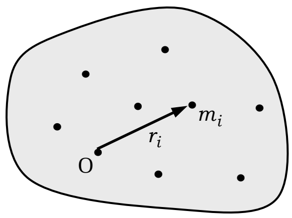

図 A.3

$$L=\sum_i m_i r_i^2\omega=I\omega \tag{A.9}$$

と表される。ここで，

$$I=\sum_i m_i r_i^2 \tag{A.10}$$

を物体の回転軸 O のまわりの**慣性モーメント**（moment of inertia）という。

外力のモーメント

次に，物体を構成している各質点に作用する力のモーメントの和を考えよう。一般に，図 A.4 のように，位置 $\boldsymbol{r}_j$ の質点に位置 $\boldsymbol{r}_k$ の質点から力 $\boldsymbol{f}_{jk}$ が作用するとき，作用・反作用の法則より，位置 $\boldsymbol{r}_k$ の質点には位置 $\boldsymbol{r}_j$ の質点から力 $-\boldsymbol{f}_{jk}$ が作用する。したがって，位置 $\boldsymbol{r}_j$ と $\boldsymbol{r}_k$ の質点間に作用する力による点 O のまわりの力のモーメントの和 $\boldsymbol{n}_{jk}$ は，

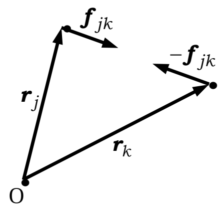

図 A.4

$$\boldsymbol{n}_{jk}=\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{f}_{jk}+\boldsymbol{r}_k\times(-\boldsymbol{f}_{jk})=(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k)\times\boldsymbol{f}_{jk}$$

と書ける。ここで，$(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k)\,/\!/\,\boldsymbol{f}_{jk}$ より，$\boldsymbol{n}_{jk}=0$ となる。よって，**質点間にはたらく内力のモーメントはゼロ**となる。これより，物体の各質点に作用する力のモーメントの和は，物体に外部から作用する力のモーメントの和に等しい。こうして，物体を構成する各質点について，(A.3)式の和をとることにより，物体の角運動量 $\boldsymbol{L}$ と物体に作用する外力のモーメント $\boldsymbol{N}$ の間に，

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}$$

が成り立つことがわかる。回転軸 O のまわりの角運動量 L と力のモーメント N の間には，

$$\frac{dL}{dt} = N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(I\omega) = N \tag{A.11}$$

が成り立つ。ここで N は，力のモーメントのベクトル $\boldsymbol{N}$ の z 成分（回転軸に平行な成分）であり，物体に作用する外力の作用線に， z 軸から引いた垂線の長さと，外力の $x-y$ 平面への射影の長さの積で与えられる。

例題 A.1　アイススケーターのスピン

アイススケーターが氷上の一点で回転しているとき，腕を広げると回転の角速度は減少し，腕を縮めると角速度は増加することを説明せよ。

【解答】

腕を広げると，体の中心軸から腕の各質点までの距離が長くなり，スケーターの慣性モーメント I は増加し，腕を縮めると I は減少する。スケーターの回転軸のまわりの外力のモーメントはゼロであり，腕の伸縮はスケーターの内力で行われ，内力のモーメントの和もゼロであるから，スケーターに作用する力のモーメントはゼロである。したがって，スケーターの角運動量 $L = I\omega$ は一定に保たれる。こうして，スケーターが腕を伸ばすと，I は増加して ω は減少し，スケーターが腕を縮めると， I は減少して ω は増加する。　■

回転運動方程式

物体として，質点間の位置関係が変化しない剛体を考えよう。剛体で I は変化しないから，(A.11)式は，

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \tag{A.12}$$

となる。(A.12)式は， 1 つの回転軸のまわりの剛体の回転運動を考える出発点となる方程式であり，**回転運動方程式**（equation of rotational motion）とよばれる。

回転の運動エネルギー

剛体が角速度 ω で回転運動しているときの剛体の運動エネルギー K は，剛体を構成する各質点の運動エネルギーの和である。回転軸 O から距離 r_i の位置の質量 m_i の質点の運動エネルギーは $\frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2$ と書けるから，

$$K = \sum_i \left(\frac{1}{2}m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{A.13}$$

となる。

A.4　慣性モーメント

重心と重心系

剛体の慣性モーメントを考える準備として，**重心**（center of gravity）と**重心系**（center of gravity system，あるいは，center of mass system）について必要なことをまとめておこう。

質量 $m_1, m_2, \cdots, m_i, \cdots$ の質点の位置ベクトルをそれぞれ， $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_i, \cdots$ とするとき，重心（**質量中心**（center of mass）ということも多い）の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ は，

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}$$

で定義される。このとき，重心を原点とする座標系（これを重心系という）における各質点の位置ベクトルは，

$$\boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}, \boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}, \cdots, \boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}, \cdots$$

と書けるから，

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' = 0 \tag{A.14}$$

が成り立つ。重心を原点とする重心系で重心座標は原点であり，重心の定義より，(A.14)の成立は当然である。この結果を，以下で用いることになる。

剛体の慣性モーメントについて，次の２つの定理が成り立つ。

平行軸の定理

任意の回転軸 O のまわりの慣性モーメント I と，剛体の重心を通り軸 O に平行な回転軸 G のまわりの慣性モーメント I_{G} の間には，

$$I = I_{\mathrm{G}} + Md^2 \tag{A.15}$$

の関係が成り立つ。ここで， M は剛体の質量， d は２つの回転軸 O と G の間の距離である。

（証明）

図 A.5 のように，回転軸 O を z 軸，回転軸 G を z' 軸として紙面に垂直にとり， x 軸， y 軸を紙面に平行に，x 軸，y 軸と平行にそれぞれ x' 軸，y' 軸をとる。

$x-y-z$ 座標系での重心座標を $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}}, 0)$，質量 m_i の質点 i の位置を (x_i, y_i, z_i)，(x_i', y_i', z_i') とすると，

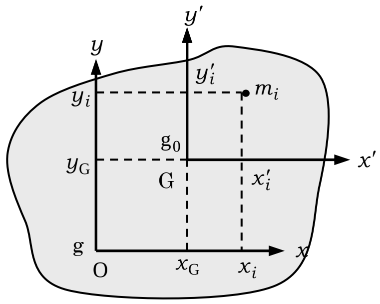

図 A.5

$$\begin{cases} x_i = x_{\mathrm{G}} + x_i' \\ y_i = y_{\mathrm{G}} + y_{\mathrm{i}}' \\ z_i = z_i' \end{cases}$$

となる。これより，軸 O のまわりの慣性モーメント I は，

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i \left\{ (x_{\mathrm{G}} + x_i')^2 + (y_{\mathrm{G}} + y_i')^2 \right\}$$

$$= \sum_i (m_i x_i'^2 + m_i y_i'^2) + \left(\sum_i m_i\right)(x_G^2 + y_G^2) + 2x_G \sum_i m_i x_i' + 2y_G \sum_i m_i y_i'$$

ここで，

$$I_G = \sum_i (m_i x_i'^2 + m_i y_i'^2), \quad M = \sum_i m_i, \quad d^2 = x_G^2 + y_G^2$$

また，(A.14)式より，

$$\sum_i m_i x_i' = 0, \quad \sum_i m_i y_i' = 0$$

であることを用いて(A.15)式を得る。 ■

直交軸の定理

薄い平板に沿って点 O で直交する x 軸と y 軸のまわりの慣性モーメントを I_x, I_y，点 O を通り板に垂直な z 軸のまわりの板の慣性モーメントを I_z とすると，

$$I_z = I_x + I_y \tag{A.16}$$

の関係が成り立つ。

（証明）

図 A.6 のように，薄い板内の質量 m_i の質点 i の位置を $(x_i, y_i, 0)$ とすると， I_x, I_y, I_z は，

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2, \quad I_y = \sum_i m_i x_i^2, \quad I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

となることから(A.16)式を得る。 ■

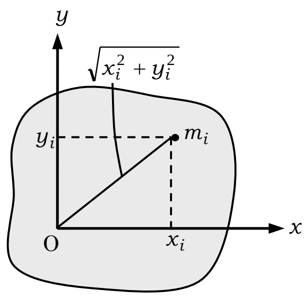

図 A.6

例題 A.2　細い棒の慣性モーメント

図 A.7 のような質量 M，長さ L の一様な細い棒を考える。棒の端 A を通り，棒に垂直な回転軸のまわりの慣性モーメント I_A，および，棒の中心 O を通り，棒に垂直な回転軸のまわりの慣性モーメント I_O をそれぞれ求めよ。

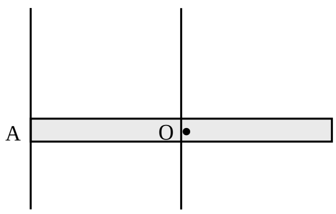

図 A.7

【解答】

端 A を原点に棒に沿って x 軸をとる。棒の線密度（単位長さあたりの質量）を ρ とすると， $M = \rho L$ より，

$$I_A = \int_0^L x^2 \cdot \rho dx = \rho \frac{L^3}{3} = \underline{\frac{1}{3} ML^2} \tag{A.17}$$

中心 O を原点に端 A とは反対向きに x 軸をとると，

$$I_O = 2\int_0^{L/2} x'^2 \cdot \rho dx' = \frac{2\rho}{3} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \rho \frac{L^3}{12} = \underline{\frac{1}{12} ML^2} \tag{A.18}$$

ここで，

$$I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{G}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

となり，平行軸の定理(A.15)が成り立っていることがわかる。 ■

例題 A.3　円板の慣性モーメント

質量 M，半径 R の薄い一様な円板の中心 O を通り，円板に垂直な回転軸 O のまわりの慣性モーメント I_0 を求めよ。また，点 O を通り，円板に平行な回転軸 1 のまわりの慣性モーメント I_1，円板の円周上の点を通り，円板に平行で円の接線を回転軸（この回転軸を軸 2 とよぶ）とする慣性モーメント I_2 を求めよ。

【解答】

図 A.8 のように，中心 O から半径 r と $r+dr$ の円で挟まれた円輪の質量 dM は，円板の面密度を σ とすると，

$$dM = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

と書けるから，この円輪の軸 O のまわりの慣性モーメント dI は，

$$dI = r^2 dM = 2\pi\sigma r^3 dr$$

となる。したがって，円板の慣性モーメント I_0 は， $M = \sigma \cdot \pi R^2$ を用いて，

$$I_0 = \int dI = 2\pi\sigma\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2}\sigma R^4 = \underline{\frac{1}{2}MR^2} \tag{A.19}$$

次に，図 A.9 のように，円板に平行で点 O で直交する 2 本の回転軸 x, y のまわりの慣性モーメント I_x, I_y は，対称性から互いに等しい。よって，直交軸の定理(A.16)を用いて，

$$I_1 = I_x = I_y = \frac{1}{2}I_0 = \underline{\frac{1}{4}MR^2} \tag{A.20}$$

となる。

さらに，回転軸 2 のまわりの慣性モーメント I_2 は，平行軸の定理(A.15)を用いて

$$I_2 = I_1 + MR^2 = \underline{\frac{5}{4}MR^2}$$

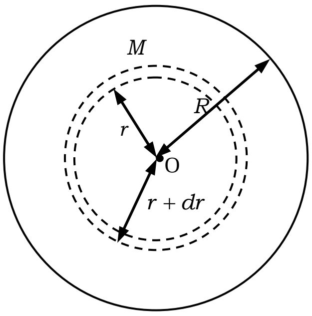

図 A.8

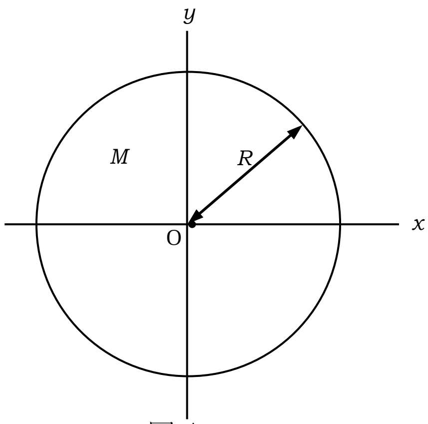

図 A.9

■

例題 A.4　球の慣性モーメント

質量 M，半径 R の一様な球の中心 O を通る回転軸 O のまわりの慣性モーメント I_0 と，球の接線を回転軸（これを回転軸 1 とよぶ）とする慣性モーメント I_1 を，それぞれ求めよ。

【解答】

球を回転軸に垂直な薄い円板の集合体と考える。

図 A.10 のように, 中心 O を原点に回転軸 O を z 軸にとり, 平面 z と $z+dz$ で挟まれた薄い円板を考える。円板の半径は $r=\sqrt{R^2-z^2}$ であるから，密度を ρ として円板の質量 dM は,

$$dM=\rho\cdot\pi r^2dz=\pi\rho(R^2-z^2)dz$$

となる。したがって， z 軸のまわりの慣性モーメント dI は,

$$dI=\frac{1}{2}\cdot dM\cdot r^2=\frac{1}{2}\pi\rho(R^2-z^2)^2dz$$

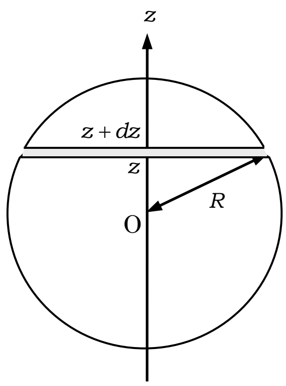

図 A.10

と書ける。これより，球の慣性モーメント I_0 は， $M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$ を用いて,

$$I_0=\int dI=\frac{1}{2}\pi\rho\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)^2dz=\underline{\frac{2}{5}MR^2} \tag{A.21}$$

慣性モーメント I_1 は，平行軸の定理より,

$$I_1=I_0+MR^2=\underline{\frac{7}{5}MR^2}$$

A.5　剛体の回転運動

(1)　滑車の回転

図 A.11 のように，軽い糸（質量は無視できる）で繋がれた質量 M と m（$<M$）の 2

物体 1, 2 が滑車にかけられ，物体 1 が下降し物体 2 が上昇する運動を考えてみよう。糸がすべることなく質量の無視できる滑車が回転するとき，物体 1 を引く糸の張力と物体 2 を引く糸の張力は等しい。そこで，糸の張力を S，物体 1, 2 の加速度の大きさを α とすると，2 物体の運動方程式は，重力加速度の大きさを g として，

$$1：\ M\alpha = Mg - S$$

$$2：\ m\alpha = S - mg$$

となり，これらより S を消去して加速度の大きさ α は，

$$\alpha = \frac{M-m}{M+m}g \tag{A.22}$$

と求められる。

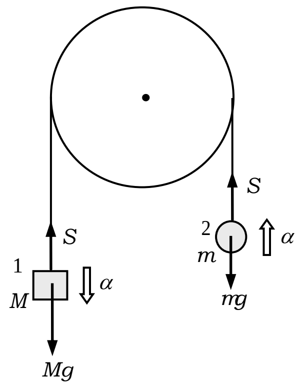

図 A.11

例題 A.5　質量の無視できない滑車にかけられた 2 物体の運動

質量 M_0，半径 a の薄い円板でつくられた滑らかに回転する滑車に，軽い糸で繋がれた質量 M と m（$< M$）の 2 物体 1, 2 がかけられている。糸はすべることがないとして，物体の加速度の大きさ β を求めよ。重力加速度の大きさを g とする。

【解答】

物体 1 側の糸の張力を S_1，物体 2 側の張力を S_2 とすると，2 物体の運動方程式は，

$$1：\ M\beta = Mg - S_1$$

$$2：\ m\beta = S_2 - mg$$

物体 1 が距離 x だけ下降したときの滑車の左回りの回転角を θ とすると，糸が滑らない条件は $x = R\theta$ である。これより，$\omega = \dot{\theta}$ として，

$$\beta = R\dot{\omega}$$

糸の張力による滑車の回転軸のまわりの力のモーメントは，左回りを正として，$(S_1 - S_2)R$ であるから，滑車の慣性モーメント $I = \frac{1}{2}M_0R^2$ より，回転運動方程式は，

$$I\dot{\omega} = (S_1 - S_2)R$$

これらより，$S_1, S_2, \dot{\omega}$ を消去して，加速度 β は，

$$\beta = \frac{2(M-m)}{M_0 + 2(M+m)}g$$

ここで，滑車の質量が無視できるとき，$M_0 = 0$ として(A.22)式より $\beta = \alpha$ となることがわかる。■

(2)　斜面上を転がる球

一様な球が粗い斜面上を転がりながら下降する運動を考えてみよう。この場合，球と

斜面の間に摩擦がないと転がることはなく，球は斜面上をすべり落ち，球の重心（中心）を通る回転軸は，回転軸の向きを一定に保ったまま加速度運動をする。

一般に，質量 M の剛体に外力 $\boldsymbol{F}$ が作用して運動するとき，重心の加速度を $\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}$ とすると，重心の運動方程式は,

$$M\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{F}$$

で与えられる。また，剛体の重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントを I，回転軸のまわりの左回りの角速度を ω，回転軸のまわりの左回りの外力のモーメントを N とすると，回転運動の方程式は，固定軸のまわりの回転運動の場合と同様に,

$$I\frac{d\omega}{dt} = N$$

と書ける[3]。

例題 A.6　転がる球の運動

質量 M，半径 R の一様な球が水平面と角 θ をなす粗い斜面上をすべることなく転がりながら下降している。球の加速度 α と，球がすべらないための球と斜面の間の静止摩擦係数 μ に対する条件を求めよ。重力加速度の大きさを g とする。

【解答】

図 A.12 のように，球に斜面から作用する静止摩擦力と垂直効力の大きさをそれぞれ F, N とする。球の中心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントを $I = \frac{2}{5}MR^2$，中心のまわりに回転する角速度の大きさを ω とすると，球の中心の運動方程式と中心のまわりの回転運動方程式はそれぞれ,

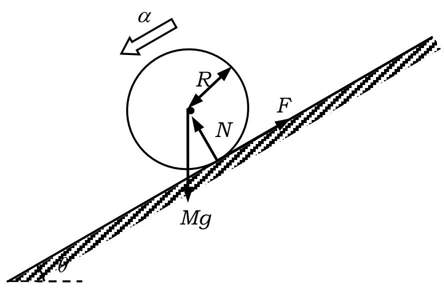

図 A.12

$$M\alpha = Mg\sin\theta - F$$

$$I\dot{\omega} = F \cdot R$$

また，球がすべらない条件は,

$$\alpha = R\dot{\omega}$$

これらより，F と $\dot{\omega}$ を消去して $I = \frac{2}{5}MR^2$ を代入する。

$$\alpha = \frac{1}{1 + I/MR^2}g\sin\theta = \underline{\frac{5}{7}g\sin\theta}$$

摩擦がないときにすべり落ちる加速度の大きさは $g\sin\theta$ であるから，上の加速度の大き

[3]ここでは示さないが，これらのことは，剛体を質点の集合体と考えて，各質点の運動方程式および回転運動の方程式をつくることにより示される。

さ α は，それより小さく，$\dfrac{5}{7}$倍になることがわかる。

また，静止摩擦力の大きさ F は，

$$F=\frac{I\dot{\omega}}{R}=\frac{I}{R^2}\alpha=\frac{2}{7}Mg\sin\theta$$

となり，垂直抗力の大きさ N は，斜面に垂直方向の球のつり合いより，

$$N=Mg\cos\theta$$

であるから，すべらない条件は，$F\le\mu N$ より，

$$\underline{\mu\ge\frac{2}{7}\tan\theta}$$

なお，球がすべりながら転がるとき，$\alpha>R\dot{\omega}$ となる。 ■

(3)　剛体の微小振動

実体振り子

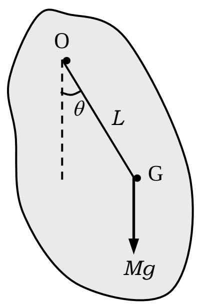

図 A.13

図 A.13 のように，紙面に垂直な固定軸 O のまわりに剛体が振動する振り子を，一般に，**実体振り子**（physical pendulum）という。

質量 M の剛体の重心を G とし，OG= L，OG が鉛直線となす角を θ，軸 O のまわりの剛体の慣性モーメントを I とすると，軸 O の左回りを正とした回転運動の方程式は，$\dot{\omega}=\ddot{\theta}$ を用いて，

$$I\ddot{\theta}=-Mg\cdot L\sin\theta$$

と書ける。ここで，微小振動を考えて$|\theta|<<1$とすると，$\sin\theta\approx\theta$ より，

$$I\ddot{\theta}=-MgL\cdot\theta$$

となり，単振動の運動方程式になる。これより，この振り子の周期T は，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}} \qquad \text{(A.23)}$$

となる。

例題 A.7　ボルダの振り子

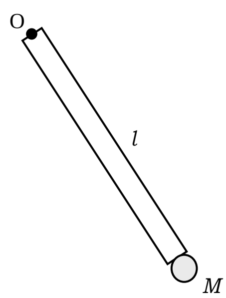

図 A.14

図 A.14 のように，長さ l の一様な棒の一端に質量 M のおもりをつけて，他端を通る紙面に垂直な回転軸 O のまわりに振動させる振り子を，**ボルダの振り子**（Borda’s pendulum）という。

(a)　この振り子において，棒の質量とおもりの大きさが十分に小さければ，回転軸 O のまわりの微小振動の周期T は，小さなおもりに長さ l の軽い糸をつけて微小振動させたときの周期の式(6.21)に一致することを示せ。

(b)　おもりを半径 R の球とする。棒の質量が無視できるとき，微小振動の周期 T_1 を求めよ。

【解答】

(a)　棒の質量とおもりの大きさが十分に小さければ，軸 O からボルダの振り子の重心までの距離は l と近似できる。また，この振り子の軸 O のまわりの慣性モーメント I は，

$$I \approx Ml^2$$

と書けるから，(A.23)式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ml^2}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となり，単振子の周期の式(6.21)に一致することがわかる。

(b)　おもりの中心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントは $I = \dfrac{2}{5}MR^2$ である。回転軸 O のまわりのおもりの慣性モーメント I_1 は，平行軸の定理を用いて，

$$I_1 = \frac{2}{5}MR^2 + M(l+R)^2$$

となる。ここで，(A.23)式を用いて，微小振動の周期 T_1 は，

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{(2/5)MR^2 + M(l+R)^2}{Mg(l+R)}} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{2R^2/5l + l(1+R/l)^2}{g(1+R/l)}}}$$

となる。■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

電　磁　気

第０章　電磁気学への序

力学では，はじめに自然界のもつ性質として認める必要のある基本法則があった。それと同様に，電磁気学にも，はじめに認める必要のある基本法則（あるいは基本的な実験事実）がある。それらは，次の３つである。これらの実験に基づかれた法則とその意味，さらに，それらの使い方を，第１章以降で丁寧に説明していくことにしよう。

１．クーロンの実験

この実験により，電荷の間に作用するクーロンの法則が成り立つことがわかる。クローロンの法則は，ガウスの法則へと一般化される。ガウスの法則は，電場に関するものと磁場に関するものが存在する。

２．電流のつくる磁場に関する実験

この実験により，アンペールの法則を得ることができる。アンペールの法則は，さらにマクスウェル - アンペールの法則として一般化される。

３．ファラデーの実験

この実験により，電磁誘導の法則が得られる。

ここに述べた電場に関するガウスの法則，磁場に関するガウスの法則，電磁誘導の法則，マクスウェル - アンペールの法則を，数式を用いてまとめたものはマクスウェル方程式と呼ばれ，これらの方程式を用いると，電磁気学のすべての性質が導かれることになる。これらから電磁波の存在が予言され，実際に観測されることになる。

第１章　静電場

1.1　静電気

帯電現象と電荷

ガラス棒を絹の布で擦ると，ガラス棒は正の電気を帯び，エボナイト棒を毛皮で擦ると，エボナイト棒は負の電気を帯びる。このような帯電現象はなぜ起きるのであろうか。

物体は**原子**（atom）からできており，原子は正の電荷をもつ**原子核**（atomic nucleus）と負の電荷をもつ**電子**（electron）からなる。原子核と電子の電荷がつり合い，電気的に中性になっていた原子が何らかの作用を受けると，電子を失って正の**イオン**（ion）になったり，逆に電子を受け入れて負のイオンになったりする。２つの物体を擦り合せると，イオンや電子がもともと中性であった一方の物体から他方の物体に移動し，それぞれの物体が正または負に帯電する。このように帯電する電気の実体を**電荷**（electric charge）という。電荷の単位にはクーロン（記号は C）が用いられる。電荷の流れを**電流**（electric current）といい，1A（アンペア）の電流[1]が１秒間に運ぶ電荷を 1C という。正の電荷どうし，あるいは，負の電荷どうしの間には斥力がはたらき，正の電荷と負の電荷の間には引力が作用する。

導体と絶縁体

電気をよく通す物質を**導体**（conductor），電気をほとんど通さない物体を**絶縁体**（insulator）という。絶縁体は**誘電体**（dielectric substance）ともよばれる。また，導体と絶縁体の中間程度に電流を流す物質を**半導体**（semiconductor）という。導体の多くは金属である。金属内には，自由に動くことのできる電子（これを**自由電子**（free electron）という）が多くあり，自由電子が移動することにより電荷を運び，電流が流れる。一方絶縁体では，原子内の電子は原子から離れて自由に動くことができず，電流を流さない。

静電誘導

図 1.1 のように，正に帯電した物体 A を導体 B に近づけると，B の A に近い側に負の電荷が現れ，A から遠い側に正の電荷が現れる。その結果，導体 B は物体 A に引き付けられる。このように，帯電した物体の影響で，導体の電荷分布に偏りが生じる現象を**静電誘導**（electrostatic induction）という。また，導体に限らず，帯電体を絶縁体に近づけても絶縁体の表面に電荷が現れる。この現象を**誘電分極**（dielectric polarization）という。

---

[1] 1A の定義は，第５章で述べる。

[2] 現在の日本の高校物理では，磁荷を用いて磁場 H を定義し，真空中では， H に真空の透磁率 μ_0 をかけた量を磁束密度 B （ $\mu_0 H$ ）を定義しているが，ここでは，世界の主流の考えに従って，動いている電

図 1.1

箔検電器

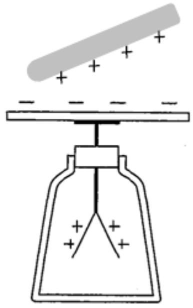

図 1.2

図 1.2 のような器具を**箔検電器**という。はじめ中性に保たれていた箔検電器の金属板に正に帯電した棒を近づけると，静電誘導により，金属板には負電荷が現れ，容器内の箔には正電荷が現れる。その結果，箔どうしの間に斥力が作用して，箔は開く。

例題 1.1　箔検電器の性質

はじめ電荷を蓄えていない電気的に中性の箔検電器の金属板に，負電荷を帯電させたエボナイト棒を近づけ，エボナイト棒を近づけたまま金属板に手を軽く触れた。その後，手を離してからエボナイト棒も金属板から遠ざけた。

(a)　箔検電器の箔の開きはどのように変化するか，簡単に述べよ。

(b)　前問(a)に続いて，正に帯電させたガラス棒を箔検電器の金属板に近づけた。箔の広がりはどのように変化するか答えよ。

【解答】

(a)　負に帯電させたエボナイト棒を，中性の箔検電器の金属板に近づけると，金属板に正電荷が引き寄せられ，箔には負電荷が残り，箔は開く（図 1.3a）。次に，金属板に手を触れると，箔の負電荷が手を通して逃げるため，箔は閉じる（図 1.3b）。さらに手を離してからエボナイト棒を遠ざけると，金属板に溜まっていた正電荷が金属板と箔全体に広がるので，箔はわずかに開く（図 1.3c）。

(b)　正に帯電したガラス棒を金属板に近づけると，金属板に負電荷が誘起され，金属板に溜まっていた正電荷に加えて金属板の負電荷と等しい大きさの正電荷が箔に加えられる。その結果，箔は大きく開く（図 1.4）。

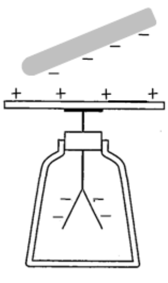

図 1.3a

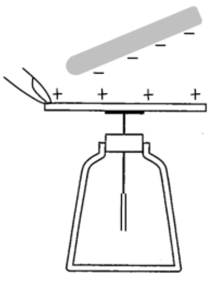

図 1.3b

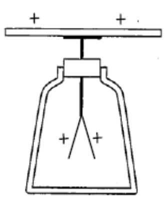

図 1.3c

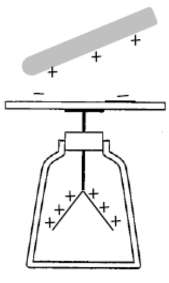

図 1.4　■

1.2　クーロンの法則

1785 年，クーロン（C.A.Coulomb）は，ねじり秤を用いて帯電した電荷間に作用する力を直接に測定することにより，**クーロンの法則**（Coulomb's law）とよばれる電磁気学の基本法則を提案した。

電荷が 1 点に集中した理想的な電荷を**点電荷**（point charge）という。真空中で距離 r だけ離れている 2 つの点電荷 q_1 と q_2 の間には，両者を結ぶ直線の方向の力

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.1}$$

がはたらく。比例定数 k は，$k = 8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$ で与えられ，$F>0$ のとき斥力，$F<0$ のとき引力である（図 1.5a, b）。これがクーロンの法則である。ここで，

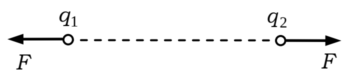

図 1.5a：$F>0$

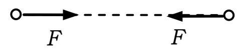

図 1.5b：$F<0$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

とおいて，**真空の誘電率**（permittivity of vacuum）$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}$ を定義しよう。

(1.1)式で与えられる力は，静止している点電荷間にはたらく力であり，**静電気力**（electrostatic force）という。この力は，電荷間の距離の 2 乗に反比例する逆 2 乗則にしたがい，万有引力と類似の形をしている。

1.3　電場と電位

クーロンの法則にしたがって 2 つの点電荷間にはたらく力は，はじめ，遠く離れた電荷間に直接作用する**遠隔作用**（action at a distance）の力と考えられたが，1 つの点電荷の影響がその周囲から順次伝わりもう 1 つの電荷に伝わる**近接作用**（action through medium）の考えの下に，**電場**（electric field）が考えられるようになった。

(1)　電場

図 1.6 のように，点 P に静止している電荷 q に力 $\boldsymbol{f}$ が作用するとき，点 P の電場 $\boldsymbol{E}$ を，

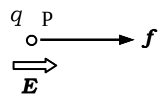

図 1.6

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{f}}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f} = q\boldsymbol{E} \tag{1.2}$$

で定義する。これより，

$q>0$ のとき，電場 $\boldsymbol{E}$ と力 $\boldsymbol{f}$ は同じ向き

$q<0$ のとき，電場 $\boldsymbol{E}$ と力 $\boldsymbol{f}$ は逆向き

となる。

ある点の電場は，その点に単位正電荷（+1C）を置いたときにはたらく力に等しく，向

きと大きさをもつ**ベクトル**（vector）であり，その単位は〔N/C〕で与えられる。

点電荷による電場

クーロンの法則(1.1)と電場の定義(1.2)から，点電荷 q から距離 r だけ離れた点にできる電場の強さ E は,

$$E = k\frac{q}{r^2} \tag{1.3}$$

と表され,

$q > 0$ のとき，電場は電荷 q から離れる向き

$q < 0$ のとき，電場は q に近付く向き

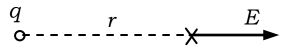

図 1.7： $q > 0$ のとき

であることがわかる（図 1.7)。

(2)　**電位**

電荷に電気的位置エネルギーを与えるもとになるものを**電位**（electric potential）という。ある点 P に置かれた電荷 q が位置エネルギー U をもつとき，点 P の電位 V を,

$$V = \frac{U}{q} \quad \Leftrightarrow \quad U = qV$$

で定義する。これより，

$q > 0$ のとき，電位 V と位置エネルギー U は同符号

$q < 0$ のとき，電位 V と位置エネルギー U は逆符号

となる。

ある点の電位は，その点に単位正電荷（+1C）を置いたときにもつ電気的位置エネルギーに等しく，任意に定めることのできる電位ゼロの点（これを基準点とする）に対する相対的な量である。また，電位は向きをもたない**スカラー**（scalar）であり，その単位はボルト（記号は V(=J/C)）で与えられる。

点電荷による電位

点電荷 Q から距離 r だけ離れた点 P の電位 V を求めよう。電位は単位電荷（+1C）の位置エネルギーに等しいので，位置エネルギーの定義にしたがって，まず基準点を無限遠と定めよう。そうすると，V は，単位電荷を点 P から無限遠まで移動させる間に Q から作用する静電気力のする仕事を求めればよい。図 1.8 のように，単位電荷が Q から距離 x だけ離れているときに作用する力は，その点の電場 $E(x) = k\dfrac{Q}{x^2}$ に等しいから，電位 V は,

$$\begin{aligned} V &= \int_r^\infty E(x)dx = kQ\int_r^\infty \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{kQ}{r} \end{aligned} \tag{1.4}$$

と求められる。

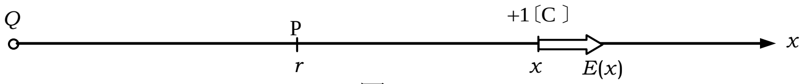

図 1.8

(1.4)式より，

$$Q > 0 \text{ のとき，} V > 0$$
$$Q < 0 \text{ のとき，} V < 0$$

となる。

(3)　電場と電位の関係

微積分の基本定理

a を定数とすると，x の関数 $f(x)$ に対して，

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \tag{1.5}$$

が成り立つ。

電場は電位の勾配

点電荷による電位を求める計算と同様に考えて，位置 $x = x_0$ を基準点とすると，位置 x での電位 $V(x)$ は,

$$V(x) = \int_x^{x_0} E(x')\,dx' = -\int_{x_0}^{x} E(x')\,dx'$$

と書ける。この式の両辺を x で微分し，微積分の基本定理を用いて，電場 $E(x)$ と電位 $V(x)$ の関係を,

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} E(x')\,dx' = -E(x)$$

$$\therefore \quad E(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \tag{1.6}$$

と得ることができる。

(1.6)式より，電場の大きさは電位の傾きの大きさに等しく，電場は電位の高い位置から低い位置に向かうことが分かる（図 1.9）。

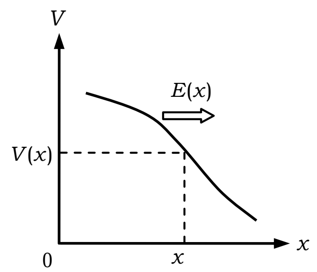

図 1.9

電場と電位の合成

図 1.10 のように，2 つの点電荷 q_1 と q_2 から，それぞれ距離 r_1, r_2 離れた点 P にできる電場 $\boldsymbol{E}$ は，q_1 によって点 P にできる電場 $\boldsymbol{E}_1$ と，q_2 によって点 P にできる電場 $\boldsymbol{E}_2$ のベクトル和として,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$$

で与えられる。

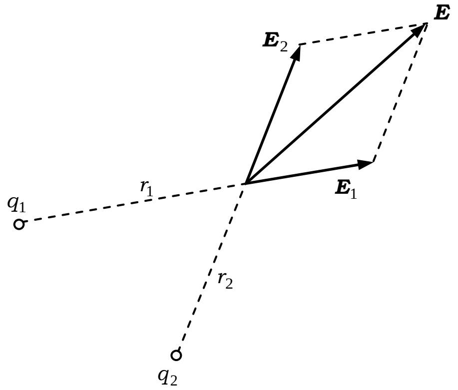

図 1.10

2 つの点電荷 q_1 と q_2 から，それぞれ距離 r_1, r_2 離れた点 P の電位 V は，q_1 によって点 P に生じる電位 V_1 と，q_2 によって点 P に生じる電位 V_2 のスカラー和として，

$$V = V_1 + V_2$$

で与えられる。合成の電位は，それぞれの符号を含めた和である。

例題 1.2　２つの点電荷による電場と電位

図 1.11 のように，真空中で，おなじ２つの正の点電荷 q が y 軸上の点 $\mathrm{A}(0, a)$ と点 $\mathrm{B}(0, -a)$（$a > 0$）に固定されている。このとき，x 軸上の電場と電位を求め，それらのグラフを描け。ただし，クーロンの法則の比例定数を k とする。

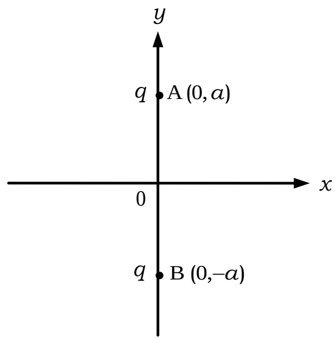

図 1.11

【解答】

x 軸上の点 $\mathrm{P}(x, 0)$ の電場 $E(x)$ と電位 $V(x)$ を考える。ただし，2 つの点電荷が x 軸に関して対称に配置されているから，電場は x 軸方向を向く。そこで，x 軸正方向の電場を正とする。

図 1.12 のように，2 つの点電荷は，点 P に，x 軸に関して対称な向きに同じ強さ $E_1(x)$ の電場をつくる。A, P 間と B, P 間の距離は共に $\sqrt{x^2 + a^2}$ であり，線分 AP と BP が x 軸となす角 θ は，

$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ で与えられるから，電場 $E(x)$ は，

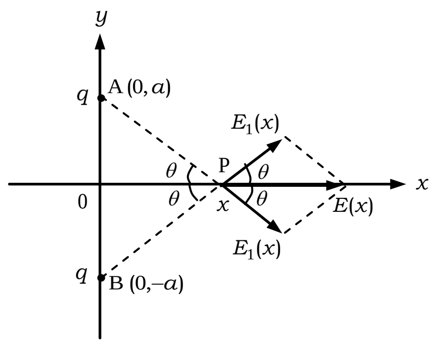

図 1.12

$$E(x) = 2E_1(x)\cos\theta$$

$$= 2 \cdot \frac{kq}{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \underline{\frac{2kqx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}}$$

電位 $V(x)$ は，

$$V(x) = 2 \cdot \frac{kq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \underline{\frac{2kq}{\sqrt{x^2 + a^2}}}$$

となる。ここで，$V(x)$ を x で微分することにより，(1.6)の関係式が成り立っていることが確かめられる。

$E(x)$ と $V(x)$ のグラフは，図 1.13a, b のようになり，$E(x)$ は x の奇関数であるから，そのグラフは原点に関して対称であり，$V(x)$ は x の偶関数であるから，そのグラフは V 軸に関して対称である。

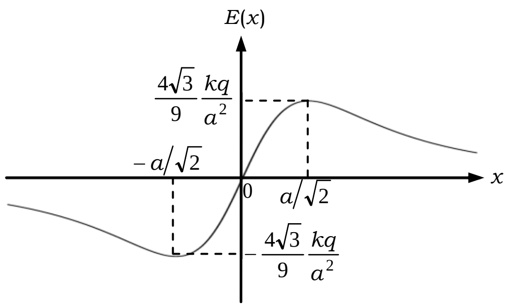

図 1.13a

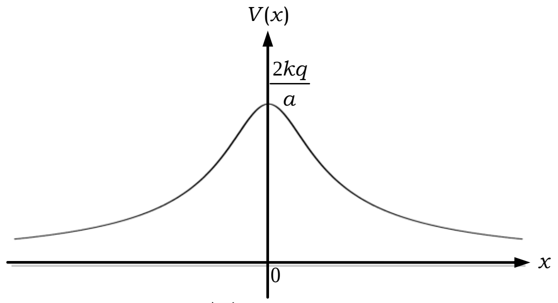

図 1.13b

■

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

例題 1.3　帯電した円輪による電場と電位

図 1.14 のように, 真空中で, 半径aの円形導線に線密度λで電荷が一様に分布している。このとき，円形導線の中心軸上，中心 O から距離x離れた点 P における電場$E(x)$を，真空中の誘電率ε_0を用いて求めよ。

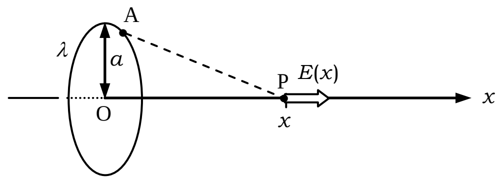

図 1.14

【解答】

円周上で点 A の近傍の長さdsの微小線分に分布する電荷λdsによる，点 P の電場の強さdEは,

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda ds}{x^2+a^2}$$

線分 AP とx軸のなす角θを用いて，$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$より,

$$E(x) = \oint dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}ds = \underline{\frac{a\lambda x}{2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}}$$

ここで，記号$\oint$は，円形導線一周の積分を表し，被積分関数が点 A の導線上の位置によらず，$\oint ds = 2\pi a$となることを用いた。　■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

(4)　電荷系のつり合い

一般に，時間的に変動しない**静電場**（electrostatic field）中に置かれた複数個の電荷（電荷系）に，静電気力以外の力が作用しないとき，**安定なつり合い**（stable equilibrium）は存在しない。これを**アーンショウの定理**（Earnshaw' theorem）という。安定なつり合いの位置とは，電荷をつり合いの位置からどのような向きに微小変位させても，元のつり合いの位置に戻そうとする力が作用する位置のことをいう。

３つの点電荷によるつり合い

図 1.15 のように，２つの同じ点電荷Qが$x-y$平面上の２点 A$(a, 0)$，B$(-a, 0)$に固定されている。このとき，原点$(0, 0)$に点電荷qをおくとき，Qとqが同符号（$Qq>0$）であるか異符号（$Qq<0$）であるかによらず，qにはたらく力はつり合う。

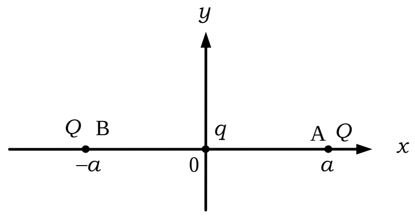

図 1.15

$Qq>0$のとき，点電荷qをx軸上で点 A に近付けると，２つの点電荷Qからqにはたらく合力は原点に戻そうとする向きとなり（図 1.16），qを点 B に近付けても原点の戻そうとする力がはたらくから，qはx軸上で見る限り，原点で安定なつり合いになっている。しかし，qをy軸方向に動かすと，qに作用する合力は原点から遠ざかる向きとなるから（図 1.17），qは原点で**不安定**（unstable）である。

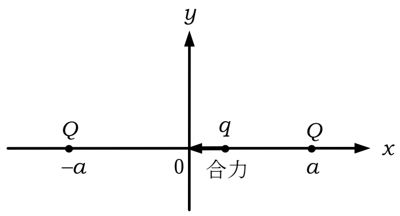

図 1.16

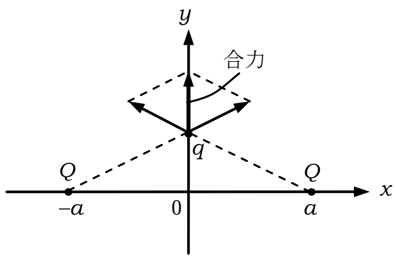

図 1.17

$Qq<0$のとき，qはy軸方向には安定であるが，x軸方向には不安定であり，この場合も，原点は安定なつり合いの位置ではない。

例題 1.4　３電荷をつり合わせる

図 1.15 のように，点電荷Qを２点 A$(a, 0)$，B$(-a, 0)$に，点電荷qを原点に，すべてを自由に動ける状態にしておくとき，３つの電荷にはたらく力がすべてつり合った。

(a)　qをQを用いて表せ。

(b)　３つの点電荷がすべてつり合った状態で２つの点電荷Qを固定し，点電荷qを原点からx軸正方向にわずかに動かして２つの点電荷Qの固定を解くと，点 A と B の電荷Qはそれぞれどの方向に動き出すか。また，３つの電荷がつり合った状態で２つの点電荷Qを

固定し，q を原点から y 軸正方向にわずかに動かして２つの点電荷 Q の固定を解くと，点 A と B の電荷 Q はそれぞれどの方向に動き出すか。

【解答】

(a)　２つの点電荷 Q から点電荷 q にはたらく力は，q と Q の値にかかわらずつねにつり合う。点電荷 Q にはたらく力がつり合う条件は，合力がゼロになるとして，

$$k\frac{Q^2}{(2a)^2}+k\frac{Qq}{a^2}=0 \quad \therefore \quad q=\underline{-Q/4}$$

(b)　点電荷 q を原点から x 軸正方向にわずかに動かすと，q と点 A の電荷 Q の間の引力が強くなり，q と点 B の間の引力は弱くなる。また，点２つの電荷 Q 間の斥力は変わらないから，点 A の電荷は x 軸負方向に動き出し，点 B の電荷も x 軸負方向に動き出す。

点電荷 q を原点から y 軸正方向にわずかに動かすと，q と点 A，q と点 B の電荷間の引力の x 成分の大きさが共に弱くなると同時，点 A, B の２つの電荷には共に y 軸正方向の力が作用する。また，２つの点電荷 Q 間の斥力は変わらないから，点 A の点電荷 Q は，x 軸正方向と y 軸正方向の間の方向に動き出す。一方，点 B の点電荷 Q は，x 軸負方向と y 軸正方向の間の方向に動き出す。■

(5)　電荷系の静電エネルギー

電荷系において，全電荷がもつ電気的位置エネルギーの和を電荷系の**静電エネルギー**（electrostatic energy）という。

２電荷系

まず，図 1.18 のように，２つの点電荷 q_1 と q_2 が距離 r_{12} だけ離れた点 P と Q に固定されているとき，２つの点電荷のもつ静電エネルギーを考えよう。点電荷 q_2 による点 P の電位 $V_1^{(2)}$ および q_1 による点 Q の電位 $V_2^{(2)}$ は，無限遠の電位を基準としてそれぞれ，

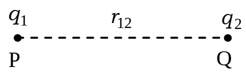

図 1.18

$$V_1^{(2)}=\frac{kq_2}{r_{12}}, \quad V_2^{(2)}=\frac{kq_1}{r_{12}}$$

と書ける。いま，点電荷 q_2 を固定し，q_1 を無限遠から点 P に移動させるのに加える仕事は $q_1V_1^{(2)}$ であり，この間，q_2 は固定されたままであるから仕事をされない。したがって，q_1 と q_2 全体でもつ静電エネルギーは $q_1V_1^{(2)}$ である。一方，点電荷 q_1 を固定し，q_2 を無限遠から点 Q に移動させるのに加える仕事は $q_2V_2^{(2)}$ であるから，静電エネルギーは $q_2V_2^{(2)}$ にも等しい。このとき，２つの点電荷 q_1 と q_2 がもつ静電エネルギー $U^{(2)}$ は，

$$U^{(2)}=q_1V_1^{(2)}=q_2V_2^{(2)}=\frac{1}{2}\left(q_1V_1^{(2)}+q_2V_2^{(2)}\right)=\frac{kq_1q_2}{r_{12}} \tag{1.7}$$

と表される。この系の静電エネルギーは $2U^{(2)}$ とならないことに注意しよう。

３電荷系

次に，図 1.19 のように，２つの点電荷q_1, q_2が距離r_{12}だけ離れた２点 P, Q に固定された状態で，点電荷q_3を点 P, Q から，それぞれ距離r_{13}とr_{23}だけ離れた点 R に固定したとき，３つの点電荷がもつ静電エネルギーを考えよう。

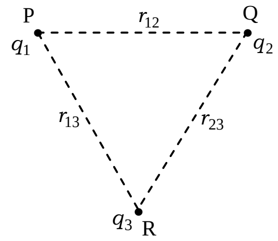

図 1.19

q_2, q_3による点 P の電位$V_1^{(3)}$，q_3, q_1による点 Q の電位$V_2^{(3)}$，q_1, q_2による点 R の電位$V_3^{(3)}$はそれぞれ，

$$V_1^{(3)} = k\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}}\right),\quad V_2^{(3)} = k\left(\frac{q_3}{r_{23}} + \frac{q_1}{r_{12}}\right),\quad V_3^{(3)} = k\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

となる。点電荷q_1, q_2を固定し，q_3を無限遠から点 R に移動させる仕事は$q_3V_3^{(3)}$であるから，３電荷q_1, q_2, q_3が全体でもつ静電エネルギー$U^{(3)}$は，

$$\begin{aligned} U^{(3)} &= U^{(2)} + q_3V_3^{(3)} \\ &= \frac{1}{2}\left(q_1V_1^{(3)} + q_2V_2^{(3)} + q_3V_3^{(3)}\right) = k\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_3q_1}{r_{13}}\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

と書ける。すなわち，$U^{(3)}$は，q_1, q_2がペアでもつエネルギー$\dfrac{kq_1q_2}{r_{12}}$，q_2, q_3がペアでもつエネルギー$\dfrac{kq_2q_3}{r_{23}}$およびq_3, q_1がペアでもつエネルギー$\dfrac{kq_1q_3}{r_{13}}$の和に等しいことがわかる。

例題 1.5　３つの点電荷の静電エネルギー

図 1.20 のように，$x-y$平面上の点 A$(a,\ 0)$，点 B$(-a,\ 0)$に，質量Mの同じ２つの点電荷Q（>0）が固定されている。いま，点電荷q（>0）を点 C$\left(0,\ \sqrt{3}a\right)$から原点 O$(0,\ 0)$まで移動させて固定した。続いて，３つの点電荷の固定を解いた。点電荷には静電気力のみが作用するとせよ。

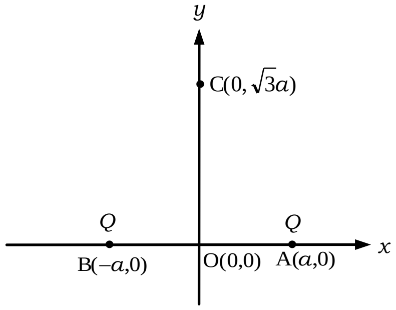

図 1.20

(a)　点電荷qを点 C から原点 O まで移動させるのに必要な仕事を求めよ。

(b)　３つの点電荷の固定を解いて十分時間がたった後の電荷Qの速さを求めよ。

【解答】

３点 A, B, C は，一辺の長さ$2a$の正三角形をなしている。

(a)　点 A と B の点電荷Qによる点 C の電位V_Cと原点 O の電位V_Oはそれぞれ，

$$V_\mathrm{C}=2\cdot\frac{kQ}{2a}=\frac{kQ}{a},\quad V_\mathrm{O}=2\cdot\frac{kQ}{a}=\frac{2kQ}{a}$$

求める仕事Wは, 点電荷qが原点 O と点 C でもつ位置エネルギーの差に等しいから，

$$W=q(V_\mathrm{O}-V_\mathrm{C})=\underline{\frac{kQq}{a}}$$

(b)　点電荷qが原点 O にあるとき，３つの点電荷のもつ静電エネルギーUは，

$$U=\frac{kQ^2}{2a}+qV_\mathrm{O}=\frac{kQ(Q+4q)}{2a}$$

となる。固定を解くと，２つの点電荷Qは，互いに逆向きに同じ速さで動くが，点電荷qに作用する合力はゼロとなり動かない。その結果，固定を解く直前にもっていた全静電エネルギーUの 1/2 がQの運動エネルギーになる。十分時間がたったときのQの速さvは，

$$\frac{1}{2}Mv^2=\frac{U}{2}=\frac{kQ(Q+4q)}{4a}\quad\therefore\quad v=\underline{\sqrt{\frac{kQ(Q+4q)}{2Ma}}}$$ ■

第２章　ガウスの法則とコンデンサー

静電場を考える上で重要な法則であるガウスの法則を考える。ガウスの法則は，電気力線を考えることにより，クーロンの法則から導かれる。

2.1　電気力線とガウスの法則

(1)　電気力線

各点の電場を繋いだ曲線を**電気力線**（line of electric force）あるいは**電場線**（electric field line）という。例えば，$\pm Q$ の２つの電荷の周囲の電場の様子を表すために，しばしば電気力線が描かれる。その際，電気力線の密度が，各点の電場の強さを表すように描かれる。図 2.1 において，各曲線上の点 A, B, C でのそれぞれの電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$ は，各点での曲線の接線方向を向いており，その強さは，それぞれの点での電気力線の密度に比例する。したがって，電気力線の密度が大きいところの電場は強く，電気力線の密度の小さい点の電場の強さは弱い。図 2.1 では，$|\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}| > |\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}| > |\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}|$ である。

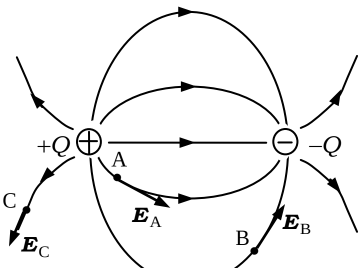

図 2.1

点電荷から放出される電気力線と吸収される電気力線

「各点で，電場に垂直な単位面積あたり電場の強さに等しい電気力線を引く」と約束する。そうすると，点電荷 q（> 0）から放出される電気力線の数は，次のように考えると求められる。

図 2.2 のように，真空中で点電荷 q を中心に半径 r の球面 S をとる。球面 S 上の電場は，球の中心から離れる向きであり，その強さ E は，真空の誘電率を ε_0 として，

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

となる。この電場は，球面 S 上のどこでも S に垂直で同じ大きさであるから，S を通して球面の外に出る電気力線の数 N は，

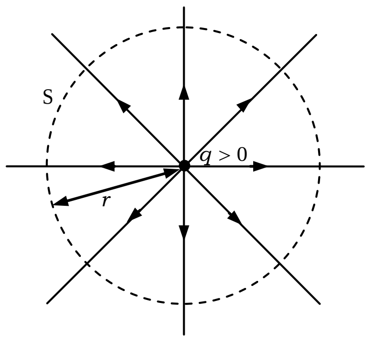

図 2.2

$$N = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

と書ける。この N の値は，球面の半径 r によらない。このことは，電荷 q から放出される電気力線の数が N 本であることを示し，また，真空中で電気力線は生成・消滅，さらに枝分かれすることもないがわかる。

$q < 0$ のとき，電気力線の向きは $q > 0$ の場合とすべて逆になるから，点電荷 q には，

$|N| = \dfrac{|q|}{\varepsilon_0}$ 本の電気力線が吸収されることもわかる。

(2)　ガウスの法則

多数の点電荷 $q_1, q_2, \cdots$ があったらどうであろうか。各点電荷から放出される電気力線の数は，それぞれ $\dfrac{q_1}{\varepsilon_0}$ 本，$\dfrac{q_2}{\varepsilon_0}$ 本，… となり，$q_i < 0$（$i = 1, 2, \cdots$）とすると，$\dfrac{|q_i|}{\varepsilon_0}$ 本の電気力線を吸収する。また，電荷が存在しない真空中では，電気力線は吸収も放出もされず，連続的に繋がるから，全電荷から放出される電気力線の数は，

$$\frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \cdots = \frac{q_1 + q_2 + \cdots}{\varepsilon_0}$$

となる。正負の電荷が連続的に分布していても同様であるから，次の法則が成り立つ。

任意の閉曲面から放出される電気力線の数の総和 N は，閉曲面内の全電荷が Q のとき，

$$N = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.1}$$

と書ける（図 2.3）。これを**ガウスの法則**（gauss' law）という。

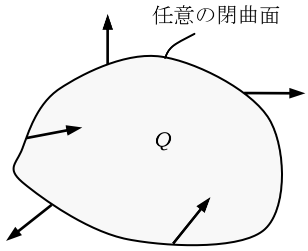

図 2.3

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

(3)　ガウスの法則の積分表現

ガウスの法則を数式によって表すとどのように書けるか，示しておこう。

図 2.4 のように，微小面積 dS の微小面に斜め方向に電場 $\boldsymbol{E}$（$|\boldsymbol{E}| = E$）がかけられているとする。また，微小面に垂直で大きさが dS に等しい微小ベクトルを $d\boldsymbol{S}$ と表すことにする。この微小面の $d\boldsymbol{S}$（法線方向）と電場のなす角を θ とすると，微小面と電場に垂直な面とのなす角も θ である。したがって，この微小面を貫く電気力線の数は，

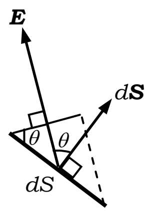

図 2.4

$$E \cdot dS \cos\theta = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$$

と書ける。これより，任意の閉曲面 S から放出される電気力線の総数 N は，

$$N = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$$

と書ける。ここで，$\int_{\mathrm{S}}$ は，曲面 S に関する総和を表す積分記号であり，**面積分**（surface integral）とよばれるが，面積分の計算法などの詳細には触れない。

一方，微小体積 dV の電荷密度（単位体積あたりの電荷）を ρ とすると，この微小体積

内の電荷はρdVとなり，閉曲面内の領域Vの電荷の総和Qは，

$$Q = \int_{\mathrm{V}} \rho dV$$

と書ける。ここで，$\int_{\mathrm{V}}$ は領域Vに関する総和を表す積分記号であり，**体積分**（volume integral）とよばれるが，今回も，体積分の計算法などの詳細には触れない。

以上より，ガウスの法則は，積分記号を用いて，

$$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathrm{V}} \rho d\mathrm{V} \tag{2.2}$$

と表される。(2.2)式は，**積分形式のガウスの法則**（Gauss's law of integral form）とよばれる。

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆**【発展終】**

2.2　ガウスの法則の導体系への適用

静電場中に置かれた導体は，次の性質をもつ。この性質は，**導体に電流が流れていないとき**に成り立つ性質であることに注意しよう。電流が流れているときには，このような性質は成立しない。

i)　導体内に電場は存在しない。

導体内に電場$\boldsymbol{E}$が生じたとすると，導体内の自由に動ける電荷（多くの場合，電子）が移動し，電場$\boldsymbol{E}$を打ち消す電場$\boldsymbol{E}'$が生じ，合成電場はゼロとなる（図2.5）。

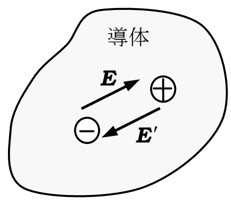

図2.5

ii)　導体は等電位である。導体表面に生じる電場は，表面に垂直である。

電位の勾配を与える電場が導体内でゼロであるから，導体の電位はどこでも等しい。また，導体表面に生じる電場が表面に平行な成分をもつと，表面に電位勾配が生じ，導体は等電位ではなくなる。したがって，導体表面の電場は，表面に垂直になる。

iii)　導体内に電荷は存在しない。導体に与えられた電荷や静電誘導で現れる電荷は，導体表面のみに分布する。

導体内に電荷があると，電荷から周囲に電場ができる。これはi)に反するから，導体内に電荷は存在しない。導体表面であれば，導体の外部に電場を生じることによって存在できる。

(1)　導体表面の電荷と電場

真空中に置かれた導体の表面の点 P での電荷密度をσとする。図2.6のように，点Pを含み表面に平行な微小面積dSの底面をもつ円柱形の閉曲面をとり，この閉

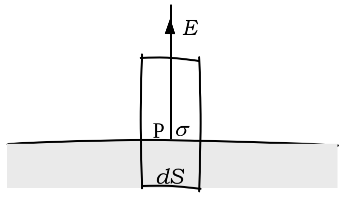

図2.6

曲面にガウスの法則を適用する。導体表面に垂直な電場の強さをEは，真空の誘電率ε_0を用いてガウスの法則より，

$$E \cdot dS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \quad \therefore \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.3}$$

と表される。

例題 2.1　導体表面に作用する力

真空中に置かれた導体の表面の点 P の電荷密度がσ（>0）で与えられるとき，点 P 付近の単位面積あたりに作用する力を求めよ。

【解答】

点 P で表面に垂直に生じる電場$E=\sigma/\varepsilon_0$は，点 P の表面電荷による電場だけではなく，点 P とは異なる場所にある電荷によって生じる電場との合成電場である。なぜなら，表面電荷による電場は，導体内にも導体外にも同じ強さE_1の電場を逆向きにつくる（図 2.7）。ところが，導体内の電場はゼロであるから，点 P から離れたところにある電荷が強さE_1の電場を打ち消す電場E_2（$=E_1$）をつくるはずである。このとき，電場E_2は，導体表面のすぐ内側とすぐ外側で等しい。こうして，導体表面外部の電場Eは，

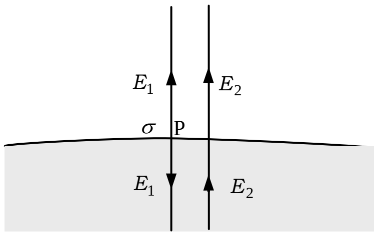

図 2.7

$$E = E_1 + E_2$$

と書ける。これより，

$$E_1 = E_2 = \frac{E}{2}$$

となる。

点 P 付近の電荷には，電場E_2から力を受けるから，求める力は，導体から離れる向きで，その大きさは，

$$f = \sigma E_2 = \frac{\sigma E}{2} = \underline{\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}} \tag{2.4}$$

■

(2)　鏡像法

ガウスの法則と電場と電位の関係式を用いると，一般的に，

「空間内にいくつかの点電荷があり，それらの周囲（境界）の電位を決めると，境界の内部の電位と電場は一通りに定まる」

ことがわかる。

平面導体と点電荷

図 2.8 のように，真空中で無限に広い導体平板から距離aの点 A に，正の点電荷Qをおき，無限遠の電位をゼロとする。このとき, 導体平板の点A側の空間内の任意の点の電位と電場は, 点 A の電荷Qと，点 A の平板に関する対称点 B に置かれた点電荷$-Q$による電場と電位に等しい。なぜなら，導体平板の電位は無限遠の電位ゼロに等しく，点 A と点 B の電荷$\pm Q$による線分 AB の垂直二等分面（導体平板の表面の位置）S の電位もゼロである。点 A から面 S に引いた垂線を AO とし，点 O を中心とした半径∞の半球面をS_∞とすると，平面 S と半球面S_∞上の電位がゼロと決められたので，その内部の電位は一通りに定まるからである。電位が一通りに定まれば，電場も一通りに定まる。

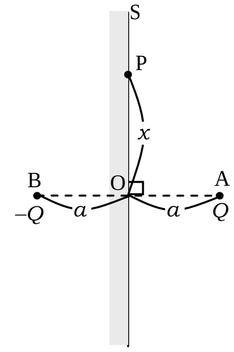

図 2.8

例題 2.2　平板導体表面の電荷分布と作用する力

(a)　図 2.8 のように導体平板と点電荷Qを置いたとき，平板導体表面上の点 P に誘起される電荷の面密度を求めよ。ただし，O,P 間の距離をxとする。

(b) 点電荷Qに作用する力を求めよ。ただし，真空の誘電率をε_0とする。

【解答】

(a)　点 P に生じる電場は，点 A に点電荷Q，点 B に点電荷$-Q$を置いたとき，点 P に生じる電場に等しい。∠PAO=θとし，$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$を用いると，点 P の電場$E$は，真空の誘電率$\varepsilon_0$を用いて，

$$E = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{a^2+x^2}\cos\theta = \frac{aQ}{2\pi\varepsilon_0(a^2+x^2)^{3/2}}$$

誘起される電荷は負であることに注意して，電荷密度σは，

$$\sigma = -\varepsilon_0 E = \underline{-\frac{aQ}{2\pi(a^2+x^2)^{3/2}}}$$

(b)　導体平板の点 A 側には，点 A にQ，点 B に$-Q$の点電荷を置いたときと同じ電場ができる。よって，点 A の点電荷Qに導体平板表面に誘起された電荷から作用する力は，点 B の点電荷$-Q$から作用する力に等しい。よって，求める力の大きさFは，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{(2a)^2} = \underline{\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}}$$

■

2.3　コンデンサー

他の物体と絶縁された物体に電荷Qを与えれば，Qはどこへ逃げることもできず蓄えら

れる。そこで，その導体を**コンデンサー**（condenser あるいは capacitor）とよび，その導体の電位をVとして，

$$C = \frac{Q}{V} \tag{2.5}$$

をコンデンサーの**電気容量**（electric capacity あるいは capacitance）という。電気容量は，蓄えた電荷や導体の電位によらず，導体の形状だけで定まる。

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

例題 2.3　導体球コンデンサー

真空中に置かれた半径aの導体球をコンデンサーと見たときの電気容量を求めよ。ただし，真空の誘電率をε_0とする。

【解答】

導体球に電荷Qを与えると，球の周囲には，中心のまわりに球対称な電場が生じる（図 2.9)。球の中心 O から距離rの点の電場の強さ$E(r)$は，ガウスの法則より，

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \therefore \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

となる。これは，点電荷Qからr離れた点の電場の強さに等しい。これより，無限遠の電位を基準とした導体球表面（すなわち，導体球そのもの）の電位Vは，

$$V = \int_a^\infty E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

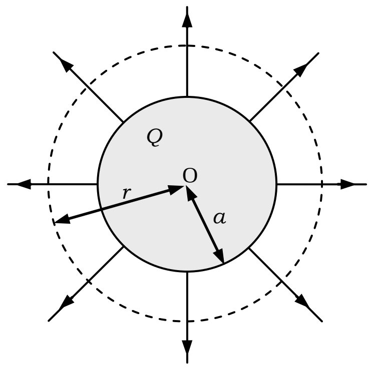

図 2.9

よって，導体球の電気容量Cは，

$$C = \frac{Q}{V} = \underline{4\pi\varepsilon_0 a}$$
■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

２つの導体に，同じ大きさの正と負の電荷を与える場合，その１対の導体をコンデンサーという。２つの導体に$\pm Q$（$Q > 0$）の電荷を与えたら，それら導体間に電位差Vが生じたとする。このとき，(2.5)式で与えられるCをコンデンサーの電気容量という。電位差のことを**電圧**（voltage）ともいう。

(1)　**平行板コンデンサー**

同じ形の２枚の平面導体（これを**極板**（capacitor plates）という）を向き合わせて並べたものを，**平行板コンデンサー**（parallel-plate capacitor）という。極板の面積をS，極板間隔をdとし，間隔dは極板の大きさ（極板が長方形のとき，その１辺の長さ，極板が円形であればその直径など）に比べて十分小さいとする。このとき，極板の端での

電場の乱れは無視でき，極板間に一様な電場ができると見なすことができる。

図 2.10 のように，２枚の平行な極板 A, B にそれぞれ Q と $-Q$ を与え，極板 A を含み，極板 A, B 間に A と同じ形の底面をもつ形の直方体形の閉曲面（図 2.10 で破線で示されている）をとり，ガウスの法則を適用する。極板間の電場の強さ E は，

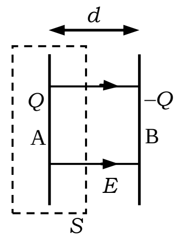

図 2.10

$$E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \therefore \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

極板間の電位差 V より，

$$V = E \cdot d = \frac{d}{\varepsilon_0 S} Q \quad \therefore \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

を得る。

例題 2.4　極板間の引力

面積 S の２枚の正方形の金属板（極板）A, B を平行に並べた平行板コンデンサーの極板に，それぞれ $\pm Q$ の電荷を与えたとき，極板間で引き合う力の大きさを求めよ。ただし，コンデンサーは真空中に置かれており，極板間隔は極板の１辺の長さに比べて十分小さく，真空の誘電率を ε_0 とする。

【解答】

図 2.11 のように，極板 A 上の電荷 Q は，左右両側に A から離れる向きに大きさ E_+ の電場を，極板 B 上の電荷 $-Q$ は，B に近付く向きに大きさ E_- の電場をつくる。このとき，$E_+ = E_-$ となり，極板の外側の電場はゼロになる。極板間の電場の強さを E とすると，

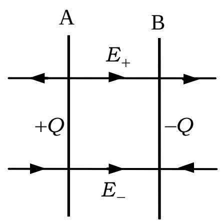

図 2.11

$$E = E_+ + E_- \quad \therefore \quad E_+ = E_- = \frac{E}{2}$$

となる。いま， A 上の電荷 Q は，電場 E_- から E_- の向きに大きさ $F_+ = QE_-$ の力を受け，B 上の電荷 $-Q$ は，E_+ から E_+ と逆向きに大きさ $F_- = |-QE_+|$ の力を受ける。このとき，極板間引力の大きさ F は，

$$F = F_+ = F_- = \frac{1}{2} QE \tag{2.6}$$

と書けることがわかる。

極板間の電場の強さは，$E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ で与えられることから，

$$\underline{F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}} \tag{2.7}$$

を得る。ここで得られた**極板間引力の大きさは，極板間隔によらない**ことに注意しよう。

すなわち，極板間の電場が極板に垂直に一様にできていると見なすことができるかぎり，極板間引力は一定である。 ■

静電エネルギー

導体系の静電エネルギー（すなわち，電気的位置エネルギー）は，導体に電荷の蓄えられていない状態（このとき，導体内には，正負の電荷が詰まり，中和している）を基準（すなわち，静電エネルギー0）にとる。

一般に, はじめ２つの導体 A, B に電荷は蓄えられていないとし，これらをコンデンサーと見なしたときの電気容量をCとする。導体 B から A にN回にわけて微小電荷$\Delta q = \dfrac{Q}{N}$を運び，最終的に A, B に$\pm Q$の電荷を蓄える場合を考える（図 2.12)。こうして蓄えられる静電エネルギーUは，電荷を運ぶのになされる仕事Wに等しい。

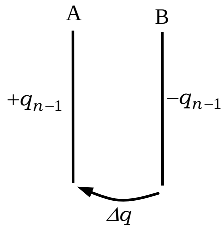

図 2.12

$(n-1)$回目にΔqを運んだ後に A に$q_{n-1} = (n-1)\Delta q$，B に$-q_{n-1}$が溜まっているとすると，このときの A, B 間の電位差$v_n = \dfrac{q_{n-1}}{C}$を用いると，A, B に$\pm Q$の電荷が蓄えられるまでになされる仕事Wは，$N \to \infty$として，

$$W = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} v_n \Delta q = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

となる。

ここで，静電エネルギーは電気的位置エネルギーであることを思い出そう。位置エネルギーは，その状態だけで決まり，状態がどのようにして実現されたかによらない。よって，容量Cのコンデンサーに電圧Vがかかり，電荷$Q = CV$が溜まっているとき，その電荷がどのような経過を辿って溜められたとしても，蓄えられている静電エネルギーUは,

$$U = W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \tag{2.8}$$

と表される。

コンデンサーに電荷が溜まると，極板間に電場ができる。したがって，蓄えられた静電エネルギーは，極板間に電場の形で蓄えられると考えられる。

例題 2.5　静電エネルギーと極板間引力

真空中に面積Sの２枚の正方形極板 A, B を平行に置き，それぞれ$\pm Q$の電荷を与えた。ただし，間隔は極板の１辺の長さに比べて十分小さいとする。このとき，２枚の極板 A, B 間の引力を与える表式(2.7)を，平行板コンデンサーの静電エネルギーを用いて導け。

【解答】

図 2.13 のように，A, B 間の距離を d とすると，電気容量は $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ となり，蓄えられた静電エネルギー U は,

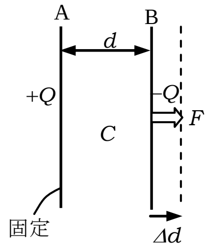

図 2.13

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

となる。

次に, 極板 A を固定し, 極板 B に極板間引力と同じ大きさの力 F を A から離れる向きに加えてゆっくりと極板間隔を微小距離 Δd だけ広げた。この間, 力 F のする仕事 $\Delta W = F \cdot \Delta d$ は，極板間の静電エネルギーの増加 $\Delta U = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d$ に等しい。これより，極板間引力の大きさ F の表式(2.7)を，次のように得る。

$$F \cdot \Delta d = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d \quad \therefore \quad F = \underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}}$$ ■

(2) コンデンサーの接続

いくつかのコンデンサーを接続した系を１つのコンデンサーと見なすことができるとき, そのコンデンサーの電気容量を**合成容量**（equivalent capacitance あるいは resultant capacitance）という。

並列接続

図 2.14 のように，電気容量 C_1 と C_2 の２つのコンデンサーを**並列に**（in parallel）接続し，合計 $\pm Q$（> 0）の電荷を蓄えた。コンデンサーにかかる電圧を V とするとき，

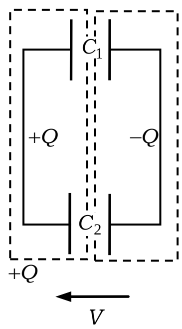

図 2.14

$$Q = (C_1 + C_2)V$$

となるから，２つのコンデンサーを１つのコンデンサーと見なしたときの合成容量 C は,

$$C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \tag{2.9}$$

となる。

直列接続

２つのコンデンサーを直列に接続し，それぞれのコンデンサーに**同じ大きさの電荷を蓄える**とき，これら２つのコンデンサーの系は１つのコンデンサーと見なすことができ，直列接続の合成容量を求めることができる。

図 2.15 のように，電気容量 C_1 と C_2 の２つのコンデンサーを**直列に**（in series）接続し，それぞれに同じ大きさ $\pm Q$

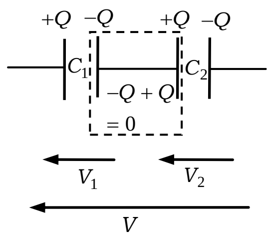

図 2.15

（$Q>0$）の電荷を蓄えると，それぞれにかかる電圧は，$V_1=Q/C_1$，$V_2=Q/C_2$となるから，全体にかかる電圧Vは，

$$V=V_1+V_2=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}$$

となる。いま，２つのコンデンサーを１つのコンデンサーと見なすとき，蓄えられる電荷は$\pm Q$であるから，直列接続の合成容量をCとすると，$V=Q/C$と書ける。これより，Cを与える関係式

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \tag{2.10}$$

の成り立つことがわかる。ここで，２つのコンデンサーには同じ大きさの電荷が蓄えられ，図 2.15 の**破線で囲まれた領域内の電荷の総和がゼロ**になることが重要である。

例題 2.6　導体板の挿入されたコンデンサー

図 2.16 のように，真空中で，間隔dを隔てて平行に置かれた面積Sの同じ正方形の導体板 A, B の間に，厚さDで A, B と同じ面積Sの電荷をもたない導体板 D を，A, B に平行に，それらの間に完全に収まるように挿入する。導体板 A, B を１つの平行板コンデンサーと見なすときの電気容量Cを求めよ。ただし，導体板の間隔は，導体板の一辺の長さに比べて十分小さく，真空の誘電率をε_0とする。

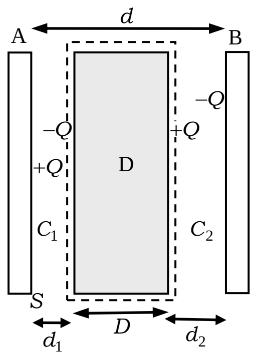

図 2.16

【解答】

導体板 A と D の間隔をd_1，Dと B の間隔をd_2とすると，A, D 間と D, B 間をそれぞれ１つのコンデンサーと見なすときの電気容量C_1，C_2は，それぞれ，

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1},\qquad C_2=\frac{\varepsilon_0 S}{d_2}$$

と書ける。はじめ，導体板 D に電荷が溜まっていなかったのであるから，A, D 間に$\pm Q$（$Q>0$）の電荷がたまると，D, B 間にも同じ$\pm Q$の電荷がたまる。したがって，図 2.15 の破線で囲まれた領域内の電荷の総和はゼロであり，導体板 A, B 間は，容量C_1とC_2の２つのコンデンサーが直列につながれた状態と見なすことができる。よって，求める電気容量Cは，

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{d_1+d_2}{\varepsilon_0 S}=\frac{d-D}{\varepsilon_0 S}\qquad \therefore\quad C=\underline{\frac{\varepsilon_0 S}{d-D}}$$

（**注意**）求めた電気容量は，導体板の厚さDには依存するが，その位置，すなわち，間隔d_1, d_2の個々の値によらない。導体板 D を挿入した平行板コンデンサーは，極板 A, B 間の間隔dが，**挿入された導体板の厚さDだけ狭くなった**平行板コンデンサーの容量に等しい。■

コンデンサーの問題を解くときの便法

図 2.17 のように，導体板 A と B を平行に並べ，電気容量Cの平行板コンデンサーをつくり，A の電位をV_{A}，B の電位をV_{B}となるようにしたら, A の B 側の面に電荷Q_{A}, B の A 側の面に電荷Q_{B}が現れたとする。このとき，導体板 A と B のどちらの電位が高いかによらず,

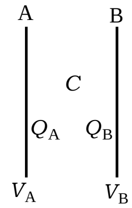

図 2.17

$$\begin{cases} Q_{\mathrm{A}} = C(V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}) \\ Q_{\mathrm{B}} = C(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}) \end{cases} \quad \therefore \quad Q_{\mathrm{B}} = -Q_{\mathrm{A}}$$

が成り立つ。これは，$V_{\mathrm{A}} > V_{\mathrm{B}}$のとき，A の B 側の面には容量$C$と A, B 間の電位差$V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}$の積で与えられる電荷が現れ，B の A 側の面にはそれと逆符号の電荷が現れることを示しているだけである。この関係式は，次の例題を考えるときなど便利である。

例題 2.7　電荷をもつ導体板の挿入

例題 2.6 で考えた導体板 A, B, D を用いて，図 2.18 のように，導体板 A, B に電圧Vをかけ，D に電荷qを与えて A, B 間に挿入する。ここで, A, D 間の電気容量をC_1, D, B 間の電気容量をC_2とする。

(a)　導体板 B の電位をゼロとして, 導体板 D の電位V_{D}, および, 導体板 A の D 側の面に現れる電荷Q_{A}を求めよ。ただし，導体板の間隔は，導体板の一辺の長さに比べて十分小さいとする。

(b)　$q = 0$の場合のQ_{A}，および，$Q_{\mathrm{A}} = 0$となる場合のV_{D}を求めよ。

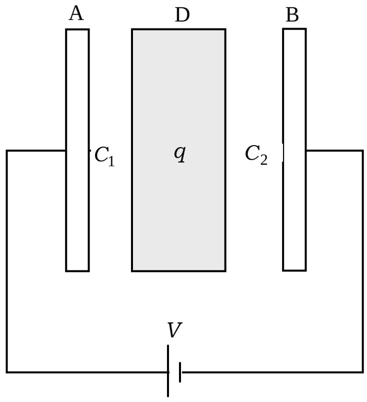

図 2.18

【解答】

(a)　導体板 B の電位がゼロのとき，導体板 A の電位はVである。D の A 側と B 側に現れる電荷の和がqに等しいことから,

$$C_1(V_{\mathrm{D}} - V) + C_2(V_{\mathrm{D}} - 0) = q \quad \therefore \quad V_{\mathrm{D}} = \underline{\frac{C_1 V + q}{C_1 + C_2}}$$

これより，導体板 A の D 側の面に現れる電荷Q_{A}は,

$$Q_{\mathrm{A}} = C_1(V - V_{\mathrm{D}}) = \underline{\frac{C_1}{C_1 + C_2}(C_2 V - q)} \tag{2.11}$$

(b)　(2.11)式において，$q = 0$とすると，$Q_{\mathrm{A}} = \underline{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}V = CV = Q$となる。ここで,

$C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ は，導体板 A, B 間の合成の電気容量であるから， $q = 0$ のとき，A, D 間と D, B 間に同じ電荷 Q が蓄えられるという結果を再現する。また， $Q_\mathrm{A} = 0$ とすると，電荷 $q = C_2 V$ が D の B 側の面に現れ，$V_\mathrm{D} = \dfrac{q}{C_2} = \underline{V}$ となり，導体板 A と D は等電位になる。 ■

(3)　CR 回路の充電と過渡現象

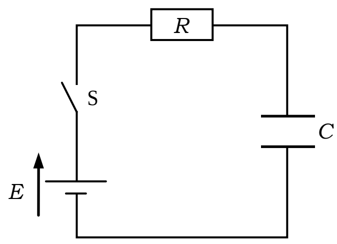

図 2.19

内部抵抗の無視できる起電力 E の電池，電気容量 C のコンデンサー，抵抗値 R の電気抵抗およびスイッチ S を用いて，図 2.19 の回路をつくる。はじめスイッチは開かれており，コンデンサーに電荷は溜まっておらず，時刻 $t = 0$ にスイッチを閉じる。スイッチと導線の電気抵抗は無視できる。

$t = 0$ で，コンデンサーに溜まっている電荷は $Q = 0$ であり，極板間の電圧も $V = 0$ であるから，抵抗に電池の起電力 E がかかる。よって， $t = 0$ に抵抗に流れる電流 I_0 は，

$$I_0 = \frac{E}{R} \tag{2.12}$$

となる。その後，コンデンサーに電荷が溜まり，極板間に電圧がかかるから，抵抗に流れる電流は次第に減少し，十分に時間がたつと電流は流れなくなり，コンデンサーに電荷

$$Q_0 = CE$$

が蓄えられる。コンデンサーに蓄えられる電荷 Q と抵抗に流れる電流 I の時間変化の様子は，図 2.20a,b のようになる。

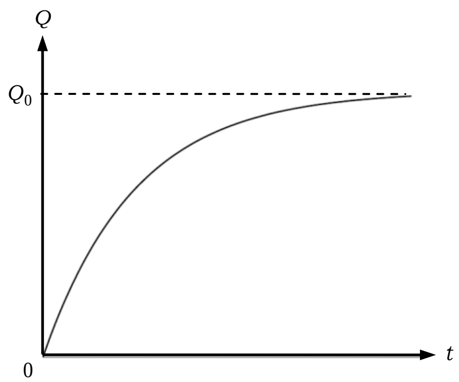

図 2.20a

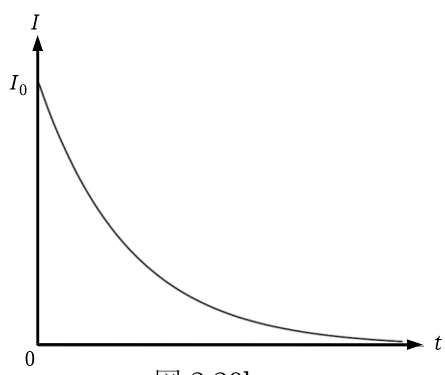

図 2.20b

キルヒホッフの法則

電気回路に関するキルヒホッフの法則（Kirchhoff’s Rules）は，次の 2 つからなる。

第１法則（結節点の規則（junction rule））

回路網の任意の結節点に流れ込む電流Iの代数和（符号を付けた電流の和）はゼロである。

$$\sum I = 0$$

第２法則（回路の規則（loop rule））

回路網の任意の閉回路に沿って一周するとき，起電力や抵抗によって生じる電位差Vの代数和はゼロである。これは，回路網上の各点の電位が一意的に決まることを表している。

$$\sum V = 0$$

回路方程式

コンデンサーに蓄えられる電荷をQ，抵抗に流れる電流をIとして図 2.19 でスイッチ S を閉じた回路にキルヒホッフの第２法則を適用する。図 2.19 において，矢印で示されている電位差は，矢印の手前を基準とした矢頭の位置の電位を表している。

電流の向きに回路を一周するとき，電池の起電力Eだけ電位は増加し，抵抗に電流Iがながれることにより，RIだけ電位は減少し，コンデンサーに溜まっている電荷QによりQ/Cだけ電位が減少する。これより，キルヒホッフの第２法則を表す式は，

$$E - RI - \frac{Q}{C} = 0 \tag{2.13}$$

となる。(2.13)式のように，キルヒホッフの第２法則を表す回路の式を，**回路方程式**（circuit equation）という。この場合，キルヒホッフの第１法則を用いてつくった第２法則の式は，回路の基本的な方程式であり，力学における運動方程式に対応する。

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

回路方程式を解く

コンデンサーの抵抗に近い極板に単位時間あたり流れ込む電荷がIであるから，

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

と書ける。これを(2.13)式に代入して，Qに対する微分方程式

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{CR}(Q - CE) \tag{2.14}$$

を得る。(2.14)式は，両辺を$(Q - CE)$でわって時間tで積分することにより解くことができる。

$$\int \frac{1}{Q - CE} \cdot \frac{dQ}{dt} dt = -\frac{1}{CR}\int dt \quad \therefore \quad \log|Q - CE| = -\frac{t}{CR} + D \quad (D：積分定数)$$

ここで，はじめ（$t=0$）に$Q=0$であったから，QはCEを超えることができず，$Q-CE<0$である。また，初期条件「$t=0$のとき，$Q=0$」を代入して，$D=\log CE$となる。こうして，

$$\log\frac{CE-Q}{CE}=-\frac{t}{CR}$$

$$\therefore \quad Q=CE\left(1-e^{-t/CR}\right)=Q_0\left(1-e^{-t/CR}\right) \tag{2.15}$$

を得る。

電流Iは,

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{E}{R}e^{-t/CR}=I_0e^{-t/CR} \tag{2.16}$$

となる。(2.15), (2.16)式のグラフは，それぞれ図 2.20a,b のように描かれる。

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

エネルギー保存則

図 2.19 の回路において，スイッチ S を閉じて十分に時間がたつ間に，電池の負極側から正極側に電荷Q_0が移動するから，電池はQ_0の電気的位置エネルギーの増加分だけ仕事をする。したがって，この間の電池の仕事Wは,

$$W=Q_0E$$

となる（図 2.21）。一方，コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーUは(2.8)式より，

$$U=\frac{1}{2}Q_0E$$

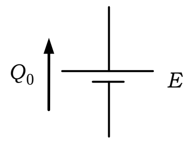

図 2.21

である。したがって，エネルギー保存則を考えれば，

$$J=W-U=\frac{1}{2}Q_0E$$

だけ，抵抗で失われるはずである。

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

例題 2.8　回路方程式からの導出

(a)　回路方程式(2.13)から回路のエネルギー保存則を導け。

(b)　電流の表式(2.16)を用いて，$J=\dfrac{1}{2}Q_0E$を導け。

【解答】

(a)　(2.13)式を,

$$RI = E - \frac{Q}{C}$$

と書き，両辺に$I = \dfrac{dQ}{dt}$をかけて時間に関して$t = 0$から$t = \infty$まで積分する。tからQへの置換積分を行い，「$t = 0$のとき$Q = 0$」と「$t = \infty$のとき$Q = Q_0$」を用いると，

$$\text{右辺} = \int_0^\infty E\frac{dQ}{dt}dt - \frac{1}{C}\int_0^\infty Q\frac{dQ}{dt}dt = E\int_0^{Q_0} dQ - \frac{1}{C}\int_0^{Q_0} Q\,dQ$$

$$= Q_0 E - \frac{Q_0^2}{2C} = W - U = \frac{1}{2}Q_0 E$$

となる。一方，左辺は，$J = \int_0^\infty RI^2 dt$となる。これより，抵抗で単位時間あたり失われるエネルギー（これをジュール熱という）がRI^2と表され，その総和Jを用いて回路のエネルギー保存則

$$J = W - U$$

が導かれることがわかる。

(b)　(2.16)式を用いて，

$$J = \int_0^\infty RI^2 dt = RI_0^2\int_0^\infty e^{-\frac{2}{CR}t}dt = -\frac{1}{2}C(RI_0)^2\left[e^{-2t/CR}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}C(RI_0)^2$$

ここで，(2.12)式および$Q_0 = CE$を用いて，

$$J = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}Q_0 E$$

を得る。■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

例題 2.9　ジュール熱が無視できる場合

内部抵抗の無視できる起電力Vの電池，極板間隔dで電気容量$2C$の平行板コンデンサーおよび電気抵抗Rの抵抗体を用いて，図 2.22 のような回路をつくった。これを状態 1 とする。状態 1 でコンデンサーには電荷$q_1 = 2CV$の電荷が溜まり，抵抗体に電流は流れていない。次に，電池をつないだまま抵抗体に流れる電流が微小な一定値になるように，コンデンサーの極板に外力を加えてゆっくりと極板間隔を$2d$まで広げ，コンデンサーの容量をCにした。この状態を状態2とする。

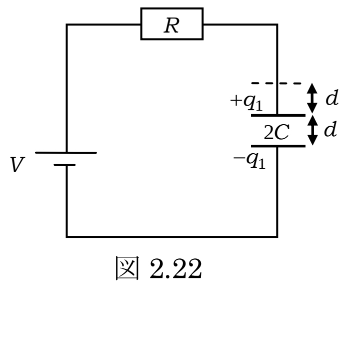

図 2.22

(a)　状態１から２へ変化させる時間を十分長くすると，抵抗体で発生するジュール熱は無視できることを示せ。

(b)　極板を動かすのに加えた外力の仕事を求めよ。

【解答】

(a)　状態２でコンデンサーには電荷 $q_2 = CV$ が溜まっている。この間，抵抗体を電池からコンデンサーの向きに移動した電荷は，$\Delta q = q_2 - q_1 = -CV$ であり，時間 T の間，一定の電流 I が流れたとすると，

$$I = \frac{\Delta q}{T} = -\frac{CV}{T}$$

抵抗体で発生するジュール熱の総和 Q は，$T \to \infty$ のとき，

$$Q = RI^2 \cdot T = R\frac{(CV)^2}{T^2} \cdot T = \frac{R(CV)^2}{T} \to 0$$

となり，Q は無視できることが示される。

(b)　状態が１から２まで変化するとき，コンデンサーの静電エネルギーの変化 ΔU は，

$$\Delta U = \frac{1}{2}CV^2 - \frac{1}{2} \cdot 2C \cdot V^2 = -\frac{1}{2}CV^2$$

電池のする仕事 W_{E} は，

$$W_{\mathrm{E}} = \Delta q \cdot V = -CV^2$$

抵抗で発生するジュール熱を無視して，エネルギー保存則より，外力の仕事 W は，

$$W = \Delta U - W_{\mathrm{E}} = \underline{\frac{1}{2}CV^2}$$

となる。この場合，極板に加える外力は，極板間引力に逆らって極板間隔を広げるためにする仕事であるから，正であることに注意しよう。　■

第３章　誘電体と直流回路

3.1　誘電体

電場をかけたとき，以下に示すような誘電分極を起こす物質を**誘電体**（dielectric substance）という。ただし一般的に，誘電体は電流を流さない**絶縁体**（insulator）として扱われることが多い。そこで，以下では，特に断らない限り，誘電体は絶縁体であるとする。

(1)　誘電分極

電場の中に誘電体をおくと，電場の向きと逆側の表面に負電荷が，電場の向きの側の表面に正電荷がにじみ出る。この現象は，**誘電分極**（dielectric polarization）とよばれる。図 3.1 のように，誘電体内の中性の原子に電場をかけると，原子核のまわりの電子が電場と逆向きの側に引かれ，負電荷の電子の中心と正電荷の原子核の位置がずれる。この現象を**分極**（polarization）という。このとき，原子が密に詰まっている誘電体内部では，図 3.2 のように，隣の原子から分極によって現れる正負の電荷が互いに打ち消し合ってマクロな電荷は現れない。しかし，誘電体の電場の向きの側面には正の，電場と逆側の側面には負の**分極電荷**（polarization charge）が現れる。

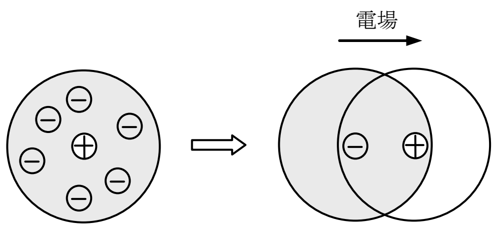

図 3.1

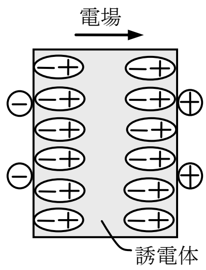

図 3.2

(2)　誘電体内の電場

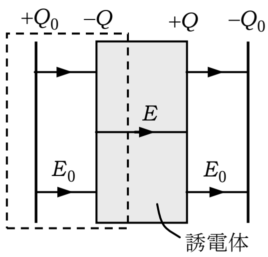

図 3.3

図 3.3 のように，長方形の２枚の極板からなる平行板コンデンサーの間に，極板と同じ形の側面をもつ直方体の誘電体を挿入し，左右の極板にそれぞれ$+Q_0$，$-Q_0$（$Q_0>0$）の電荷（この電荷は，極板上や導体内を自由に移動することができ，**真電荷**（true charge）とよばれる）を与えた。そのとき，誘電体の左右の側面に，誘電分極によりそれぞれ分極電荷$-Q$，$+Q$（$Q>0$）が現れたとする。極板間隔は十分に狭く，電場は極板および誘電体の側面に垂直に生じるとする。真空の誘電率をε_0，極板の面積をSとすると，2.3 節で求めたように，極板と誘電体の間の真空中の電場の大きさE_0は，

$$E_0 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} \tag{3.1}$$

である。いま図 3.3 に示された破線で示される直方体の閉曲面にガウスの法則を適用しよう。誘電体内の一様な強さEの電場は，誘電体内の側面に垂直になり，破線で示された直方体内の電荷は，真電荷Q_0と分極電荷$-Q$の和であるから，ガウスの法則は，

$$E \cdot S = \frac{Q_0 - Q}{\varepsilon_0} \tag{3.2}$$

と書ける。(3.2)式は，誘電体の性質を分極電荷$-Q$で表してガウスの法則を表した式である。ここで, (3.2)式の右辺をQ_0/εと置くことにより誘電体の**誘電率**（permitivity）ε，

および，**比誘電率**（relative permitivity）$\varepsilon_\mathrm{r} = \varepsilon / \varepsilon_0$を定義する。こうして(3.2)式に(3.1)を代入して，

$$E = \frac{Q_0}{\varepsilon S} = \frac{Q_0}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 S} \quad \therefore \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon_\mathrm{r}} \tag{3.3}$$

を得る。

誘電率εおよび比誘電率ε_rは，分極電荷の代わりに誘電体の性質を表す物理量である。

(3) 誘電体の挿入されたコンデンサーの電気容量

極板面積S，極板間隔dの平行板コンデンサーに$\pm Q$の電荷を蓄える。ただし，極板間隔は狭く，極板間に，極板に垂直に一様な電場ができるとする。極板間が真空のとき，このコンデンサーの電気容量C_0は，真空の誘電率をε_0として，

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

である。いま，電荷$\pm Q$を蓄えた上の平行板コンデンサーの極板間を，比誘電率ε_r（誘電率$\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0$）の誘電体で満たす（図 3.4）。このとき，極板間電圧Vは，極板間の一様な電場すなわち誘電体内の一様な強さEの電場を用いて，

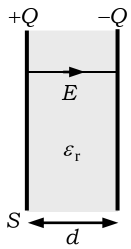

図 3.4

$$V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

となる。よって，このコンデンサーの電気容量Cは，

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 S}{d} \quad \therefore \quad C = \varepsilon_\mathrm{r} C_0 \tag{3.4}$$

となる。

例題 3.1　コンデンサーに挿入される誘電体

一辺の長さlの正方形の金属板２枚を間隔dだけ離して水平で平行に並べた平行板コンデンサーの２枚の極板（金属板）に，内部抵抗の無視できる起電力Vの電池を接続する。このコンデンサーの極板間に，極板と同じ形で厚さd，比誘電率ε_{r}の誘電体を，図 3.5 のように，誘電体をコンデンサーの極板の左端から距離xまで挿入する。極板間隔は十分狭く，極板間に生じる電場は，つねに極板に垂直にできると考えてよい。真空の誘電率をε_0とする。

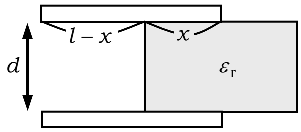

図 3.5

(a)　上のように誘電体の挿入されたコンデンサーの電気容量を求めよ。

(b)　コンデンサーを電池に接続したまま誘電体の挿入距離をxから$x+\Delta x$まで微小距離Δxだけ増やすときのエネルギー保存則を用いて，極板間に挿入されたコンデンサーにはたらく，極板に平行な電気力の大きさと向きを求めよ。

【解答】

(a)　題意より，極板間の電場が極板に垂直にできるとして，図 3.6 のように，このコンデンサーを，誘電体の挿入されていない部分と挿入された部分の２つに分割する。そうすると，元のコンデンサーを，誘電体の挿入されていない容量C_1のコンデンサーと，極板間が誘電体で満たされた容量C_2のコンデンサーが導線で並列に結ばれたコンデンサーと見なすことができる。容量C_1とC_2はそれぞれ，

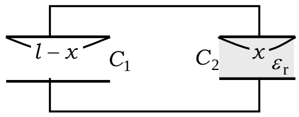

図 3.6

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 l(l-x)}{d},\quad C_2 = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 l x}{d}$$

と書けるから，求めるコンデンサーの電気容量$C(x)$は，

$$C(x) = C_1 + C_2 = \underline{\frac{\varepsilon_0 l^2}{d}\left\{1 + (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\frac{x}{l}\right\}}$$

(b)　誘電体の挿入距離がΔxだけ増加すると，容量は

$$\Delta C = C(x+\Delta x) - C(x) = \frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\varepsilon_0 l}{d}\Delta x$$

だけ増加する。このとき，コンデンサーに溜まる電荷は，

$$\Delta Q = \Delta C \cdot V = \frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\varepsilon_0 l V}{d}\Delta x$$

増加し，この電荷ΔQが電池の負極から正極に移動するとき，電池は$\Delta W = \Delta Q \cdot V$の仕事をする。その仕事の一部は，コンデンサーの静電エネルギーの増加と誘電体を引き込む静電気力の仕事に使われる。いま，電圧Vのかけられたコンデンサーの静電エネルギーは

$$\varDelta U=\frac{1}{2}C(x+\varDelta x)V^2-\frac{1}{2}C(x)V^2=\frac{1}{2}\varDelta C\cdot V^2=\frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\varepsilon_0 lV^2}{2d}\varDelta x$$

増加する。一方，誘電体を引き込む向きを正として，誘電体に作用する静電気力を f とすると，静電気力の仕事は $f\cdot\varDelta x$ と書けるから，系のエネルギー保存則は，

$$\varDelta W=\varDelta U+f\cdot\varDelta x \quad \therefore \quad \frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\varepsilon_0 lV^2}{d}\varDelta x=\frac{(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 lV^2}{2d}\varDelta x+f\cdot\varDelta x$$

これより，静電気力 f は，

$$f=\underline{\frac{(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 lV^2}{2d}}$$

となる。$f>0$ であるから，誘電体に作用する静電気力は引き込む向きであり，その大きさは上式で与えられる。 ■

3.2　電流とオームの法則

(1)　電流

導体内の単位体積あたり，電荷 q をもつ荷電粒子が n 個あり，これらの荷電粒子が同じ速さ v で同じ向きに動いているとする。図 3.7 のように，円柱状導体の断面積を S とすると，断面積 S，長さ v の円柱内の電荷が，

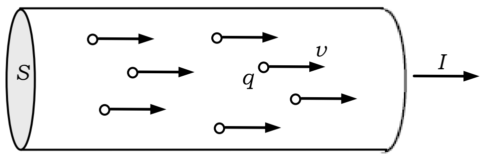

図 3.7

単位時間に 1 つの断面を通過するから，この導体に流れる電流 I は，

$$I=|q|nSv \tag{3.5}$$

と表される。

電流は導体内の電場の向きに流れる。電荷には，$q>0$ のとき電場と同じ向きに力がはたらき，$q<0$ のとき電場と逆向きに力がはたらくから，

$q>0$ のとき，電荷は電流と同じ向きに移動し，
$q<0$ のとき，電荷は電流と逆向きに移動する。

(2)　オームの法則

導体 A に電圧 V をかけたとき，電流 I が流れたとする。このとき，

$$R=\frac{V}{I} \tag{3.6}$$

を，A の**電気抵抗**（electric resistance）といい，オーム〔Ω〕の単位で表す。この抵抗値 R は電圧 V や電流 I によって変化することもあれば，変化しないこともある。R が V や I で変化しないとき，**導体 A はオームの法則を満たす**といい，そのときの R を**オーム抵抗**（ohmic resistance）あるいは**線形抵抗**（linear resistance）という。他方，R が V や I によって変化するとき，**導体 A はオームの法則を満たさない**といい，そのときの R を

非オーム抵抗（non-ohmic resistance）あるいは**非線形抵抗**（nonlinear resistance）という。

一様な導体の電気抵抗Rは，その長さに比例し，断面積Sに反比例する。そこで，比例定数をρとおくと，Rは，

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{3.7}$$

と表される。このとき，ρは導体の物質の種類や温度によって決まる量であり，**電気抵抗率**（electric resistivity）という

実験によれば，多くの導体の抵抗率は，温度とともに温度の1次関数的に変化する。したがって，0℃での導体の抵抗率をρ_0とすると，t〔℃〕での抵抗率ρは，

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t) \tag{3.8}$$

と表される。このときのαを抵抗率の温度係数という。

(3)　電力

電流による単位時間あたりの仕事を**電力**（electric power）といい，〔W〕の単位で表される。図3.8のように，電位がVだけ高いところから低いところに電流Iが流れると，単位時間あたりVIの電気的位置エネルギーを失う。すなわち，これだけの電力が消費される。

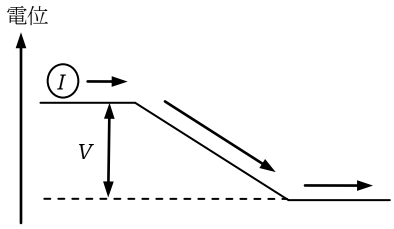

図3.8

抵抗に電流が流れるとき，抵抗の両端の電位差をVとして，電流は単位時間に，

$$P = VI = RI^2 \tag{3.9}$$

の電力を消費する。このとき，消費されたエネルギーは，熱となって周囲に拡散する。

(4)　電流に関するミクロな考察

オームの法則

導体に電圧をかけると導体内に電場が生じる。導体内の自由電子（荷電粒子は正電荷をもっていても負電荷をもっていてもよいが，ここでは，通常の金属を念頭において負電荷$-e$をもつ自由電子とする）は，外部からかけた電圧による静電気力だけを受けると，電場と逆向きに等加速度運動をする。しかし，自由電子は導体内のイオンとの衝突などのため，実際には等加速度運動をすることはできない。そこで，自由電子は速さに比例する抵抗力を受けて運動するという簡単なモデルで電気伝導という現象を考えてみよう。

図3.9のように，断面積S，長さlの導体棒に電圧Vをかける。単位体積あたりn個の自由電子が速度vで運動しているとき，イオンなどから電子の受ける抵抗力を$-kv$（k：比例

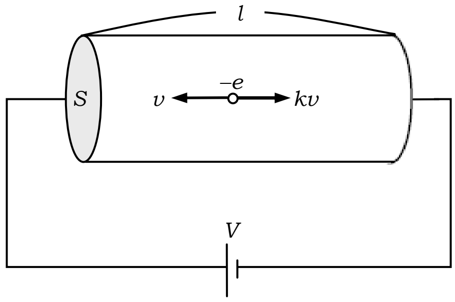

図3.9

定数）とする。このとき，運動方程式は，電子の質量をm，加速度を$a=\dfrac{dv}{dt}$として，

$$m\frac{dv}{dt}=e\frac{V}{l}-kv \tag{3.10}$$

となる。vが小さいとき加速度aは大きく，速度vの増加率は大きいが，vが増加するとaは小さくなり，vの増加率は小さくなり，十分時間がたつと，aは 0 となり，vは終端速度

$$v_0=\frac{eV}{kl}=\frac{eV}{ml}\tau \tag{3.11}$$

になる。ここで，$m/k=\tau$とおいた。

運動方程式(3.10)は，変数分離型微分方程式とよばれ（力学の第 4 章 4.1 節(2)参照），電子の速度vを時間tの関数として，

$$v=v_0\left(1-e^{-t/\tau}\right) \tag{3.12}$$

と求めることができる。(3.12)式のグラフは図 3.10 に示される。また，(3.12)式より，τは速度が終端速度v_0の$(1-1/e)$倍になるまでの時間を表し，**緩和時間**（relaxation time）とよばれる。

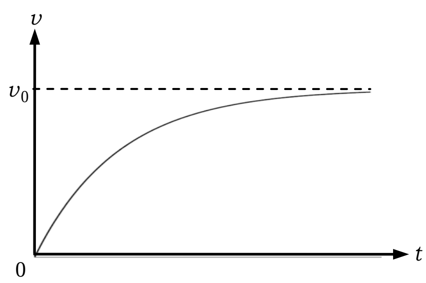

図 3.10

導体内のすべての自由電子が終端速度v_0で電流と逆向きに動いていると仮定し，(3.11)式を(3.5)式のvに代入すると（$|q|=e$），この導体棒に流れる電流Iは，

$$I=enSv_0=\frac{e^2nS\tau}{ml}V$$

となり，導体の電気抵抗Rは，

$$R=\frac{V}{I}=\frac{m}{e^2n\tau}\cdot\frac{l}{S}$$

と求められる。また，これを(3.7)式と比較して，この導体の抵抗率ρは，

$$\rho=\frac{m}{e^2n\tau} \tag{3.13}$$

と表される。これより，物質の抵抗率は，自由電子の数密度nと緩和時間τに反比例し，これらが一定である限り，抵抗値は一定であり，オームの法則の成り立つことがわかる。

自由電子の速さ

導体内の自由電子は，熱運動により動き回っている。気体と導体内の自由電子が熱平衡にあれば，その運動エネルギーは，気体分子のもつ運動エネルギーに等しいと考えら

れる。絶対温度Tのとき，電子の熱運動による2乗平均速度を$\sqrt{\overline{u^2}}$，ボルツマン定数をkとすると，

$$\frac{1}{2}m\overline{u^2}=\frac{3}{2}kT$$

と書ける。ここで，$m=9.1\times10^{-31}$ kg，$k=1.38\times10^{-23}$ J/K，$T=300$ K とすると，

$$\sqrt{\overline{u^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}\fallingdotseq 1.2\times10^{5}\ \text{m/s}$$

となり，熱運動の自由電子の速さは非常に速いことがわかる。この計算は古典論によるものであるが，量子論を考慮すると，さらに速くなることが知られている。

次に，電流が流れているとき，電流と逆向きに進む電子の平均の速さ$\bar{v}$を求めてみよう。直径0.1mm程度（断面積$S=1\times10^{-8}\ \text{m}^2$）の銅線に1Aの電流が流れている場合を考えよう。銅原子1個が1個の自由電子を出すとすると，銅原子1モルの質量を$M=64\times10^{-3}$ kg，銅線の質量密度を$\rho=8.9\times10^{3}$ kg/m^3，アボガドロ数を$N_\text{A}=6.0\times10^{23}$として，単位体積中の自由電子の数$n$は，$N_\text{A}$を銅原子1モルの体積$M/\rho$でわって，

$$n=\frac{N_\text{A}}{M}\rho=8.3\times10^{28}\ 1/\text{m}^3$$

となる。また，$e=1.6\times10^{-19}$ C として，

$$\bar{v}=\frac{I}{enS}\fallingdotseq 7.5\times10^{-3}\ \text{m/s}$$

を得る。これより，

$$\bar{v}<<\sqrt{\overline{u^2}}$$

となり，電流と逆向きに進む電子の速さ$\bar{v}$は非常に遅いことがわかる。

電気抵抗の温度依存性

3.2(2)で述べたように，多くの導体の電気抵抗は，温度が上昇すると増加する。これは，温度が上昇すると導体内のイオンの振動が激しくなり，自由電子が電場と逆向きに移動しにくくなるためと説明される。

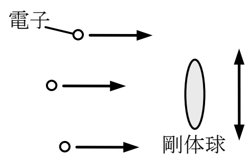

図 3.11

図3.11のように，イオンを剛体球と見なし，小球で表した電

子が次々に飛んでくるというモデルを考えてみよう。剛体球が静止している場合と振動している場合で，小球が剛体球に衝突する確率は異なるであろうか。小球の衝突確率が増大すれば電子は散乱されやすくなり，抵抗は増大するであろう。しかし，剛体球の振動が激しくなっても小球の散乱確率に大きな違いはないであろう。そうなると，温度上昇による電気抵抗の増大を説明することができない。

この説明は，古典論によるものであり，古典論では抵抗の温度依存性を説明できない。

量子論による説明

量子論で考えると，電子は粒子であると同時に波動性をもつ。電場と逆向きに進む電子を波動と考える量子論では，イオンが規則正しく並んでいると，電子の波動はほとんど散乱されない。イオンの規則性が破れると，波動は散乱され抵抗が増大する。そのため量子論では，導体の温度が上昇してイオン振動が激しくなると，イオンの配列が不規則になり抵抗は増大することが示される。

実際，導体に不純物を混ぜると，イオンの不規則性が増大するため，導体の電気抵抗は増大する。さらに不純物を増加させて不規則性を増すと，ついには電流が流れなくなり，導体は絶縁体に転移することがわかっている。

3.3　直流回路

(1)　電池の起電力と端子電圧

クーロン力以外の原因で電荷を動かそうとする作用を**起電力**（electromotive force）という。電池の起電力は，電流が流れていないときの電池の両端の電位差で与えられる。起電力 E の電池の負極側から正極側に電流 I が流れているとき，電池の端子電圧 V は，

$$V = E - rI \tag{3.14}$$

となる（図 3.12）。

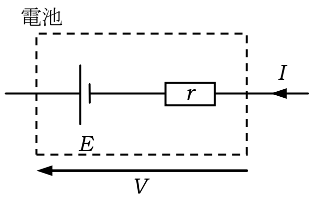

図 3.12

(2)　抵抗の接続

直列接続

図 3.13 のように，抵抗値 R_1 と R_2 の抵抗を直列に接続し，両端に電圧 V をかける。このとき，２つの抵抗に電流 I が流れたとすると，

$$V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

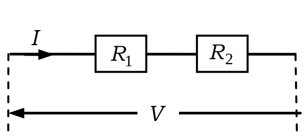

図 3.13

が成り立つ。ここで，**合成抵抗**（equivalent resistance あるいは resultant resistance）R は，$R = V / I$ で定義されるから，

$$R = R_1 + R_2 \tag{3.15}$$

となる。

並列接続

一方，図 3.14 のように，抵抗値R_1とR_2の抵抗を並列に接続し，両端に電圧Vをかけたら，R_1に電流I_1，R_2に電流I_2が流れたとすると，

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

が成り立つ。これより，合成抵抗Rは，$V = RI$として，全電流が$I = I_1 + I_2$となることから，

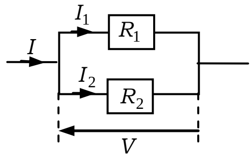

図 3.14

$$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \quad \therefore \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{3.16}$$

となる。

例題 3.2　ホイートストン・ブリッジ回路

４つの抵抗値R_1, R_2, R_3, R_4の抵抗を，電池 E，検流計 G とともに図 3.15 のように接続したとき，G に電流が流れない条件を求めよ。この回路を，**ホイートストン・ブリッジ回路**（Wheatstone bridge circuit）という。

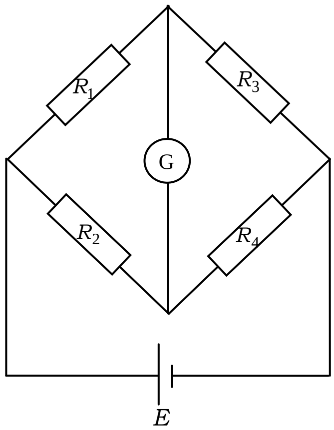

図 3.15

【解答】

検流計 G に電流が流れないとき，G の両端の電位差は 0 である。したがって，抵抗R_1, R_2に流れる電流をそれぞれI_1, I_2とすると，

$$R_1 I_1 = R_2 I_2, \quad R_3 I_1 = R_4 I_2$$

これより，

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \quad \therefore \quad \underline{R_1 R_4 = R_2 R_3}$$ ■

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

例題 3.3　立体回路

図 3.16 のように，同じ抵抗値r，同じ長さの 12 本の抵抗棒を用いて立方体をつくるとき，互いに反対側の頂点 A，G 間の合成の電気抵抗Rを求めよ。

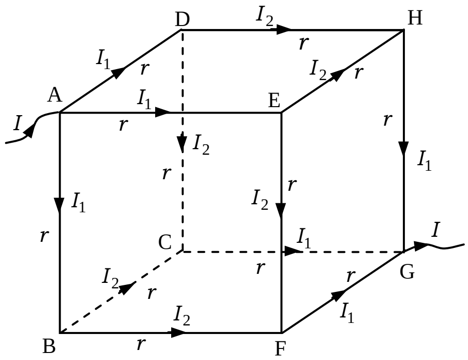

図 3.16

【解答】

頂点 A と G に導線をつなぎ A, G 間に電圧Vをかけたら，A から電流Iが流れ込み，G からIが流れ出したとする。A, E 間の導線に流れる電流は，回路の対称性より$I_1 = \dfrac{I}{3}$であり，E, F 間の導線に

流れる電流は，$I_2 = \dfrac{I_1}{2} = \dfrac{I}{6}$ となる。このとき，A, G 間の電圧 V は，

$$V = r(I_1 + I_2 + I_1) = \frac{5}{6}rI \quad \therefore \quad R = \frac{V}{I} = \underline{\frac{5}{6}r} \qquad ■$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

(3)　**非線形抵抗**

温度とともに抵抗が上昇する導体

導体に電流を流すと熱（これを**ジュール熱**という）が発生し，導体の温度が上昇する。導体の温度が上昇すると，導体内のイオンの振動が激しくなり，自由電子などの電荷の移動を妨げるため，緩和時間 τ が小さくなり，導体の電気抵抗率 ρ が増大する（(3.13)式参照）。これが，3.2 節の(2)で述べた抵抗の温度変化の原因である（さらに詳しくは，3.2 節(4)参照）。この傾向は，ニクロム線や電球のフィラメントなど，抵抗の大きな導体で顕著に現れる。

導体にかける電圧 V とともに電流 I がどのように変化するかを示す曲線を，**電流 - 電圧特性曲線**（current-voltage characteristic curve）という。

図 3.17 は，ある電球の電流 - 電圧特性曲線である。この電球に $V = 20$ V の電圧をかけると $I = 0.4$ A の電流が流れるから，このときの電球の電気抵抗 R は，$R = \dfrac{20}{0.4} = 50\ \Omega$ であるが，$V = 80$ V の電圧をかけると $I = 0.8$ A の電流が流れるから，抵抗 R は，$R = \dfrac{80}{0.8} = 100\ \Omega$ となる。ただし，特性曲線で示されている電球に流れる電流値は，ある電圧をかけて十分に時間がたち，フィラメントの温度が一定値になったときの値であり，スイッチを繋いだ直後は，フィラメントの温度は室温に等しい。したがって，そのときのフィラメントの抵抗値は，電圧が十分小さいときの抵抗値，すなわち，特性曲線の原点での接線の傾きの逆数に等しいことに注意しよう。

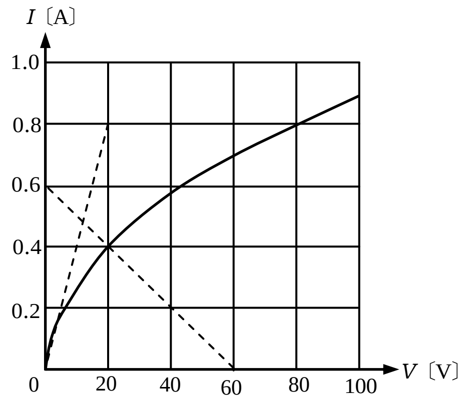

図 3.17

例題 3.4　電球を含む回路

内部抵抗の無視できる起電力 $E = 60$ V の電池，抵抗値 $r = 100\ \Omega$ の抵抗と，図 3.17 の電流 - 電圧特性曲線を有する電球 L およびスイッチ S を用いて，図 3.18 の回路をつくった。特性曲線の原点での接線は，$V = 20$ V，

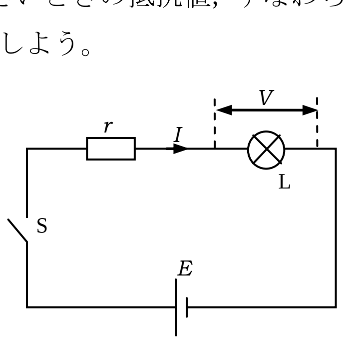

図 3.18

$I = 0.80$ A の点を通る。スイッチ S を入れた直後と，十分に時間がたった後の電球 L での消費電力をそれぞれ求めよ。

【解答】

スイッチ S を入れた直後のフィラメントの抵抗値 R_0 は，特性曲線の原点での接線の傾きの逆数であるから，

$$R_0 = \frac{20}{0.80} = 25\ \Omega$$

である。このとき電球 L に流れる電流 I_0 は，

$$I_0 = \frac{E}{r + R_0} = 0.48\ \mathrm{A}$$

よって，S を入れた直後の電球の消費電力 P_0 は，

$$P_0 = R_0 I_0^2 \fallingdotseq \underline{5.8\ \mathrm{W}}$$

S を接続してから十分に時間がたったとき，電球にかかる電圧を V，流れる電流を I とすると，回路方程式は，

$$60 = 100I + V$$

この式のグラフを図 3.17 に書きこみ，グラフの交点より，

$$V = 20\ \mathrm{V},\quad I = 0.4\ \mathrm{A}$$

これより，十分時間がたったときの電球の消費電力 P は，

$$P = VI = \underline{8.0\ \mathrm{W}}$$

■

半導体

上で述べた電球のフィラメントやニクロム線では，温度が上昇しても自由電子数密度 n はほとんど変化しない。したがって，温度が上昇すると，イオンの不規則性が増して抵抗が増大する。それに対し，温度が上昇すると，自由電子や後に述べる**ホール**（hole）といった**キャリア**（carrier）の数密度 n が急激に増大し，電気抵抗率 ρ が減少する**半導体**（semiconductor）とよばれる物質がある。

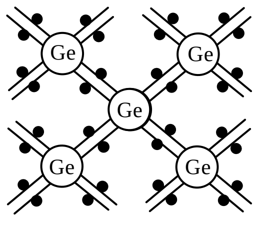

図 3.19

典型的な半導体は，Si（シリコン），Ge（ゲルマニウム）などの 14 族の元素からなり，図 3.19 のような構造をしている。14 族の元素は最外殻の軌道に 4 個の**価電子**（valence electron）をもち，周囲の 4 個の元素と 1 個ずつ電子を出し合ってペアをつくる**共有結合**（covalent bond）で結びついている。ここでは，構造を平面的に描いたが，実際には，正四面体構造をなしている。

共有結合は電子の結びつきが弱く，少し高い電圧をかけたり，温度が上昇したりするとすぐに壊され，自由電子と電子の抜けた穴であるホールが生まれる。ホールは正電荷

をもつ粒子のように振る舞う。このような半導体を**真性半導体**（intrinsic semiconductor）という。しかし，真性半導体は電気抵抗が大きく，あまり電流を流さない。そこで，もう少し電流を流すように，真性半導体の中に，わずかに３個の価電子をもつ 13 族や５個の価電子をもつ 15 族の元素を混ぜる。図 3.20 のように 13 族の元素を混ぜると，共有結合をつくる電子が１個不足してホールができる。このような物質に電場をかけると，ホールがキャリアとなり動いて電荷を運ぶ。このような半導体を，正電荷のホールがキャリアとなる半導体であるから，**P 型半導体**（p-type semiconductor）という。一方，図 3.21 のように 15 族の元素を混ぜると，共有結合をする電子が１個余り，これが自由電子となりキャリアとして電荷を運ぶ。このような半導体を，負電荷をもつ自由電子がキャリアとなる半導体であるから，**N 型半導体**（N-type semiconductor）という。

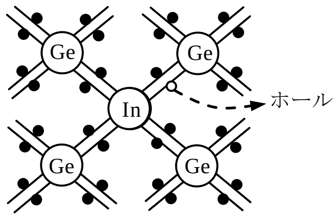

図 3.20

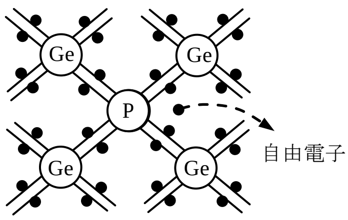

図 3.21

P 型半導体と N 型半導体を接合したもの（これを **pn 接合**（pn junction）という）を**ダイオード**（diode）という。ダイオードは，一方向にしか電流を流さないという**整流**（rectification）作用がある。このとき，電流の流れる方向を**順方向**とよび，図 3.22 のように表される。ダイオードは半導体でできているため，電圧や温度を高くすると，キャリアの濃度が高まり，電気抵抗は減少する。

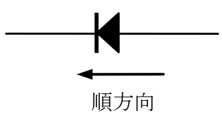

図 3.22

ダイオードは２つの電極をもつ素子であるが，３つの電極をもつ**トランジスタ**（transistor）という**増幅器**（amplifier）をつくることができる。

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

例題 3.5　増幅器

３つの電極 a, b, c をもつトランジスタ，入力端子 1, 2 に，一定の出力電圧 $2V_0$ の電源 E, $2V_0$ より十分大きな一定の起電力 V_1 の電源 F および抵抗値 R_1, R_2 の抵抗を用いて，図 3.23 のような回路をつくる。電源 E, F の内部抵抗は無視できる。電極 a, b にかかる電圧 $V_{\mathrm{ab}} = V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}}$ と a から流れ出す電流 I の間の電流 - 電圧曲線は，図 3.24 で与えられる。ここで，$V_{\mathrm{ab}} > V_0$ のとき，V_{ab} は，

$$V_{\mathrm{ab}} = V_0 + rI$$

と表される。また，電流 I は，端子 b からトランジスタに流れ込む電流 I_1 により，$I = kI_1$

（$k>1$）と書けるとする。

入力端子 1, 2 間に微弱電圧 $V_{\mathrm{in}}\sin\omega t$（端子 2 に対する 1 の電位）を加えたとき，端子 3, 4 間に現れる出力電圧（端子 4 に対する 3 の電位）を，

$$V_2+V_{\mathrm{out}}\sin\omega t$$

と表す。増幅率 $\dfrac{V_{\mathrm{out}}}{V_{\mathrm{in}}}$ を求めよ。

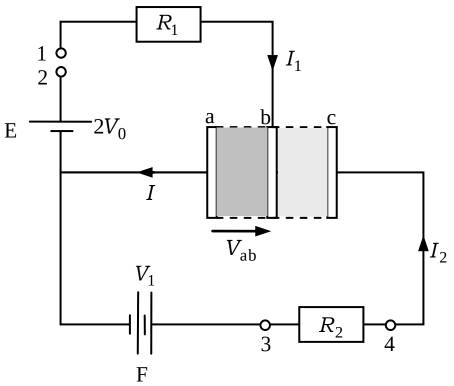

図 3.23

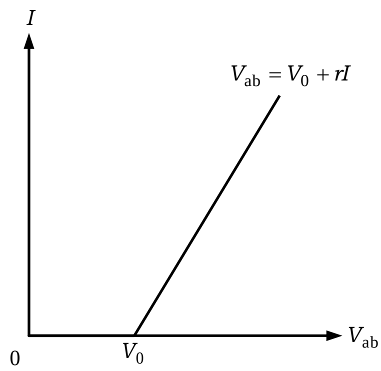

図 3.24

【解答】

抵抗 R_2 に流れる電流を I_2 とすると，

$$I_1+I_2=I$$

閉回路 E → R_1 →b→a→E の回路方程式は，

$$2V_0+V_{\mathrm{in}}\sin\omega t=R_1I_1+V_{\mathrm{ab}}$$

これらに $I=kI_1$， $V_{\mathrm{ab}}=V_0+rI$ を用いて I, I_1, V_{ab} を消去すると，

$$R_2I_2=\frac{(k-1)R_2}{kr+R_1}\left(V_0+V_{\mathrm{in}}\sin\omega t\right)$$

これを $V_2+V_{\mathrm{out}}\sin\omega t$ に等しいとおいて，

$$\frac{V_{\mathrm{out}}}{V_{\mathrm{in}}}=\underline{\frac{(k-1)R_2}{kr+R_1}}$$ ■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

第４章　電流と磁場

4.1　磁場の導入

(1)　磁石の磁場

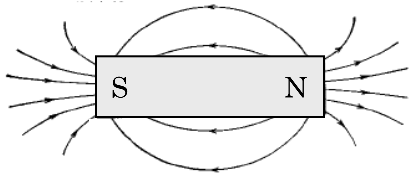

図 4.1

磁石には，N 極と S 極があり，N 極どうし，S 極どうしは退け合い，N 極と S 極の間には引力が作用する。それらの磁極間にはたらく力は，正負の電荷間にはたらく力に似ている。また，図 4.1 のように，磁石の N 極から S 極に向けて，その周囲には磁場ができる。そこで，電荷の場合と同じように，N 極には正の**磁荷**（magnetic charge）が，S 極には負の磁荷があると考えるかもしれない。しかし，磁石を中央で２つに分けると，分けられた両方に N 極と S 極が現れる（図 4.2）。磁石の分け方をどのように変えても，分けられた双方に N 極と S 極が現れてしまう。これは，N 極だけ，あるいは S 極だけが単独で存在することはできないことを示しているのであろう。実際，これまで，N 極だけ，S 極だけの**単磁極**（monopole）は見つかっていない。このことから，電荷に作用する力を用いた電場の定義と同様に，磁荷に作用する力から磁場を定義することは，永久磁石に作用する力を議論するときには便利であるが，物理現象として適切ではないと考えられる。そこで，速度をもつ電荷に作用する力から磁場を定義することにしよう[2]。

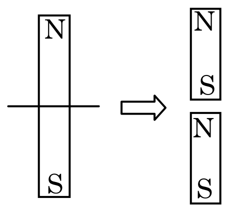

図 4.2

(2)　ローレンツ力と磁場の定義

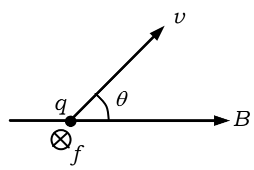

図 4.3

図 4.3 のように，電荷 q が**磁束密度**（magnetic flux density）B の**磁場**（magnetic field）と角 θ （$0 \le \theta \le \pi$）をなす向きに速さ v で運動すると，v の向きからから B の向きに角 θ だけ回る右ねじの進む向きに，大きさ

$$f = qvB\sin\theta \tag{4.1}$$

の力がはたらく。この力を**ローレンツ力**（Lorentz force）とよぶ。ローレンツ力は，ベクトルを用いて表すのが便利である。その際，**ベクトルの外積**（outer product of vector）あるいは**ベクトル積**（vector product）と呼ばれるベクトルどうしの掛け算が用いられる。そこで，まずベクトルの外積を導入しよう。

---

[2] 現在の日本の高校物理では，磁荷を用いて磁場 H を定義し，真空中では，H に真空の透磁率 μ_0 をかけた量を磁束密度 B （$\mu_0 H$）を定義しているが，ここでは，世界の主流の考えに従って，動いている電荷に作用する力を用いて磁場を定義する方法を用いる。

ベクトルの外積

ここでは，ベクトルを太字で表す。すなわち，ベクトル$\vec{a}$を$\boldsymbol{a}$と書く。したがって，速度ベクトルを$\boldsymbol{v}$，力のベクトルを$\boldsymbol{f}$と表す。ベクトル$\boldsymbol{a}$とベクトル$\boldsymbol{b}$のなす角度をθ（$0 \le \theta \le \pi$）とする。図4.4のように，$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の外積のベクトル$\boldsymbol{c}$を，$\boldsymbol{a}$から$\boldsymbol{b}$の向きにπ以下の角θだけ回る右ねじの進む向き（$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$）で，大きさが$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$を隣り合う２辺とする平行四辺形の面積$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$に等しいベクトルと定義し，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$と書く。

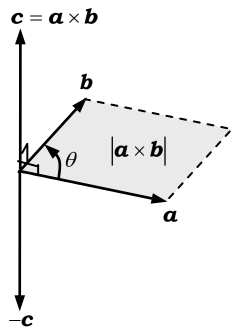

図 4.4

外積については,

$$\text{交換法則：} \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},$$

$$\text{分配法則：} (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

が成り立つ。

磁場の定義とローレンツ力の性質

電荷qの速度ベクトルを$\boldsymbol{v}$，磁束密度のベクトルを$\boldsymbol{B}$とすると，qに磁場から作用するローレンツ力$\boldsymbol{f}$は,

$$\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4.2}$$

と書ける。ここで，$\boldsymbol{f}$は，$\boldsymbol{v}$と$\boldsymbol{B}$に垂直であることに注意しよう。さらに，電場$\boldsymbol{E}$の定義式(1.2)と一緒にして，速度$\boldsymbol{v}$で運動する電荷qに作用する電磁気力$\boldsymbol{f}$は,

$$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{4.3}$$

と表される。

一般に，(4.3)式によって，電場$\boldsymbol{E}$と磁場としての$\boldsymbol{B}$（磁束密度）を定義する。すなわち，電荷に作用する力の元になる空間（これを**場**（field）という）として，電場と磁場を定義する。したがって，(4.3)式は電磁気の基本法則ではなく，電場と磁場の定義式である。

例題 4.1　磁場中での荷電粒子の運動

磁束密度の大きさBの一様な磁場中に, 磁場に垂直に電荷q, 質量mの荷電粒子が速さvで飛び込むと, 荷電粒子は速さvの等速円運動をする。このときの円軌道の半径と円運動の周期を求めよ。

【解答】

図4.5のように，磁場の向きにz軸正方向（紙面表から裏の向き）をとり，荷電粒子がx軸正方向に速さvで飛び込むとする。このとき，荷電粒子には$-y$方向に大きさqvBのローレンツ力が作用する。ローレンツ力は粒

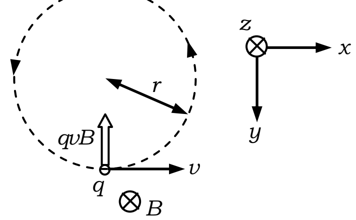

図 4.5

子の速度に垂直であるから，粒子の速さ v に変化はなく，その向きだけが変わる。こうして，荷電粒子は速さ v の等速円運動をする。円軌道の中心は y 軸上にあり，その半径 r は，粒子の円運動の式より，

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \quad \therefore \quad r = \underline{\frac{mv}{qB}}$$

周期 T は，一定の速さ v で円軌道を一周する時間であるから，

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \underline{\frac{2\pi m}{qB}}$$

円軌道の半径 r は入射粒子の速さ v に比例するが，円運動の周期 T は，粒子の速さによらないことに注意しよう。 ■

荷電粒子に磁場から作用する力

図 4.6 のように，磁束密度の大きさ B の磁場と角 θ の向きに，電荷 q の荷電粒子が速さ v で飛び込むと，粒子には，磁場と垂直な向きに大きさ $q(v\sin\theta)B$ の力がはたらく。これより，粒子の磁場に垂直な速度成分 $v_\perp = v\sin\theta$ に大きさ $qv_\perp B$ の力が作用し，磁場に平行な速度成分 $v_{/\!/} = v\cos\theta$ に力は作用しないと考えることができる。そうすると，荷電粒子を磁場に垂直な平面に射影した点は，速さ $v_\perp$ で等速円運動し，磁場の方向に一定の速さ $v_{/\!/}$ で等速運動をする。その結果，荷電粒子は，磁場に沿ったらせん軌道を描いて運動する（図 4.7）。

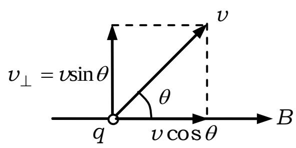

図 4.6

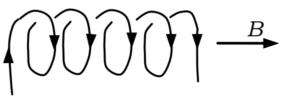

図 4.7

例題 4.2　磁場に斜めに飛び込む荷電粒子

x 軸正方向に磁束密度の大きさ B の一様な磁場がかけられている。原点 O に質量 m，電荷 q の荷電粒子が，$x-y$ 平面内で x 軸と角 θ をなす向きに速さ v で打ち込まれた。この粒子が再度 x 軸上に戻る点の x 座標を求めよ。

【解答】

$y-z$ 平面に射影した粒子の点は，x 軸に垂直な速度成分の大きさ $v\sin\theta$ で等速円運動をするので，粒子が x 軸上に戻るまでの時間は $T = \dfrac{2\pi m}{qB}$ となる。この間，粒子は x 軸に沿って，

$$x = v_{/\!/}T = \underline{\frac{2\pi mv\cos\theta}{qB}}$$

だけ進む。 ■

例題 4.3　電磁場中の荷電粒子の運動

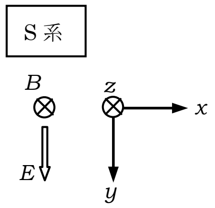

図 4.8

図 4.8 のように，y 軸正方向に強さEの電場をかけ，それと同時にz軸正方向（図の紙面表から裏の向き）に磁束密度Bの磁場をかける。原点 O に質量m，電荷q（>0）の荷電粒子を静かに置く。その後，荷電粒子はどのような運動をするか定めよ。ただし，重力は無視する。

【解答】

速度$\boldsymbol{v}_0=(v_0,0,0)$で運動する荷電粒子には，電場と磁場から力

$$\boldsymbol{f}_0=(0,q(E-v_0B),0)$$

が作用する。したがって，$v_0=E/B$のとき，この粒子にはたらく合力は 0 であり，力はつり合う。よって，粒子は速さv_0でx軸正方向に等速直線運動をする。

また，磁束密度Bの磁場だけがz軸正方向にかけられているとき，速度$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,0)$で運動する荷電粒子に作用するローレンツ力$\boldsymbol{f}$は，

$$\boldsymbol{f}=(qv_yB,-qv_xB,0)$$

と書ける。

元の座標系を S とし, S 系に対して速さ$v_0=E/B$でx軸正方向に等速直線運動している座標系を$\mathrm{S'}$とする。座標系 S で荷電粒子の速度が$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,0)$のとき，座標系$\mathrm{S'}$での速度は，

$$(v'_x,v'_y,0)=(v_x-v_0,v_y,0)$$

これより，$\mathrm{S'}$系で荷電粒子に電磁場からはたらく力$\boldsymbol{f}'$は，

$$\boldsymbol{f}'=(qv_yB,q(E-v_xB),0)=(qv'_yB,q(E-(v'_x+v_0)B,0)=(qv'_yB,-qv'_xB,0)$$

となり，$\boldsymbol{f}'$の表式から電場Eは消える。これをローレンツ力$\boldsymbol{f}$の表式と比較すれば，$\mathrm{S'}$系で荷電粒子には，磁束密度Bの磁場からローレンツ力だけが作用することがわかる。

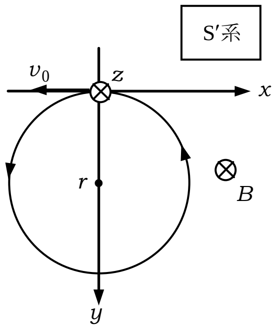

図 4.9

粒子の初速度は，座標系 S で 0 であるから，座標系$\mathrm{S'}$では，$(-v_0,0,0)$となり，粒子は$\mathrm{S'}$系で，図 4.9 のように，点$(0,r,0)$を中心に速さv_0の等速円運動する。その半径rは，円運動の式より，

$$m\frac{v_0^2}{r}=qv_0B \quad \therefore \quad r=\frac{mv_0}{qB}$$

この運動を元の座標系 S でみると，円軌道の中心は速さv_0で

x 軸正方向に動き, そのまわりに反時計回りに速さ v_0 で等速円運動するから, 軌道は図 4.10 のようなサイクロイド曲線を描く。

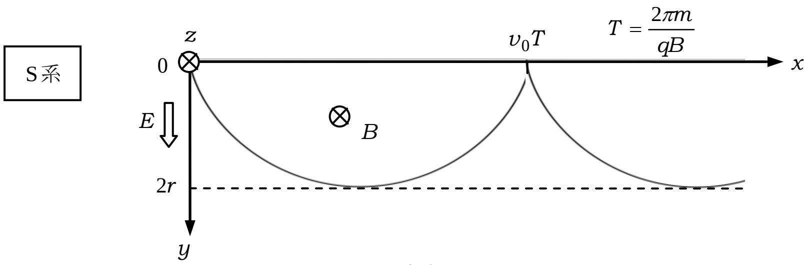

図 4.10

■

例題 4.4　電流密度

一様な重力場中に，単位体積あたり n 個の電子と n 個の 1 価の正イオンからなる電離した気体がある。そこに，磁束密度 B の磁場を水平方向にかけると，磁場に平行で水平方向に電流が流れる。そのときの平均の電流密度（電流に垂直な単位面積あたりに流れる平均の電流）を求めよ。ただし，重力加速度の大きさを g，電子の質量を m，イオンの質量を M とする。このとき， $M >> m$ であることから，電流へのほとんどの寄与は，イオンであるか，電子であるか。

【解答】

図 4.11 のように，鉛直下方に y 軸，水平方向に x 軸と z 軸をとり， z 軸正方向に磁束密度 B の磁場をかけるとする。例題 4.2 の電場からはたらく力 qE のかわりに重力が作用すると考えれば，例題 4.2 と同様に，イオンと電子は，初速度 0 であれば x 軸に沿ったサイクロイド曲線を描く。1 価の正イオンと電子の回転中心の速度 $v_\mathrm{i}, v_\mathrm{e}$ は，それぞれ y 軸方向（鉛直方向）の力のつり合い

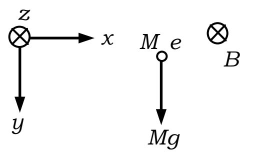

図 4.11：イオンの場合

$$Mg - ev_\mathrm{i}B = 0,\quad mg + ev_\mathrm{e}B = 0 \quad \therefore\quad v_\mathrm{i} = \frac{Mg}{eB},\quad v_\mathrm{e} = -\frac{mg}{eB}$$

となる。イオンあるいは電子の x 方向の平均速度がそれぞれ $v_\mathrm{i}, v_\mathrm{e}$ であるから，それぞれの平均電流密度 $j_\mathrm{i}, j_\mathrm{e}$ は，

$$j_\mathrm{i} = nev_\mathrm{i} = \underline{\frac{nMg}{B}},\qquad j_\mathrm{e} = n(-e)v_\mathrm{e} = \underline{\frac{nmg}{B}}$$

これより，電流へのほとんどの寄与は<u>イオン</u>であることがわかる。■

(3)　電流に磁場から作用する力

実験によると，図 4.12 のように，磁束密度 B の磁場中で磁場と角 θ をなす導線に強さ I の電流が流れているとき, 長さ l の電流には大きさ

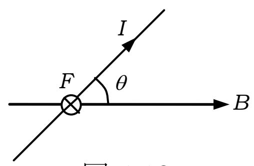

図 4.12

$$F = IBl\sin\theta \tag{4.4}$$

の力がはたらく。その力の向きは，図 4.12 の紙面表から裏の向きである。この力のベクトル$\boldsymbol{F}$ は，電流のベクトル$\boldsymbol{I}$ と磁束密度のベクトル$\boldsymbol{B}$ を用いて，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}l \tag{4.5}$$

と書ける。

例題 4.5　電流に作用する力とローレンツ力

電荷が移動することによって電流が流れることを考慮すると，(4.5)式で表される力は，ローレンツ力(4.2)から導かれることを示せ。

【解答】

断面積S，長さl の導線に大きさI の電流が流れているとする。導線内を自由に動くことのできる電荷q の数密度（単位体積中の電荷の数）をn，電荷が電流の向きに移動する速さをv とすると，電流の大きさI と導線内の電荷の数N は，

$$I = qnSv\,, \qquad N = nSl$$

と書ける。

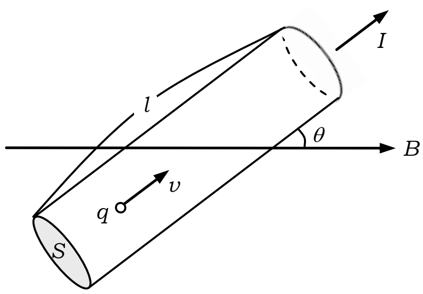

図 4.13

図 4.13 のように，導線と角θ の向きに大きさB の磁束密度の磁場がかけられている場合，導線内のN 個の電荷に作用する力は，紙面表から裏の向き，すなわち，電流I に作用する力の向きに一致し，その合力の大きさNf は，ローレンツ力の大きさ(4.1)を用いて，

$$Nf = nSl \cdot qvB\sin\theta = qnSv \cdot Bl\sin\theta = IBl\sin\theta$$

となり，(4.4)式で与えられる電流にはたらく力の大きさF に一致する。こうして，(4.5)式で表される力$\boldsymbol{F}$ は(4.2)式で与えられるローレンツ力$\boldsymbol{f}$ から導かれる。 ■

直線電流間に作用する力

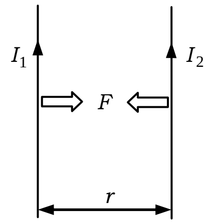

図 4.14
同じ向きの電流間に作用する力

図 4.14 のように，真空中で距離r だけ離れた十分長い２本の平行導線に，強さI_1 とI_2 の電流が流れている場合を考える。実験によれば，電流間に作用する力は，２つの電流が同じ向きのとき引力で，逆向きのとき斥力となり，その強さは電流I_1 とI_2 の積に比例し，距離r に反比例することがわかる。そこで，その比例定数を$\dfrac{\mu_0}{2\pi}$ とおいて，**真空の透磁率**（permeability of vacuum） μ_0 を定義する。そうすると，無限に長い直線電流間に作用する力の強さF は長さl あたり，

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \tag{4.6}$$

と表される。

電流の定義

真空中で 1m 離れた２本の直線導線に同じ強さの電流を流すとき，それぞれの導線の 1m あたりにはたらく力の強さが 2×10^{-7} N となる電流を 1 A と定義する。この定義を(4.6)式に用いると，

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$$

と定められる。

(4)　ホール効果

3.3 節の(3)で説明したように，半導体には，正電荷をもつホールがキャリアとなって電流を流す P 型半導体と，負電荷をもつ自由電子がキャリアとなって電流を流す N 型半導体がある。ただし，現在では，いろいろな物質を混ぜ合わせることにより，多種多様な半導体が作られている。そのような場合，作成した半導体が P 型か N 型かを判定する簡便な方法として，ホール効果の実験がある。この実験を行うと，P 型か N 型かを判定できるだけでなく，そのキャリアの数密度まですぐに求めることができ，大変便利である。

例題 4.6　ホール効果の原理

図 4.15 のように，各辺の長さが a, b, c の直方体の P 型半導体試料（キャリアが正孔）の y 方向に電圧をかけて電流 I を流す。それと同時に z 方向に磁束密度 B の磁場をかけた。このとき，x 軸正方向の側面 α と負方向の側面 β のどちらの電位が高くなるか。また，この試料が N 型半導体（キャリアが電子）であったとすると，どちらの電位が高くなるか。

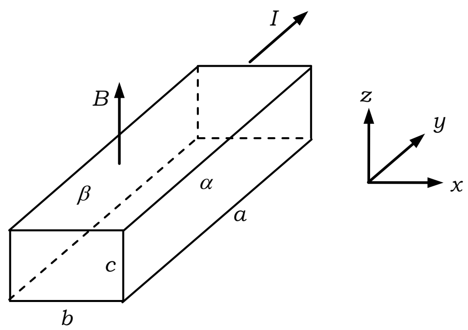

図 4.15

いま，側面 α と側面 β の間の電位差を測定したら V であった。このことから，この試料のキャリアの数密度（単位体積当たりのキャリアの数）を求めよ。ただし，正孔の電荷を e（電子の電荷は $-e$）とする。

【解答】

正孔が電流の方向に移動する平均の速さを v とすると，電流 I は，

$$I = enbcv \tag{4.7}$$

と書ける。正孔は，磁場からローレンツ力を $+x$ 方向に受けるため，側面 α に正電荷が溜り，

側面αの電位が高くなる。もし，この試料が N 型半導体あるならば，電子は$-y$方向に移動し，磁場からローレンツ力を$+x$方向に受けるため，側面αに負電荷が溜り，側面βの電位が高くなる。

側面αとβの間に電位差Vが生じるとき，x方向に大きさ$E=V/b$の電場ができ，キャリアは，磁場から受ける$+x$方向の大きさevBのローレンツ力と，電場から受ける$-x$方向の大きさ$eE=\dfrac{eV}{b}$の力がつり合う。よって，

$$evB=\frac{eV}{b} \qquad \therefore \quad V=vBb \tag{4.8}$$

(4.7)式と(4.8)式からvを消去して，

$$n=\frac{BI}{ecV}$$

を得る。cは試料の大きさであり，Bはかける磁場の強さであるからはじめから分かっている。そこで，回路に流れる電流Iと側面間の電位差Vを測定すれば，定数eを用いて数密度nが求められる。 ■

4.2 電流のつくる磁場

4.1 節で，電荷が電場をつくるように，磁場をつくる「単磁極（正または負の単独の磁荷）は存在しないと考えられる」と述べたが，それでは，磁場はどのようにして作られるのであろうか。実験によれば，電流が流れるとその周囲に磁場ができることがわかる。まず，どのような電流が流れるとどのような磁場ができるのか，確認しておこう。

(1) いろいろな電流のつくる磁場

直線電流による磁場

(4.6)式に(4.5)式を適用すると，直線電流のつくる磁場の表式を得ることができる。電流I_2の位置に，図 4.14 の紙面表から裏の向きに磁束密度の強さBの磁場ができるとすると，長さlのI_2に作用するI_1に向かう向きの力の強さは$F=I_2Bl$となることから，

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{4.9}$$

と書ける。(4.9)式は，真空中で強さIの直線電流から距離rだけ離れた点に生じる磁束密度の大きさを与える表式である。このときの磁束密度の向きは，図 4.14 のように，電流の向きに進む右ネジの回る向き（**右ネジの規則**（rule of right handed screw））となる。

円電流の中心に生じる磁場

図 4.16 のように，半径aの円形導線に強さIの電流が流れると，円の中心には，電流の向きに回る右ネジの進む向き（紙面裏から表の向き）に，強さ

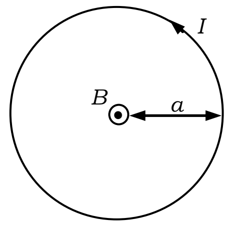

図 4.16

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \tag{4.10}$$

の磁場ができる。

ソレノイド内に生じる磁場

図 4.17 のように，円筒状に多数回巻いたコイルを，**ソレノイド**（solenoid）という。内部が真空の十分に長いソレノイドに強さ I の電流を流すとき，その内部に生じる磁束密度の大きさ B は，その軸に沿った単位長さあたりの巻き数を n として，

$$B = \mu_0 nI \tag{4.11}$$

で与えられる。磁場は，ソレノイドの断面内で一様である。

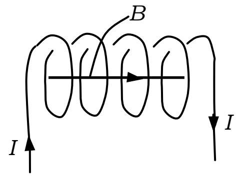

図 4.17

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

(2)　ビオ - サバールの法則

上に述べた直線電流，円電流，ソレノイドの磁場は，実験結果と見なされる。しかし，いろいろな実験結果を与えるだけでは，別の形状の電流を流したときに生じる磁場を予想することはできない。そこで，ビオ（J.B. Biot）とサバール（F. Savart）は，いろいろな実験結果を元に，それらを統一的に理解することのできる次の法則を見出した。

図 4.18 のように，任意の形状の定常電流 I が流れている。電流上の任意の点 Q で電流に沿った微小なベクトルを $d\boldsymbol{s}$ とするとき，微小区間を流れる電流 $Id\boldsymbol{s}$ が，Q から $\boldsymbol{r}$（$|\boldsymbol{r}| = r$）の点 P につくる微小磁場 $d\boldsymbol{B}$ は，

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.12}$$

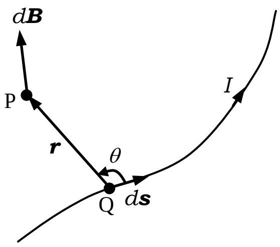

図 4.18

で与えられる。これを，**ビオ - サバールの法則**（Biot-Svart law）という。$Id\boldsymbol{s}$ から $\boldsymbol{r}$ へ反時計回りの角を θ とすると，$d\boldsymbol{B}$ の大きさ dB は，

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi r^2} ds \tag{4.13}$$

となる。

例題 4.7　直線電流のつくる磁場

図 4.19 のように，z 軸上の線分 AB 上を点 A（$z = z_A$）から B（$z = z_B$）に向かって流れる強さ I の電流が点 P につくる磁束密度の大きさ B_{AB} を求めよ。ただし，点 P から線分 AB に引いた垂線 PO の長さを r とし，線分 AP と BP が z 軸正方向となす角をそれぞれ θ_A, θ_B とする。この結果から，無限に長い強さ I の直線電流から距離 r の点に生じる磁束密度の大き

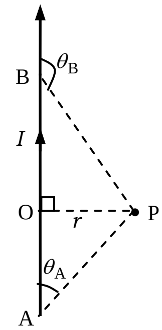

図 4.19

さ B が(4.8)式で与えられることを示せ。

【解答】

線分 AB 上に任意の点 Q（座標 z）をとり，線分 QP の長さを R，線分 QP が z 軸正方向となす角を θ とする。点 Q から z 軸に沿った微小区間 dz を流れる電流が点 P に，図 4.20 の紙面の表から裏の向きにつくる微小磁場の強さ dB は,

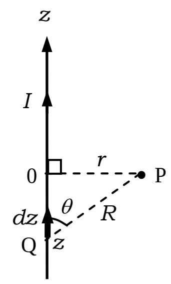

図 4.20

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi R^2} dz$$

と書ける。ここで，$\sin\theta = \dfrac{r}{R}$，$z = -\dfrac{r}{\tan\theta} \Rightarrow \dfrac{dz}{d\theta} = \dfrac{r}{\sin^2\theta}$ となることより z から θ への置換積分を実行して，点 P の磁束密度の大きさ B_{AB} は,

$$B_{\mathrm{AB}} = \int_{z_{\mathrm{A}}}^{z_{\mathrm{B}}} \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi R^2} dz = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\theta_{\mathrm{A}}}^{\theta_{\mathrm{B}}} \sin\theta \, d\theta = \underline{\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_{\mathrm{A}} - \cos\theta_{\mathrm{B}})} \tag{4.14}$$

いま，$z_{\mathrm{A}} \to -\infty$（$\theta_{\mathrm{A}} \to 0$），$z_{\mathrm{B}} \to \infty$（$\theta_{\mathrm{B}} \to \pi$），として，無限に長い直線電流から距離 r 離れた点に生じる磁束密度の大きさ B は，(4.8)式で与えられることがわかる。 ■

例題 4.8　円電流のつくる磁場

図 4.21 のように, 半径 a の円形導線に強さ I の電流が流れているとき，中心軸上の点 P に生じる磁束密度の大きさ B とその向きを求めよ。ただし，円形導線の中心 O を原点に，中心軸に沿って電流の向きにまわる右ネジの進む向きに z 軸をとり，点 P の座標を z とする。

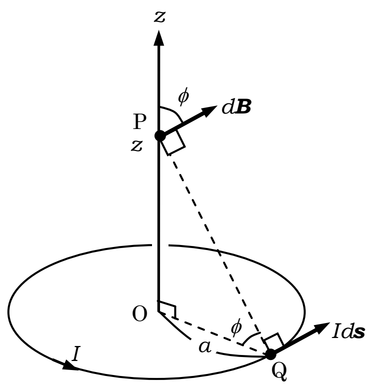

図 4.21

【解答】

円形導線上の任意の点を Q とし，∠PQO=ϕ とする。点 Q から円形導線に沿った微小区間 ds を流れる電流が点 P につくる微小な磁束密度 $d\boldsymbol{B}$ は，図 4.21 のように，一定の角 ϕ をなすから，点 P に生じる z 軸に垂直な磁場成分は互いに打ち消し合い，点 P の磁場は<u>z 軸正方向</u>を向く。よって，点 P に生じる磁束密度の大きさ B は，PQ 間の距離は点 Q の位置によらず一定であることに注意して,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathrm{C}} \frac{\cos\phi}{a^2 + z^2} ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}} \oint_{\mathrm{C}} ds = \underline{\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}} \tag{4.15}$$

ここで，$\oint_{\mathrm{C}}$ は，円形導線 C に沿った一周の積分を表し，$\oint_{\mathrm{C}} ds = 2\pi a$ であることを用いた。上式で $z = 0$ とおくと，円形導線の中心 O の磁束密度の大きさ(4.10)が導かれる。 ■

例題 4.9　ソレノイド内部の磁場

半径aで，中心軸に沿った単位長さあたりの巻数がnのソレノイドの中心軸上に生じる磁束密度を求めよう。図 4.22 のように，中心軸に沿って電流の流れる向きに回る右ネジの進む向きにz軸をとり，ソレノイドの下端の導線上の点を A（$z = z_A$），上端の導線上の点を B（$z = z_B$）として，原点 O（$z = 0$）の磁束密度を求めよ。ただし，線分 OA，OB がz軸となす角をそれぞれθ_A, θ_Bとおき，磁束密度の大きさBを，θ_A, θ_Bなどを用いて表せ。

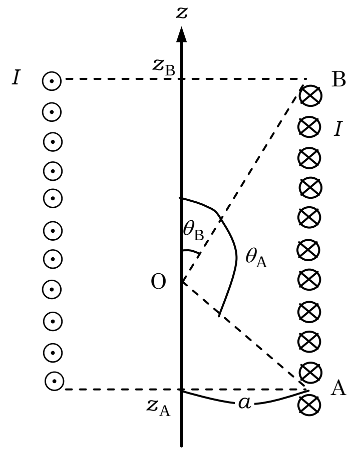

図 4.22

【解答】

$z \sim z + dz$を流れる円電流$nIdz$が点 O につくる磁束密度は，z軸正方向を向き，その大きさdBは，(4.14)式より，

$$dB = \frac{\mu_0 a^2}{2} \cdot \frac{nIdz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

ここで，$z = \dfrac{a}{\tan\theta}$とおいて，$\dfrac{dz}{d\theta} = -\dfrac{a}{\sin^2\theta}$，$\sin^2\theta = \dfrac{a^2}{a^2 + z^2}$を用いると，点 O の磁束密度の大きさ$B$は，

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}\int_{z_A}^{z_B} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_A}^{\theta_B} \sin\theta \, d\theta = \underline{\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\theta_B - \cos\theta_A)}$$

また，その向きは<u>z軸正方向</u>である。

ソレノイドが十分に長いとき，$\theta_A \to \pi$，$\theta_B \to 0$として，(4.11)式を得る。この計算は，<u>ソレノイドの中心軸上の磁場</u>だけである。ただし，ソレノイド内に，その軸に平行に，同じ長さ，同じ巻数で断面の微小なソレノイドを隣接させて多数配置し，各ソレノイドに同じ強さの電流を流せば，微小ソレノイドの隣接した辺に流れる電流は互いに打ち消し合い，元のソレノイドに流れる電流だけが残る。これより，元のソレノイド内の磁場は，中心軸上に限らず，断面内のどこでも一様であり，(4.11)式で与えられることがわかる。

十分長いソレノイドの端の中心軸上の磁束密度の大きさB_1は，$\theta_A = \pi/2$，$\theta_B \to 0$として，

$$B_1 = \frac{1}{2}\mu_0 nI \tag{4.16}$$

を得る。すなわち，十分長いソレノイドの端の磁場は内部の磁場の 1/2 となることがわかる。

■

(3)　アンペールの法則

直線電流のつくる磁場の式(4.9)は,

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \tag{4.17}$$

と書くことができる。(4.17)式の左辺は,(磁束密度)×(磁場に沿った円周経路の長さ)を表　しており,右辺は,経路内で囲まれた面を貫いて流れる電流を表している。そこで,図 4.23 のように,電流 I を囲む任意の閉曲線 C を考えて, C 上の任意の点 P の磁束密度を $\boldsymbol{B}$ ($|\boldsymbol{B}| = B$),紙面上の電流の位置を点 O とする。点 P から C 上を,電流 I の向きに進む右ねじの回る向きの微小ベクトルを PP'$= d\boldsymbol{l}$ ($|d\boldsymbol{l}| = dl$) とし,

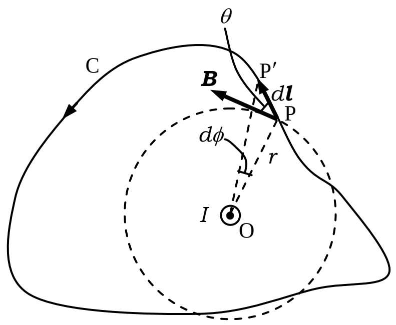

図 4.23

$\angle \mathrm{POP}' = d\phi$ とおく。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は,点 O を中心とした半径 $\mathrm{OP} = \boldsymbol{r}$ の円の接線方向を向いており, $\boldsymbol{B}$ と $d\boldsymbol{l}$ のなす角を θ とすると,

$$\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = B \cdot dl \cos\theta = B \cdot r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$

となる。上式の,閉曲線 C の一周の和を求めて,

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\mathrm{C}} d\phi = \mu_0 I \tag{4.18}$$

を得る。ここで, $\oint_{\mathrm{C}} d\phi = 2\pi$ となることを用いた。

(4.18)式の左辺の積分は,**線積分**(line integral)とよばれるが,その詳細な計算法などには触れない。

ここまでは,閉曲線 C で囲まれた曲面 S を 1 本の直線電流が貫く場合であったが,曲面 S を貫く電流 I の形状が直線ではなく任意の形をしていても(4.18)式は成り立つ[3]。また, C を貫く電流が連続的に分布していれば,(4.18)式の右辺の電流 I をそれらの電流の総和 I_0 で置き換えればよい。すなわち,曲面のある点の近傍の微小面積 dS の曲面を貫いて流れる電流密度(曲面の単位面積あたり貫く電流)を $\boldsymbol{j}$ ($|\boldsymbol{j}| = j$),微小曲面に垂直で大きさが dS に等しいベクトルを $d\boldsymbol{S}$ とすると,この微小曲面を貫く電流は, $\boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}$ と表されるから,曲面 S を貫く電流の総和は $I_0 = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}$ と書ける[4]。こうして,一般的に(4.18)

[3] ここで証明は省略する。

[4] 2.1 節(3)ガウスの法則の積分表現の項を参照。

式は次のように表される。

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.19}$$

(4.19)式は，積分形式の**アンペールの法則**（Ampere's law）とよばれ，次章で述べられるように，マクスウェル - アンペールの法則に一般化され，電磁気学の基本法則の 1 つと見なされている。また，対称性のよい系の考察などで役立つ重要な法則である。

例題 4.10　ソレノイド内外の磁場

単位長さあたり n 回巻いた十分に長いソレノイドに強さ I の電流を流したとき，ソレノイド内外の磁場を求めよう。

図 4.24 のように, ソレノイドの中心軸を含む断面をとり，BC=DA= l で辺 AB, CD の長さが十分に長い長方形の閉回路に，アンペールの法則(4.18)を適用することにより，ソレノイド内部と外部の磁束密度を求めよ。

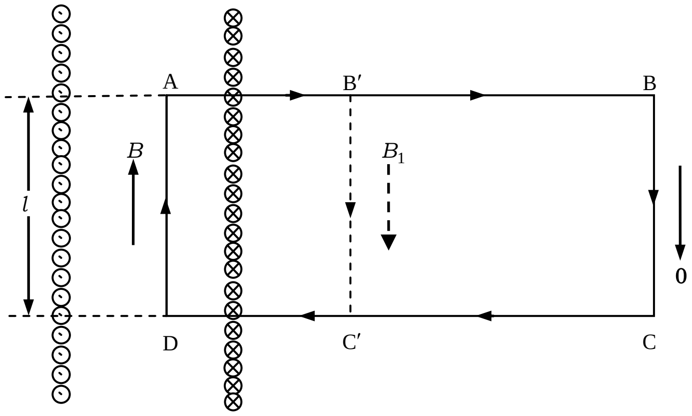

図 4.24

【解答】

ソレノイドは十分に長いので，軸に沿った有限な距離の平行移動では，その対称性に変化はない。したがって，磁場はソレノイドの中心軸に平行にできるはずである。よって，辺 AD 上の磁束密度は中心軸に平行でどこでも等しい。その磁束密度の大きさを B とする。辺 AB, CD は中心軸に垂直であるから，磁束密度のベクトルと回路に沿った変位のベクトルは直交するからその内積は 0 である。また，辺 BC はソレノイドから十分遠く離れているからそこでの磁場を 0 とする[5]。そうすると，(4.19)式の左辺は $B\cdot l$ に等しい。

一方，長方形の閉回路を貫く導線の数は nl であるから電流の総和は nlI である。こうしてアンペールの法則(4.19)より，

$$Bl = \mu_0 nlI \qquad \therefore \quad B = \mu_0 nI \tag{4.11}$$

いま，辺 AD の位置は，ソレノイド内であればどこにとっても計算は同じであるから，ソレノイド内の磁束密度は，どこでも $\underline{\mu_0 nI}$ で与えられることがわかる。

[5] ソレノイドが十分長いので，十分遠方でも磁場は 0 ではないと考えることもできるが，ここでは，辺 BC をソレノイドの長さより十分遠方にとることにして 0 とおく。

次に，長方形の辺 BC をソレノイドの外部ではあるがソレノイドに近い位置$\mathrm{B'C'}$にとってみよう。辺$\mathrm{B'C'}$の位置での磁束密度は，対称性より，ソレノイドの軸に平行でありどこでも同じ値である。その値をB_1として閉回路$\mathrm{AB'C'D}$に(4.19)式を適用すると，

$$B \cdot l + B_1 l = \mu_0 n l I$$

ここで，(4.11)式を用いれば，$B_1 = 0$となる。辺$\mathrm{B'C'}$はソレノイドの外部であればどこにとっても同じであるから，ソレノイド外部の磁場はどこでも0であることがわかる。　■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

4.3　磁性体

磁化

鉄でつくられた釘に磁石を近づけると釘は磁石に引き付けられる。これは，釘が磁石の磁場によって**磁化**（magnetization）されて1つの磁石になるためである。磁化のされ方は，物質によって大きく異なる。鉄やニッケル，コバルトなどは磁場によって強く磁化される物質であり，このような物質を**強磁性体**（ferromagnetic material）という。また，アルミニウムやマンガンなどの多くの物質では，強磁性体と同様に磁化されるが，磁化の程度は弱い。このような物質を**常磁性体**（paramagnetic material）という。さらに，水や銅，炭素などは，磁石を近づけると強磁性体あるいは常磁性体とは逆向きに弱く磁化され，磁石との間に斥力がはたらく。このような物質を**反磁性体**（diamagnetic material）という。

透磁率と磁場の強さ

物質中では，磁場を表す量として磁束密度$\boldsymbol{B}$以外に，**磁場の強さ**（strength of magnetic field）$\boldsymbol{H}$を用いると便利である。$\boldsymbol{H}$は，$\boldsymbol{B}$から磁化による項を除いた量であり，関係式

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{4.20}$$

で与えられ，μを**透磁率**（permeability）という。真空中では，真空の透磁率μ_0を用いて，

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{4.21}$$

と書ける。さらに，

$$\mu_{\mathrm{r}} = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{4.22}$$

で定義されるμ_{r}を**比透磁率**（relative permeability）という。

強磁性体の比透磁率は10^4程度以上の大きな値になるが，それ以外の物質の比透磁率はほとんど1に等しく，常磁性体ではわずかに1より大きく，反磁性体ではわずかに1より小さい。

第５章　電磁誘導と回路

これまでは,電場や磁場が時間的に変化しない**静電場**(electrostatic field)や**静磁場**(static magnetic field）を考えてきたが，ここからは，時間的に変化する場合を考えよう。

5.1　電磁誘導

コイルに対して磁石を近づけたり遠ざけたりすると，コイルに起電力が生じて電流が流れる。逆に，磁石を固定してコイルを近づけたり遠ざけたりしても，コイルに起電力が生じて電流が流れ，それらの強さは磁石とコイルの相対的な運動で決まる。このような現象を**電磁誘導**（electromagnetic induction），電磁誘導によって生じる起電力を**誘導起電力**（induced electromotive force），流れる電流を**誘導電流**（induced electric current）という。

(1)　電磁誘導の法則

面積Sの平面に垂直に，磁束密度の大きさBの一様な磁場がかかっているとき，$\Phi = BS$を**磁束**（magnetic flux）という。

図 5.1 のように，1 回巻のコイルを貫く磁束Φが時間的に変化するとき，コイルには，誘導起電力Vが生じる。このとき，起電力Vは，磁束の向きに進む右ねじの回る向きを正の向きとして，

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{5.1}$$

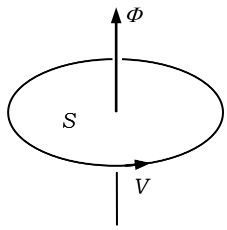

図 5.1

で与えられる。(5.1)式の右辺に付けられている負号は，コイルに生じた誘導起電力の向きに流れる電流のつくる磁場が，磁束の変化を妨げる向きであることを示している。誘導起電力が(5.1)式で与えられる法則を**電磁誘導の法則**（law of electromagnetic induction）といい，電磁気学の基本法則の１つと見なされている。

(2)　誘導電場

コイルを貫く磁束が変化してコイルに誘導起電力が生じるとき，コイル内の正電荷には，起電力の向きに力がはたらく。この力を及ぼす電場を**誘導電場**（induced electric field）とよぶ。

半径rの円形コイル内に正電荷qがあり,誘導起電力Vによって力を受けてコイルを一周するとき，電荷qはqVの仕事をされる。いま，電荷qがコイル内のどこでも，誘導電場の大きさEが一定で，同じ大きさの力を受けるとすると，Eは,

$$qV = qE \cdot 2\pi r \qquad \therefore \quad E = \frac{V}{2\pi r}$$

と表される。いま，誘導起電力Vの向きにコイルを一周すると電位がVだけ上昇する。よって，誘導電場の大きさEは，電位の傾きの大きさに等しい。この関係は,「電場の大きさが電位の傾きの大きさに等しい」ことに対応する。ただし，第１章で述べた電場（静電場）は電位の高いところから低いところへ向かうが，上のように考える誘導電場は,逆に，電位の低いところから高いところへ向かうことに注意しなければならない。そこ

で，静電場を誘導電場と区別して，特に，**クーロン電場**（Coulomb electric field）とよぶこともある。

上の誘導電場は，コイルがなくても任意の閉回路について成り立つ。すなわち，任意の閉回路 C を貫く磁束が $\dfrac{d\Phi}{dt}$ の割合で変化すると，C には，磁束の向きに進む右ねじの回る向きに，$V=-\dfrac{d\Phi}{dt}$ の誘導起電力が生じ，誘導起電力の向きに誘導電場が発生する（図 5.2）。

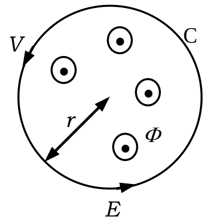

図 5.2

例題 5.1　ベータトロン

図 5.3 のように，一様な磁束密度 B_0 の磁場に垂直に，質量 m，正電荷 q の荷電粒子を速さ v_0 で飛び込ませて点 O を中心に半径 a の等速円運動をさせた。その後，磁束密度を増加させたが，その割合を中心 O 付近で大きく，粒子の軌道上で小さくしたところ，粒子は半径 a の円運動を続けながら次第にその速さを増していった。このとき，半径 a の円軌道内の平均の磁束密度の増加率と，軌道上の磁束密度の増加率の間にどのような関係が成り立つか求めよ。ただし，円軌道上での誘導電場の大きさはどこでも等しいとする。このようにして荷電粒子を加速させる装置を**ベータトロン**という。

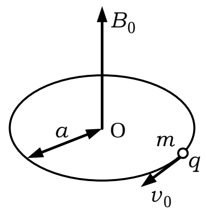

図 5.3

【解答】

半径 a の円軌道内の磁束の増加率を $\dfrac{d\Phi}{dt}$ とすると，円軌道上に荷電粒子の運動方向に誘導電場が生じる。題意より，その大きさ E はどこでも等しいから，

$$E=\frac{1}{2\pi a}\frac{d\Phi}{dt}$$

となる。いま，円軌道内の平均の磁束密度を $\overline{B}$ とすると，$\overline{B}=\dfrac{\Phi}{\pi a^2}$ となるから，

$$E=\frac{a}{2}\frac{d\overline{B}}{dt}$$

荷電粒子の円軌道に沿った方向の運動方程式は，

$$m\frac{dv}{dt}=qE=\frac{aq}{2}\frac{d\overline{B}}{dt} \tag{5.2}$$

となる。

一方，荷電粒子の円運動の式（中心方向の円運動の運動方程式）は，円軌道上の磁束密度の大きさを B とすると，

$$m\frac{v^2}{a} = qvB \quad \therefore \quad mv = aqB$$

この式の両辺を t で微分して，

$$m\frac{dv}{dt} = aq\frac{dB}{dt} \tag{5.3}$$

(5.2)式と(5.3)式を比較して，

$$\frac{d\overline{B}}{dt} = 2\frac{dB}{dt}$$

すなわち，円軌道内の平均の磁束密度の増加率は，軌道上の増加率の２倍である。　■

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

(3)　積分形式の電磁誘導の法則

図 5.4 のように, 任意の閉回路 C に生じる誘導起電力 V は, 電場を経路に沿って積分すればよい。ただし，誘導電場は静電場（クーロン電場）と向きが逆であるから，1.3 節で考えた電場の積分とは，負号が逆転する。C 上の任意の点 P に生じる誘導電場を $\boldsymbol{E}$，点 P から起電力の向きに進む微小ベクトルを $d\boldsymbol{l}$ とすると，$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ は，C 上を微小距離 $dl = |d\boldsymbol{l}|$ だけ進む間の電位の増加を表すから，C の一周に生じる起電力 V は，4.2 節(3)で述べた線積分を用いて，

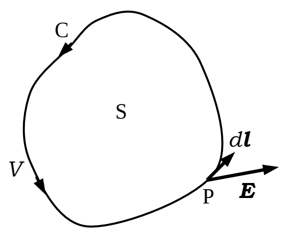

図 5.4

$$V = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

と表される。

一方，閉回路で囲まれた曲面 S を貫く磁束 Φ は，S 上の微小曲面 dS を貫く微小磁束 $\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$（$\boldsymbol{B}$ は，微小曲面上の磁束密度，$d\boldsymbol{S}$ は微小曲面の法線方向の大きさ dS のベクトル）の S に関する和，すなわち，S に関する面積分

$$\Phi = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

で与えられる。これより，**積分形式の電磁誘導の法則**（law of electromagnetic induction of integral form）は，

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5.5}$$

と書ける。ここで，閉回路 C は動かない（すなわち，曲面 S は一定である）とし，$\boldsymbol{B}$ が空間座標と時間座標の関数であることを考慮して，時間微分を積分の中に入れ，常微分

$\dfrac{d}{dt}$を偏微分$\dfrac{\partial}{\partial t}$に書き直した[6]。

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

5.2　ローレンツ力と誘導起電力

前節で述べた電磁誘導と類似の現象に，電荷に磁場からはたらくローレンツ力によって生じる誘導起電力がある。ここでは，そのような誘導起電力と，そこでも登場する誘導電場について考えてみよう。

金属棒に生じる誘導起電力

図 5.5 のように，長さlの導体棒 AB を，紙面表から裏の向きの一様で，磁束密度の大きさBの磁場に垂直に置き，棒の向きを一定に保ちながら磁場と棒の両方に垂直な方向に一定の速さvで動かす。導体棒の中には多くの自由電子があり，それに磁場からローレンツ力がはたらく。しかしここでは，符号を簡単化して議論の本質を見えやすくするために，導体棒の中に，自由に動ける多くの正電荷qがあり，全体が中性に保たれていると考えて，このときの誘導起電力を求める。

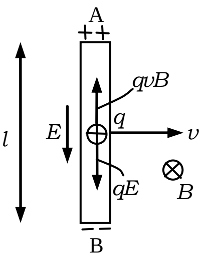

図 5.5

導体棒 AB とともに動く正電荷qには，B→A の向きにqvBのローレンツ力が作用し，棒の端 A に正電荷が, 反対側の端 B には正電荷が不足して負電荷が現れる。そうすると，A→B に電場Eができ，残っている導体棒中の正電荷にはローレンツ力qvBと電場からの力qEがつり合う。よって，

$$qE = qvB \qquad \therefore \quad E = vB$$

となり，端 A の電位は端 B の電位より，

$$V = El = vBl$$

だけ高くなる。ローレンツ力は，このような電位差を与える力，すなわち，誘導起電力を引き起こす。誘導起電力の大きさ$V = vBl$は，<u>単位時間あたり導体棒の切る磁束</u>に等しい。また，誘導起電力の向きは，導体棒とともに動く<u>正電荷に作用するローレンツ力の向き</u>である。

誘導電場

上の現象を，導体棒とともに動く観測者（座標系S′）で考えてみよう（図 5.6）。そうすると，導体棒中の正電荷は静止しているため，正電荷にローレンツ力は作用しない。しかし，正電荷には B→A の向きに大きさqvBの力がはたらき，端 A に正電荷が端 B に負電荷が溜まることに変わりはないはずである。そこで，S′系では，元の座標系 S

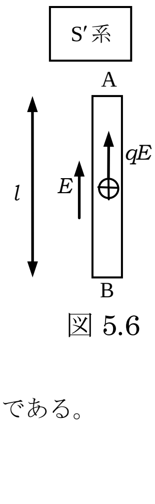

図 5.6

[6] 時間に関する偏微分は，空間座標を定数とみなして時間で微分することを表す演算子である。

では生じていなかった電場，すなわち，大きさqvBの力を及ぼす大きさ$E=vB$の誘導電場がB→Aの向きに生じているはずである。したがって，S′系では，5.1節で考えた電磁誘導と同様に，誘導電場Eにより誘導起電力$V=vBl$が生じていると考えられる。

例題 5.2　２本レール上の導体棒の運動

図 5.7 のように，水平面上に置かれた間隔dの２本の平行な導体レール AB，A′B′が固定され，その上に，質量mの導体棒 CD が置かれている。また，２本レールの左端には，内部抵抗の無視できる起電力の大きさEの電池と，抵抗値Rの抵抗体がつながれ，鉛直下向き（紙面表から裏の向き）に磁束密度の大きさBの一様な磁場がかけられている。導体棒 CD は２本レール AB，A′B′と垂直をなしたまま，レール上を摩擦なしに動くことができ，レールと導体棒の間の摩擦，および抵抗体以外の部分で電気抵抗は無視できる。

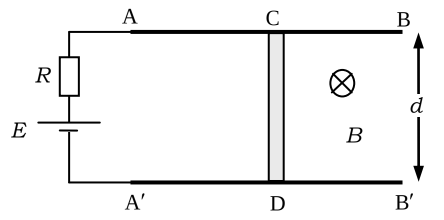

図 5.7

はじめ，導体棒をレール上で静止させて時刻$t=0$に静かに放したところ，導体棒はレール上を右向きに動き出した。時刻tにおける導体棒の速度vを求めてその$v-t$グラフ描き，十分に長い時間たったときの速度v_∞を求めよ。

【解答】

導体棒 CD が水平右向きに速さvで動いているとき，導体棒には D→C の向きに大きさvBdの誘導起電力が生じる。導体棒を C→D の向きに流れる電流の強さをIとすると，回路方程式は，

$$E-vBd=RI$$

と書ける。また，導体棒 CD には水平右向きに大きさIBdの力がはたらくから，CD の運動方程式は，

$$m\frac{dv}{dt}=IBd$$

これら２式からIを消去して，$k=\dfrac{(Bd)^2}{mR}$，$v_1=\dfrac{E}{Bd}$とおくと，

$$\frac{dv}{dt}=k(v_1-v)$$

を得る。ここで，この式の両辺を(v_1-v)で割ってtに関して積分し，初期条件「$t=0$のとき，$v=0$」を用いると，

$$\underline{v=v_1\left(1-e^{-kt}\right)},\quad \underline{k=\frac{(Bd)^2}{mR}},\quad \underline{v_1=\frac{E}{Bd}}$$

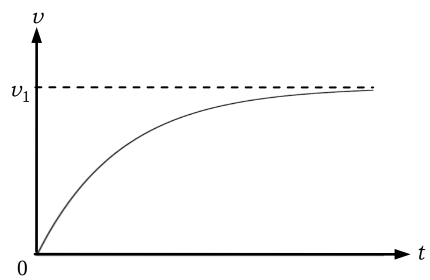

図 5.8

となる。このグラフは，図 5.8 で与えられる。また， $t \to \infty$ のとき， $v \to v_1$ となるから，

$$\underline{v_\infty = v_1 = \frac{E}{Bd}} \qquad \blacksquare$$

5.3　自己誘導と相互誘導

(1)　自己誘導と相互誘導

自己誘導

コイルに流れる電流が変化すると，コイルを貫く磁束が変化し，電磁誘導の法則にしたがって，コイルに誘導起電力が生じる。そこで，図 5.9 のように，電流 I の向きの起電力 V_s は電流の変化率 $\dfrac{dI}{dt}$ に比例するとして，その比例定数を $-L$ とおき， V_s を，

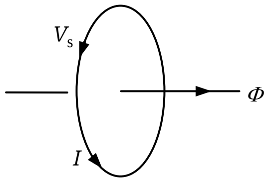

図 5.9

$$V_\mathrm{s} = -L\frac{dI}{dt} \tag{5.5}$$

と書く。このときの L をコイルの**自己インダクタンス**（self-inductance）という。L に負号が付くのは，起電力の向きが電流の変化を妨げる向きであることを示している。このような現象を**自己誘導**（self-induction）といい，このとき生じる起電力を，**自己誘導起電力**（self-induced electromotive force）という。L は，コイルに流れる電流や生じる起電力によらず，コイルの形状で決まる定数である。

相互誘導

図 5.10 のように，2 つのコイル 1, 2 があり，コイル 1 に電流 I が流れてコイル 2 を貫く磁束が変化してコイル 2 に誘導起電力 V_m が生じるとき，

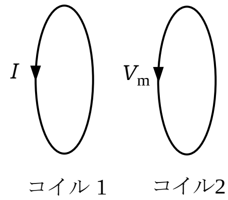

図 5.10

$$V_\mathrm{m} = -M\frac{dI}{dt} \tag{5.6}$$

と書いて，**相互インダクタンス**（mutual inductance） M を定義する。このような現象を**相互誘導**（mutual induction），このとき生じる起電力を**相互誘導起電力**（mutual-induced electromotive force）という。

例題 5.3　ソレノイドの自己インダクタンス

真空中に置かれた断面積 S，長さ l （コイルの断面の半径に比べて十分に長い），単位長さあたり n 回巻いたソレノイドの自己インダクタンスを求めよ。真空の透磁率を μ_0 とする。

【解答】

十分に長いソレノイドに電流 I を流すとき，内部の磁束密度の大きさは $B = \mu_0 nI$ であるから，ソレノイドを貫く磁束 Φ は，

$$\Phi = BS = \mu_0 nSI$$

電流Iを変化させると，電流の向きにソレノイドの１巻きあたり$-\dfrac{d\Phi}{dt}$の誘導起電力が生じるから，nl回巻きのソレノイド全体に電流の向きに生じる誘導起電力Vは，

$$V = -nl\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n^2 lS\frac{dI}{dt}$$

これを(5.5)式と比較して，このソレノイドの自己インダクタンスLは，

$$L = \underline{\mu_0 n^2 lS}$$ ■

例題 5.4　相互インダクタンス

断面積S_1，単位長さあたりの巻数n_1，長さLの大きなソレノイド１の中に，同じ中心軸をもつ断面積S_2（$< S_1$），単位長さあたりの巻数n_2で，同じ長さLのソレノイド２が置かれている。図 5.11 には，共通の中心軸を通る平面による断面図が示されている。そこには，それぞれのソレノイドに電流I_1とI_2を流した場合の電流の向きが示されている。ソレノイド１から２への相互インダクタンスM_{21}と，ソレノイド２から１への相互インダクタンスM_{12}をそれぞれ求め，$M_{21} = M_{12}$が成り立つこと（これを**相反定理**（reciprocity theorem）という）を示せ。ただし，ソレノイドの長さLは，ソレノイドの断面の半径に比べて十分に長く，ソレノイドの途中での磁束の漏れは無視できるとし，真空の誘電率をμ_0とする。

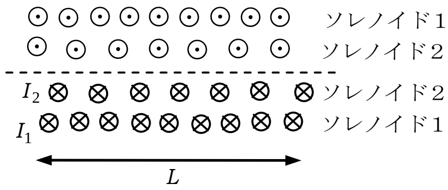

図 5.11

【解答】

ソレノイド１に電流I_1を流し，ソレノイド２には電流を流さないとき，ソレノイド１の内部には，強さ$B_1 = \mu_0 n_1 I_1$の磁束密度ができ，ソレノイド２を貫く磁束は$\Phi_2 = B_1 S_2 = \mu_0 n_1 S_2 I_1$となる。したがって，ソレノイド２に生じる誘導起電力V_2は，

$$V_2 = -n_2 L\frac{d\Phi_2}{dt} = -\mu_0 n_1 n_2 S_2 L\frac{dI_1}{dt}$$

と書ける。これを(5.6)式と比較して，ソレノイド１から２への相互インダクタンスM_{21}は，

$$M_{21} = \underline{\mu_0 n_1 n_2 S_2 L}$$

次に，ソレノイド２に電流I_2を流し，ソレノイド１に電流を流さないとき，ソレノイド２の内部には，強さ$B_2 = \mu_0 n_2 I_2$の磁束密度ができるが，ソレノイド２の外側の磁束密度は0と見なされるから，ソレノイド１を貫く磁束は$\Phi_1 = B_2 S_2 = \mu_0 n_2 S_2 I_2$となる。したがって，ソレノイド１に生じる誘導起電力V_1は，

$$V_1 = -n_1 L \frac{d\Phi_1}{dt} = -\mu_0 n_1 n_2 S_2 L \frac{dI_2}{dt}$$

と書ける。これよりソレノイド２から１への相互インダクタンスM_{12}は,

$$M_{12} = \underline{\mu_0 n_1 n_2 S_2 L}$$

となり，$M_{21} = M_{12}$となり，相反定理の成り立つことを確認できる。 ■

コイルに蓄えられるエネルギー

コイルに電流が流れると，コイル内に磁場ができ，磁場の形でエネルギーが蓄えられる。図 5.12 のように，自己インダクタンスLのコイルに流れる電流がiから$i+di$に変化したとすると，コイルには電流と逆向きに$L\frac{di}{dt}$の誘導起電力が発生する。コイルに電流iが流れているとき，時間dtの間にコイル中を電荷idtが電位が$L\frac{di}{dt}$だけ高いところから低いところへ移動する。その結果，電荷は時間dtの間に，$L\frac{di}{dt}\cdot idt = Li\,di$の電気的位置エネルギーを失う。この失う位置エネルギーが磁場のエネルギーとしてコイルに蓄えられる。したがって，電流iが 0 からIまで増加する間にコイルに蓄えられるエネルギーは,

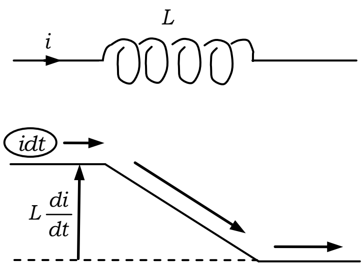

図 5.12

$$U_L = \int_0^I Li\,di = \frac{1}{2}LI^2 \tag{5.7}$$

となる。こうして，電流Iが流れているとき，コイルには(5.7)式で表されるエネルギーが蓄えられていることがわかる。コイルに流れる電流が減少するとき，電流は電位の低いところから高いところに流れ，電荷の電気的位置エネルギーは増加する。そのエネルギーはコイル内に蓄えられていたエネルギーから供給され，コイルのエネルギーは減少する。このときコイル内の磁場も弱くなる。

(2)　コイルに流れる電流と磁束

巻数N_1のコイル１と巻数N_2のコイル２があり, コイル１には電流i_1がコイル２には電流i_2が流れている。このとき，コイル１に生じる誘導起電力V_1は，コイル１の自己誘導起電力とコイル２からの相互誘導起電力の和であり，コイル２に生じる起電力V_2は，コイル１からの相互誘導起電力とコイル２の自己誘導起電力の和である。したがって，コイル１，２を貫く磁束をそれぞれΦ_1, Φ_2，自己インダクタンスをそれぞれL_1, L_2，コイル２から１への相互インダクタンスをM_{12}, コイル１から２への相互インダクタンスをM_{21}

とすると，V_1, V_2 はそれぞれ，

$$\begin{aligned} V_1 &= -N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ V_2 &= -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \tag{5.8}$$

と書ける。これらの式の両辺を t で積分し，コイル１，２を流れる電流をそれぞれ I_1, I_2 とすると，磁束 Φ_1, Φ_2 の間に，

$$\begin{aligned} N_1\Phi_1 &= L_1 I_1 + M_{12} I_2 \\ N_2\Phi_2 &= M_{21} I_1 + L_2 I_2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

の関係式が成り立つ。このとき，ソレノイドのようなコイル構造をしていなくても，一般的に，相反定理

$$M_{12} = M_{21}$$

が成り立つ。

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

例題 5.5　環状鉄心に巻かれた２つのコイル

図 5.13 のように，透磁率 μ，断面積 S，平均の長さ l の環状鉄心に，巻数 N_1 のコイル１と巻数 N_2 のコイル２が巻いてある。鉄心内部の磁束は，鉄心の側面から外部に漏れることはないとする。ただし，鉄心は細く，鉄心内の磁束密度はどこでも同じ強さと見なせるものとする。一様な透磁率 μ の物質内を通る閉曲線に対しては，(4.19)式の右辺の μ_0 を μ に置き換えるだけでアンペールの法則を用いることができる[7]。

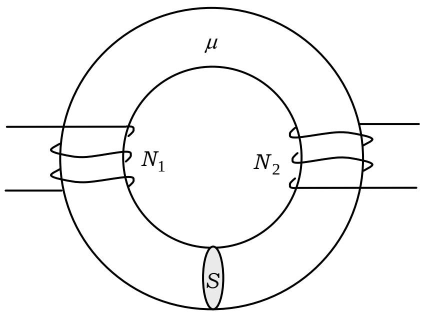

図 5.13

(a)　コイル１と２の自己インダクタンス L_1, L_2，相互インダクタンス M_{12}, M_{21} を求め，それらの間に成り立つ関係を求めよ。

(b)　２つのコイルをつなぎ，同じ向きに電流を流す場合，これらを１つのコイルと見たときの自己インダクタンス L_+ を求めよ。

(c)　２つのコイルをつなぎ，逆向きに電流を流す場合，これらを１つのコイルと見たときの自己インダクタンス L_- を求めよ。

【解答】

(a)　まず，コイル１に電流 I_1 が流れ，コイル２に電流が流れていない（$I_2 = 0$）とする。

鉄心内の磁束密度の大きさを B として，鉄心内部を鉄心に沿って一周する閉曲線 C（C

---

[7] 物質内での一般的なアンペールの法則は，ここでは扱わない。

で囲まれた曲面を S とする）にアンペールの法則を適用する。$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = B\cdot l$ と

$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = N_1 I_1$ より，

$$Bl = \mu N_1 I_1 \quad \therefore \quad B = \frac{\mu N_1 I_1}{l}$$

これより，コイル 1 と 2 を貫く磁束 Φ_1, Φ_2 は，

$$\Phi_1 = \Phi_2 = BS = \frac{\mu N_1 S}{l} I_1$$

となるから，(5.9)式より，

$$N_1\Phi_1 = L_1 I_1 \quad \therefore \quad L_1 = \underline{\frac{\mu N_1^2 S}{l}}$$

$$N_2\Phi_2 = M_{21} I_1 \quad \therefore \quad M_{21} = \underline{\frac{\mu N_1 N_2 S}{l}}$$

次に，コイル 1 に電流が流れず（$I_1 = 0$），コイル 2 に電流 I_2 が流れているとする。

鉄心内の磁束密度の大きさを B' とすると，$B' = \dfrac{\mu N_2 I_2}{l}$ となるから，

$$\Phi_1 = \Phi_2 = B'S = \frac{\mu N_2 S}{l} I_2$$

(5.9)式より，

$$N_1\Phi_1 = M_{12} I_2 \quad \therefore \quad M_{12} = \underline{\frac{\mu N_1 N_2 S}{l}} = M_{21}$$

$$N_2\Phi_2 = L_2 I_2 \quad \therefore \quad L_2 = \underline{\frac{\mu N_2^2 S}{l}}$$

これらより，$M_{21} = M_{12} = M$ とおくと，関係式

$$\underline{L_1 L_2 = M^2}$$

が成り立つ。

(b)　合成コイルを貫く磁束を Φ_+，流れる電流を I とすると，鉄心内の磁束密度は，

$B_+ = \dfrac{\mu(N_1 + N_2)I}{l}$ であるから，

$$(N_1 + N_2)\Phi_+ = (N_1 + N_2)B_+ S = \frac{\mu(N_1 + N_2)^2 S}{l} I$$

$$= \left(\frac{\mu N_1^2 S}{l} + \frac{\mu N_2^2 S}{l} + 2\frac{\mu N_1 N_2 S}{l}\right) I = (L_1 + L_2 + 2M) I$$

となる。この値を $L_+ I$ に等しいとおいて，

$$L_+ = \underline{L_1 + L_2 + 2M}$$

(c)　鉄心内の磁束密度は，$B_+ = \dfrac{\mu(N_1 - N_2)I}{l}$ であるから，(2)と同様にして，

$$L_- = \underline{L_1 + L_2 - 2M}$$ ■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

第６章　交流と電気振動

6.1　交流

(1)　交流の発生

一様な磁場中でコイルを一定の角速度で回転させるとコイルの両端に交流電圧が発生する。

図 6.1 のように，一様な磁束密度の大きさBの磁場中を，面積Sの 1 巻きの長方形コイル CDEF が，手前から見て反時計まわりに一定の角速度ωで回転している。時刻$t = 0$において，辺 CD を図の下側にして長方形の面が磁場と垂直になっていたとする。そうすると，時刻tにおいてコイル貫く磁束Φは，

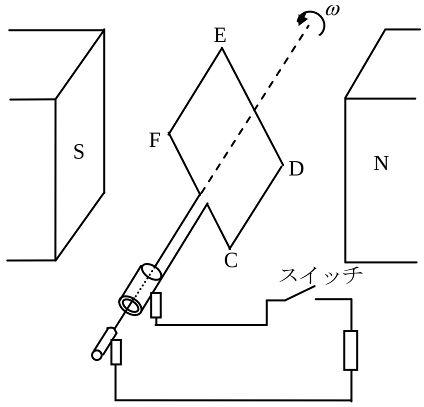

図 6.1

$$\Phi = BS\cos\omega t \tag{6.1}$$

と変化する。この現象は，磁場は時間的に変化せず，コイルが回転運動しているものであるが，電磁誘導は全く相対的なものであったことを思い出すと，コイルは静止し，コイルを貫く磁場が(6.1)式で与えられるように変化すると考えても同じである。したがって，コイルに，磁場の正の向きに進む右ネジの回る向き，すなわち，C→D→E→F の向きに生じる誘導起電力vは，電磁誘導の法則の式(5.1)より，

$$v = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\sin\omega t$$
$$= v_0\sin\omega t \tag{6.2}$$

で与えられる。ここで，$v_0 = BS\omega$とおいた。(6.2)式は，次のように考えて導くこともできる。コイルに生じる誘導起電力の大きさは，辺 CD と辺 EF が単位時間に切る磁束に等しく，その向きは，辺 CD, EF 中の正電荷に作用するローレンツ力の向きである。

例題 6.1　コイルに生じる誘導起電力

図 6.1 のようにコイルが回転するとき，辺 CD に生じる誘導起電力を求めて(6.2)式を導け。

【解答】

辺 CD, EF の長さを$2a$，辺 DE, FC の長さを$2b$とすると，辺 CD と EF は速さ$b\omega$で等速円運動しているから，辺 CD が単位時間に切る磁束は，$B\cdot 2a\cdot b\omega\sin\omega t$である（図 6.2）。また，辺 CD とともに運動している正電荷に作用するローレンツ力の向きは，C→D の向きとなる。したがって，辺 CD に生じる誘導起電力は C→D の向きに，

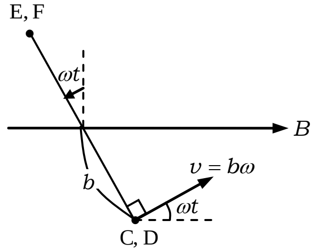

図 6.2

$$V_{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}BS\omega\sin\omega t$$

となる。辺 EF にも同様の起電力が E→F の向きに生じるから，長方形コイル CDEF に生じる誘導起電力は，(6.2)式で与えられる。 ■

(2) 実効値と各素子に流れる交流

交流電源の電圧が，振幅をv_0，角振動数をωとして(6.2)式で与えられるとし，そのとき回路に流れる電流が，振幅をi_0，初期位相をϕとして，

$$i = i_0 \sin(\omega t + \phi) \tag{6.3}$$

で与えられるとする。

実効値

交流の電圧や電流は時間tの正弦関数で与えられるため，1 周期Tにわたって平均すると，

$$\bar{v} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T v\,dt = 0\,, \qquad \bar{i} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T i\,dt = 0$$

となる。これでは，どの程度の強さの交流電圧あるいは交流電流なのかがわからない。そこで，２乗平均したものの平方根を**実効値**（effective value）とよび，大きさの目安とする。

(6.2)式で与えられる交流電圧vの実効値$V = \sqrt{\overline{v^2}}$は，

$$\overline{v^2} = \frac{1}{T}\int_0^T v^2 dt = \frac{v_0^2}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t\,dt = \frac{v_0^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt = \frac{1}{2}v_0^2$$

より，$V = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$となる。ここで，$\displaystyle\int_0^T \cos 2\omega t\,dt = 0$を用いた。

(6.3)式で与えられる電流に対しても同様であり，交流電圧と交流電流の実効値V, Iは，それぞれの振幅v_0, i_0を用いて，

$$V = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\,, \qquad I = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \tag{6.4}$$

で与えられる。

抵抗に流れる交流

図 6.3 のように，抵抗Rに交流電圧$v = v_0 \sin\omega t$がかかり，交流電流iが流れる場合，$v = Ri$より，

$$i = \frac{v}{R} = \frac{v_0}{R}\sin\omega t$$

となり，電圧と電流の間に位相差は生じない。このとき，抵抗で消費される電力pは，単位時間あたり抵抗を流れる電流により，電荷が失う電気的位置エネルギーであるから，

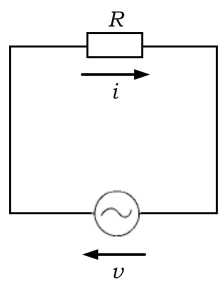

図 6.3

$$p = vi = \frac{v_0^2}{R}\sin^2\omega t$$

となる。1周期にわたる平均の消費電力Pは,

$$P = \frac{v_0^2}{R}\overline{\sin^2\omega t} = \frac{v_0^2}{2R}$$

となり，実効値を用いて表すと,

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

と書ける。

コイルに流れる交流

図 6.4 のように，自己インダクタンスLのコイルに，交流電圧$v = v_0\sin\omega t$がかかったときに流れる電流iを考える。このとき，回路を時計回りに流れる電流を正とする。

電流の正の向きと同じ向きにコイルに生じる誘導起電力は，$-L\dfrac{di}{dt}$と書けるから，回路方程式は,

$$v - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \therefore \quad \frac{di}{dt} = \frac{v_0}{L}\sin\omega t$$

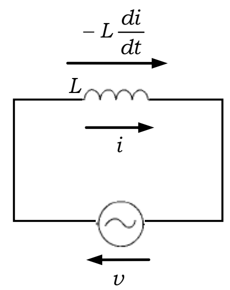

図 6.4

となる。この式の両辺をtで積分する。積分定数をDとして,

$$i = -\frac{v_0}{\omega L}\cos\omega t + D$$

となる。ここで，十分に時間がたったときを考えると，電流は$i = 0$を中心に振動するはずであるから[8]，$D = 0$とおくことができ，電流の表式

$$i = -i_0\cos\omega t = i_0\sin(\omega t - \pi/2) \tag{6.5}$$

を得る。(6.5)式を電圧の式(6.2)と比べると，位相が$\pi/2$だけ遅れていることがわかる。

これは,

「コイルには自己誘導があるため，電圧がかかると少しずつ電流が流れるようになるため」

である。また，電圧と電流の振幅の比v_0/i_0は，実効値の比V/Iに等しく，その比の値は，$i_0 = v_0/(\omega L)$より,

$$X_L = \frac{V}{I} = \frac{v_0}{i_0} = \omega L \tag{6.6}$$

となる。このときのX_Lを**誘導リアクタンス**（inductive reactance）という。

コイルでの消費電力pは,

[8] 厳密には，回路にわずかに電気抵抗があると考えて回路方程式を立て，それを解いて，$t \to \infty$での振る舞いを調べればわかる。このとき，回路方程式は1階の微分方程式となり，解くことができる。その解で，$R \to 0$とすれば，ここで示す式が導かれる。ここでは，そのような数学的な計算は行わない。

$$p = vi = -v_0 i_0 \sin\omega t \cos\omega t = -\frac{1}{2} v_0 i_0 \sin 2\omega t$$

となり，平均の消費電力Pは，

$$P = -\frac{1}{2} v_0 i_0 \overline{\sin 2\omega t} = 0$$

である。すなわち，コイルに蓄えられるエネルギーは，回路に戻ることができ，**コイルでは平均としてエネルギーは消費されない。**

コンデンサーに流れる交流

図 6.5 のように，電気容量Cのコンデンサーに，交流電圧$v = v_0 \sin\omega t$がかかったとき流れる電流i（時計回りに流れる電流を正）を求めよう。コンデンサーに蓄えられる電荷をqとすると，回路方程式は，

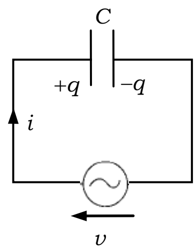

図 6.5

$$v - \frac{q}{C} = 0 \quad \therefore \quad q = Cv = Cv_0 \sin\omega t$$

となり，流れる電流iは，

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega C v_0 \cos\omega t = i_0 \sin(\omega t + \pi/2) \tag{6.7}$$

と書ける。これより，コンデンサーに流れる電流の位相は，電圧より$\pi/2$進むことがわかる。これは，

「コンデンサーに電流が流れて電荷が溜まって電圧がかかるためである」

また，$i_0 = \omega C v_0$より，

$$X_C = \frac{V}{I} = \frac{v_0}{i_0} = \frac{1}{\omega C} \tag{6.8}$$

を，**容量リアクタンス**（capacitive reactance）という。

コンデンサーでの消費電力pは，

$$p = vi = v_0 i_0 \sin\omega t \cos\omega t = \frac{1}{2} v_0 i_0 \sin 2\omega t$$

となり，その平均値Pは，

$$P = \frac{1}{2} v_0 i_0 \overline{\sin 2\omega t} = 0$$

となる。すなわち，コンデンサーに蓄えられるエネルギーも，回路に戻ることができ，**コンデンサーでは平均としてエネルギーは消費されない。**

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

(3)　RLC 直列交流回路

図 6.6 のように，抵抗値Rの抵抗体，自己インダクタンスLのコイル，電気容量Cの

コンデンサー，および角振動数ωの交流電源を直列につないだ回路を考える。回路を接続してから十分に時間がたったとき，回路に時計回り流れる電流を$i = i_0 \sin \omega t$として，この直列回路にかかる電圧vを求めよう[9]。

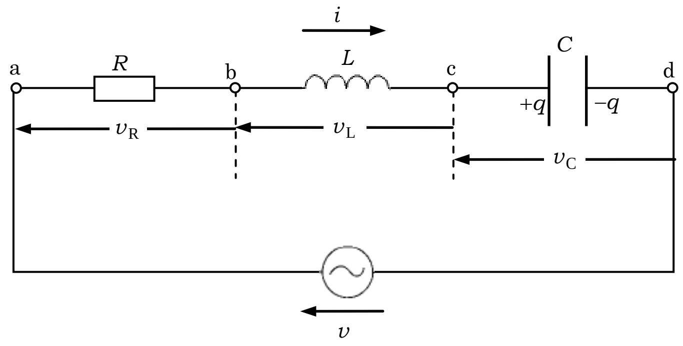

図 6.6

抵抗にかかる電圧（点 b に対する点 a の電位）v_Rは，

$$v_R = Ri = Ri_0 \sin \omega t$$

コイルにかかる電圧（点 c に対する点 b の電位）v_Lは，

$$v_L = L\frac{di}{dt} = \omega L i_0 \cos \omega t$$

コンデンサーにかかる電圧v_Cは，コンデンサーに溜まる電荷を$q = Cv_C$とすると，

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv_C}{dt}, \qquad i = i_0 \sin \omega t$$

となるから，

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_0}{C}\sin \omega t \quad \therefore \quad v_C = -\frac{i_0}{\omega C}\cos \omega t$$

となる[10]。これより，直列回路にかかる電圧（点 d に対する点 a の電位）vは，

$$v = v_R + v_L + v_C = i_0\left[R\sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos \omega t\right]$$

$$= i_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t + \phi), \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}\right)$$

9 直列回路では，時刻tの瞬間，抵抗，コイル，コンデンサーに同位相の電流$i = i_0 \sin \omega t$が流れることに注意しよう。

10 コンデンサーにかかる電圧v_Cは，電流$i = i_0 \sin \omega t$より位相が$\pi/2$遅れ，容量リアクタンスが$1/\omega C$であることから，$v_C = \frac{i_0}{\omega C}\sin(\omega t - \pi/2) = -\frac{i_0}{\omega C}\cos \omega t$と求めてもよい。コイルにかかる電圧も同様である。

と書ける。ここで，電圧と電流の位相差ϕは，

$$\tan\phi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \tag{6.9}$$

で与えられる。

電圧の振幅$v_0 = i_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$と電流の振幅$i_0$の比

$$Z = \frac{v_0}{i_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{6.10}$$

を**インピーダンス**（impedance）という。位相差の式(6.9)とインピーダンスの式(6.10)は，抵抗がない場合は$R=0$，コイルがない場合は$\omega L = 0$，コンデンサーがない場合は$1/\omega C = 0$として，抵抗，コイル，コンデンサーの一部が直列につながれたいろいろな回路に用いることができる。ただし，(6.9)式で$R=0$の場合，$\omega L > 1/\omega C$のとき$\phi = \pi/2$，$\omega L < 1/\omega C$のとき$\phi = -\pi/2$とすればよい。

(4)　交流のベクトル表現

RLC 直列交流回路を，実効値を用いて考えてみよう。

抵抗，コイル，コンデンサーにかかる電圧の実効値を，それぞれ$V_{\mathrm{R}}, V_{\mathrm{L}}, V_{\mathrm{C}}$とし，電流の実効値を$I$とすると，

$$V_{\mathrm{R}} = RI,\quad V_{\mathrm{L}} = \omega LI,\quad V_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\omega C}I \tag{6.11}$$

となる。そのとき，図 6.7 の RLC 直列回路にかかる電圧の実効値Vは，$V_{\mathrm{R}}, V_{\mathrm{L}}, V_{\mathrm{C}}$の和ではない。なぜなら，抵抗，コイル，コンデンサーにかかる電圧の位相が異なるからである。そこで，実効値に位相差を考慮して交流回路を考えるには，大きさがそれぞれの実効値に等しく，偏角が位相を表すベクトルを用いるのが便利である。

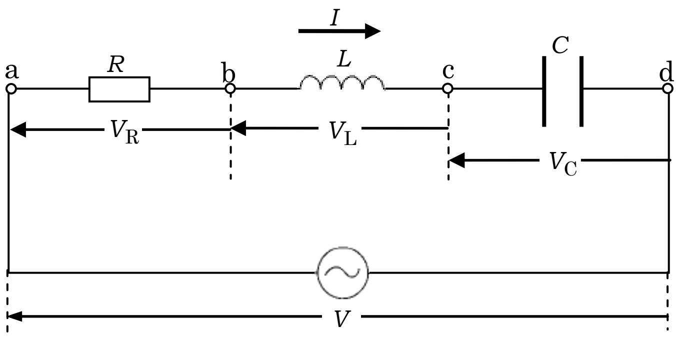

図 6.7

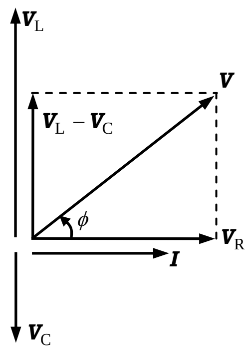

図 6.8

直列回路では，電流はどこでも同位相で流れるから，図 6.8 のように，電流を表すベクトル$\boldsymbol{I}$（$|\boldsymbol{I}|=I$）を水平右向きにとろう。抵抗にかかる電圧v_{R}と電流iは同位相であるから，抵抗にかかる電圧を表すベクトル$\boldsymbol{V}_{\mathrm{R}}$（$|\boldsymbol{V}_{\mathrm{R}}|=V_{\mathrm{R}}$）は$\boldsymbol{I}$と平行である。コイルにかかる電圧$v_{\mathrm{L}}$は電流$i$より位相が$\pi/2$進んでいるから，コイルにかかる電圧を表すベクトル$\boldsymbol{V}_{\mathrm{L}}$（$|\boldsymbol{V}_{\mathrm{L}}|=V_{\mathrm{L}}$）は，$\boldsymbol{I}$より正の向き（反時計回り）に$\pi/2$だけ回転させ，上向きにとる。コンデンサーにかかる電圧v_{C}は，電流iより位相が$\pi/2$遅れているから，コンデンサーにかかる電圧を表すベクトル$\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}}$（$|\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}}|=V_{\mathrm{C}}$）は，$\boldsymbol{I}$より負の向き（時計回り）に$\pi/2$だけ回転させ，下向きにとる。そのとき，直列回路にかかる電圧を表すベクトル$\boldsymbol{V}$は，

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_{\mathrm{R}}+\boldsymbol{V}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}}$$

となり，その大きさ，すなわち，回路にかかる電圧の実効値Vは(6.11)式を用いて，

$$V=\sqrt{V_{\mathrm{R}}^2+(V_{\mathrm{L}}-V_{\mathrm{C}})^2}=I\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

と書ける。ここで，$V=IZ$とおいて，インピーダンスZの表式(6.10)を得る。

位相差ϕは，ベクトル$\boldsymbol{V}$と$\boldsymbol{I}$のなす角であり，$\tan\phi=\dfrac{V_{\mathrm{L}}-V_{\mathrm{C}}}{R}$より(6.9)式を得る。

最後に，交流回路の消費電力を考える。コイルとコンデンサーでは平均として電力は

消費されないので，RLC 直列回路での平均の消費電力Pは，

$$P = RI^2 = V_R I = (V\cos\phi)I = VI\cos\phi$$

となる。ここで，$\cos\phi$を**力率**（power factor）という。

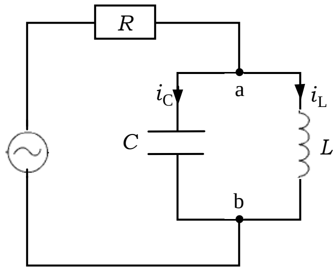

図 6.9

例題 6.2　並列共振回路

図 6.9 のように，自己インダクタンスLのコイルと電気容量Cのコンデンサーを並列につなぎ，それに抵抗値Rの抵抗体と内部抵抗の無視できる交流電源を直列につないだ回路を考える。この回路を接続してから十分に時間がたったとき，点 b に対する点 a の電位が$v_0 \sin\omega t$で与えられるとする。抵抗体に流れる電流が 0 になる角振動数ωを求め，そのときの交流電源の起電力vを求めよ。

【解答】

コイルおよびコンデンサーに流れる電流i_L, i_Cは，

$$i_L = \frac{v_0}{\omega L}\sin(\omega t - \pi/2) = -\frac{v_0}{\omega L}\cos\omega t$$

$$i_C = \frac{v_0}{1/\omega C}\sin(\omega t + \pi/2) = \omega C v_0 \cos\omega t$$

となるから，抵抗体を流れる電流i_Rは，

$$i_R = i_L + i_C = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) v_0 \cos\omega t$$

である。したがって，$i_R \equiv 0$となる条件は，振幅が 0 になることであり，

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \qquad \therefore \quad \underline{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

このとき，抵抗体にかかる電圧は$v_R = 0$であるから，交流電源の起電力vは，

$$\underline{v = v_0 \sin\omega t}$$ ■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

(5)　変圧器

相互誘導を利用して交流の電圧を変化させる装置を**変圧器**（transformer）という。

図 6.10 のように，太さがどこでも同じ長方形をなした鉄心に，内部抵抗の無視できる起電力v_1の交流電源を接続したN_1回巻きの 1 次コイルと，負荷Z（抵抗，コイル，コンデンサーなどからなる）を接続したN_2回巻きの 2 次コイルを巻く。鉄心内の磁束Φは外にもれないとする。1 次コイル側の回路での回路方程式および 2 次コイルでの誘導起電

力 v_2 はそれぞれ，

$$v_1 - N_1\frac{d\Phi}{dt} = 0\,, \qquad v_2 = -N_2\frac{d\Phi}{dt}$$

と書ける。１次コイル側電源電圧 v_1 の実効値を V_1，２次コイルでの起電力の実効値を V_2 とすると，上式より，$\dfrac{v_1}{v_2} = -\dfrac{N_1}{N_2}$ となるから，

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \tag{6.12}$$

が成り立つ。

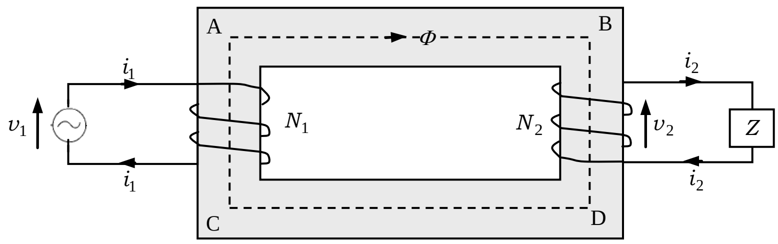

図 6.10

変圧器でのエネルギー保存則と送電線での電力輸送

図 6.10 の１次コイルに流れる電流の実効値を I_1，２次コイルに流れる電流を I_2 とすると，変圧器でのエネルギー損失がなければ，

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

が成り立つ。そこで，図 6.11 のように，発電所での電力の実効値を $P = V_1 I_1 = V_2 I_2$，送電線の電気抵抗を R とすると送電線での消費電力の実効値は $P_\mathrm{R} = RI_2^2$ であるから，

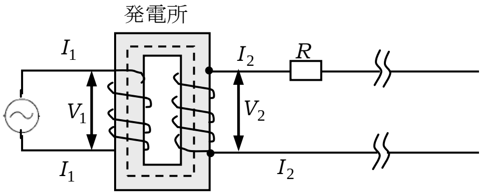

図 6.11

$$\frac{P_\mathrm{R}}{P} = \frac{RI_2^2}{V_2 I_2} = \frac{RV_2 I_2}{V_2^2} = \frac{RP}{V_2^2}$$

となる。これより，発電所の変圧器の２次コイルに発生する電圧 V_2 をできるだけ大きくして送電した方が，送電線でのエネルギー損失の割合を小さくすることができることがわかる。

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

6.2　電気振動

起電力Vの直流電源，極板 A, B からなる電気容量Cのコンデンサー，自己インダクタンスLのコイル，抵抗体 R，スイッチ S_1, S_2 を用いて図 6.12 のような回路をつくる。抵抗体以外の電気抵抗は無視できるとする。まず，スイッチ S_2 を開いたまま S_1 を閉じて，コンデンサーに電荷$Q = CV$を蓄える。次に，S_1 を開き，時刻$t = 0$に S_2 を閉じると，図 6.13 に示すような振動電流が回路に流れる。このような回路に流れる電流の振動を**電気振動**（electric oscillation）という。

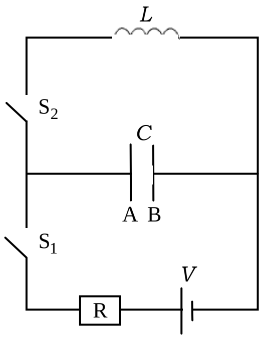

図 6.12

この現象は，回路方程式をつくることにより調べることができる。

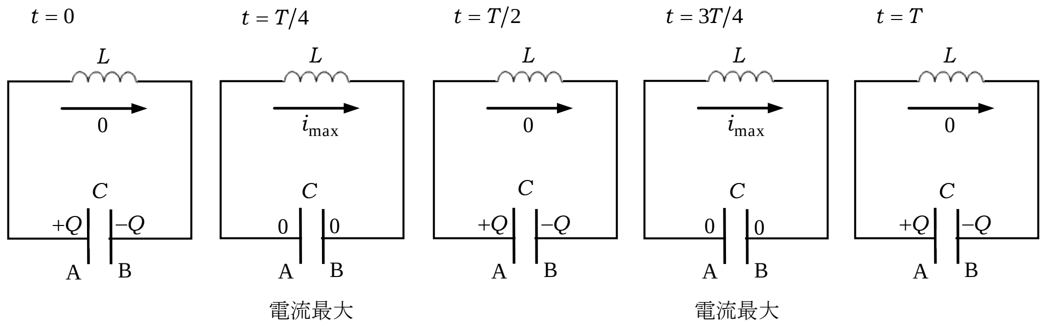

図 6.13

回路方程式

図 6.14 のように，任意の時刻$t > 0$において，コンデンサーの極板 A に電荷$-q$，極板 B にqが溜まっており，コイルに電流iが右向きに流れているとする。このとき回路方程式は，

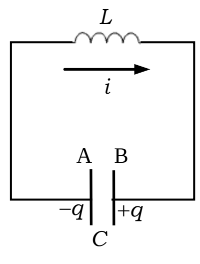

図 6.14

$$\frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}$$

であり，電流iが流れると電荷qが増加するので，$i = \dfrac{dq}{dt}$が成り立つ。

よって，

$$L\frac{di}{dt} = -\frac{1}{C}q \quad \Leftrightarrow \quad L\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{C}q \tag{6.13}$$

となる。この微分方程式は，質量mの質点に，$x = 0$からの変位に比例する復元力$-kx$（k：定数）が作用するとき，質点の単振動を表す運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

と同形である。このとき，各物理量の間の対応関係は，

$$q \leftrightarrow x, \quad i = \frac{dq}{dt} \leftrightarrow v = \frac{dx}{dt}, \quad L \leftrightarrow m, \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow k$$

となる。これより，(6.13)式を満たす電荷qは，$q=0$を中心に単振動をし，その角振動数ωと周期Tは，

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} \tag{6.14}$$

である。

図 6.12 に戻って考えよう。

時刻$t=0$に S_2 を閉じた瞬間，コンデンサーの極板 A には電荷Qが溜まっており，それまでコイルに電流は流れていなかったので，$i=0$である。このことから，回路方程式の初期条件は「$t=0$のとき，$q=-Q$，$i=\dfrac{dq}{dt}=0$」と書ける。これより，(6.13)式の解，すなわち，時刻tにおける電荷qと電流iは，

$$q = -Q\cos\omega t, \quad i = \frac{dq}{dt} = \omega Q \sin\omega t$$

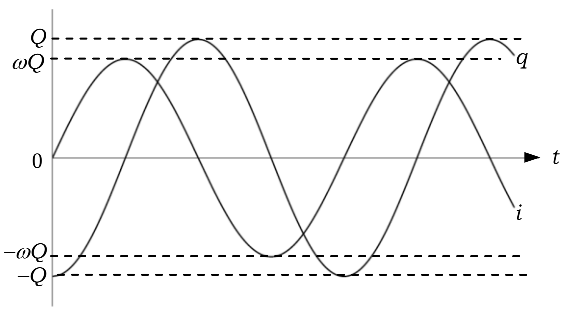

図 6.15

となる（図 6.15)。こうして，回路には図 6.13 に示されたような振動電流が流れることがわかる。

エネルギー保存則

電気抵抗がなく，コンデンサーとコイルだけで電気振動が生じているとき，エネルギーは失われず，エネルギー保存則が成り立つ。この関係は，回路方程式を積分することにより導かれる。これは，単振動のエネルギー保存則を導くことと同様である。

(6.13)式の両辺に$i=\dfrac{dq}{dt}$をかけてtで積分する。

$$\int Li\frac{di}{dt}dt = -\int \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}dt \quad \to \quad \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = E \text{（一定値）}$$

すなわち，コイルの磁気エネルギーとコンデンサーの静電エネルギーの和は一定に保たれ，エネルギーは，コイルとコンデンサーの間で行き来する。したがって，時刻$t=0$において，コンデンサーに電荷Qが溜まり，コイルに電流が流れていない。，その後，コイルに最大電流i_{max}が流れるとき，コンデンサーの電荷は 0 となるから，電流i_{max}は，エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}Li_{\max}^2 = \frac{Q^2}{2C} \qquad \therefore \quad i_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{LC}}$$

と，簡単に求めることができる。

例題 6.3　振動回路

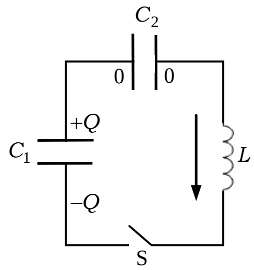

図 6.16

電気容量C_1, C_2の２つのコンデンサー1，2 と自己インダクタンスLのコイル，スイッチ S を用いて図 6.16 のような回路をつくる。はじめコンデンサー1 に電荷Qを与え，コンデンサー2 に電荷は与えられていない。また，スイッチ S は開かれてコイルに電流は流れていない。この状態で時刻$t=0$にスイッチ S を閉じた。その後，回路に流れる振動電流の周期Tと，時刻tにコイルに流れる電流i（図の矢印の向きを正とする）を求めよ。

【解答】

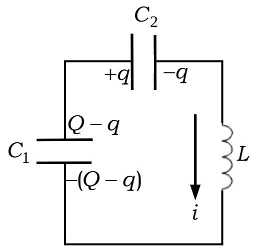

図 6.17

時刻tに，コンデンサー２の左側の極板に溜まる電荷をq，図 6.17 のように，コイルを下向きに流れる電流をiとすると，回路方程式は，

$$\frac{Q-q}{C_1} = \frac{q}{C_2} + L\frac{di}{dt} \quad \to \quad L\frac{di}{dt} = \frac{1}{C_0}\left(\frac{C_0}{C_1}Q - q\right)$$

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

と書ける。これより，コンデンサーの電荷qは，$q_0 = \frac{C_0}{C_1}Q = \frac{C_2}{C_1+C_2}Q$を中心に，角振動数

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}$$

の電気振動をする。これより，振動の周期Tは，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC_0} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{LC_1C_2}{C_1+C_2}}}$$

ここで，回路の電気振動の角振動数ωと周期Tは，２つのコンデンサーを直列接続したときの合成容量C_0を用いて与えられることに注意しよう。

初期条件「$t=0$のとき，$q=0$，$i=\frac{dq}{dt}=0$」より，$q = q_0(1-\cos\omega t)$となるから，

$$i=\frac{dq}{dt}=\omega q_0\sin\omega t=\underline{Q\sqrt{\frac{C_2}{LC_1(C_1+C_2)}}\sin\left(\sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}\ t\right)}$$ ■

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

第７章　電磁波の発生

【発展】☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

7.1　マクスウェル - アンペールの法則

4.2 節で，積分形式のアンペールの法則を学んだが，この法則は，さらに一般化されるべきであることを，マクスウェル（J.C.Maxwell）が指摘した。

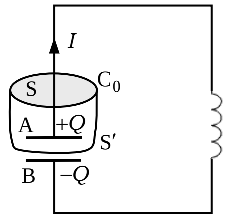

図 7.1

図 7.1 のように，真空中に置かれたコンデンサーとコイルの電気振動回路において，ある瞬間，コンデンサーの極板 A に電荷Qが溜まり，A から電流Iが流れ出しているとしよう。極板 A の上側の導線の周囲の閉曲線 C_0 と C_0で囲まれ，導線によって貫かれた曲面 S を考え，ここにアンペールの法則を適用する。真空の透磁率を μ_0 として磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を用いると，アンペールの法則(4.19)は，

$$\int_{C_0} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I \tag{7.1}$$

となる。ここで，閉曲線 C_0 では囲まれているが，導線では貫かれず，コンデンサーの極板 A, B の間を通る曲面S' をとると，S' を貫く電流はゼロである。この場合，アンペールの法則は，

$$\int_{C_0} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

となってしまい，(7.1)式に一致しない。

電荷保存則と変位電流

電荷は保存するので，曲面 S とS' で囲まれた領域 V に電流I が流れ出すと，その分だけ電荷は減少するから，

$$I + \frac{dQ}{dt} = 0 \tag{7.2}$$

が成り立つ。

ガウスの法則より，極板 A 上の電荷Qは，領域 V から外へ出る電気力線の総数に真空の誘電率ε_0をかけた量に等しいから，電場の面積分を用いて（2.1 節(3)参照），

$$Q = \varepsilon_0 \int_{S} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} + \varepsilon_0 \int_{S'} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{7.3}$$

と書ける。ここで，$d\boldsymbol{S}$ は領域 V から外向きのベクトルであることに注意しよう。そこで，面S' について内向きのベクトル$d\boldsymbol{S}' = -d\boldsymbol{S}$を用いて(7.3)式を(7.2)式に代入すると，

$$I + \varepsilon_0 \int_{S} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 \int_{S'} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}' \tag{7.4}$$

となる。いま，$\varepsilon_0 \int_{S} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}$ を仮想電流と考えて真電流I と仮想電流の和を全電流とする

と，(7.4)式は，領域Vに入る全電流とVから出る全電流は等しいことを示している。こうして，仮想電流を加えた全電流を用いてアンペールの法則を書けば，アンペールの法則は面Sの取り方によらず成り立つ。このような仮想電流を加えた

$$\int_{C_0} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0\int_S \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}\right) \tag{7.5}$$

を，**マクスウェル - アンペールの法則**（Maxwell-Ampere's law）という。このときの仮想電流はマクスウェルによって導入されたもので，**変位電流**（displacement current）とよばれる。変位電流は電場の時間変化率によって与えられ，(7.5)式は，電場が時間的に変動すると，それは電流と同じ役割をし，その周囲に磁場を伴うことを示している。

7.2　平面波

積分形式の電磁誘導の法則(5.4)とマクスウェル - アンペールの法則(7.5)を用いて，平面波の式を導こう。

図7.2のように，コンデンサーに電荷が溜まり，導線に電流が流れている状態を考えて，そこに電磁誘導の法則とマクスウェル - アンペールの法則を適用しよう。導線に沿って上向きにx軸，手前の向きにy軸，右向きにz軸をとる。このとき，極板間には$+x$方向に電場ができ，電場の強さが強くなっているので，極板間には変位電流が$+x$方向に流れていると考えられる。このとき，マクスウェル - アンペールの法則によりy方向に磁場が生じる。この磁場も時間的に変化するため，電磁誘導の法則によりx方向に電場が生じる。こうして電場と磁場が発生し，電場と磁場の波となってz方向に伝わる。この状況を，(5.4)式と(7.5)式を用いて定量的に調べてみよう。

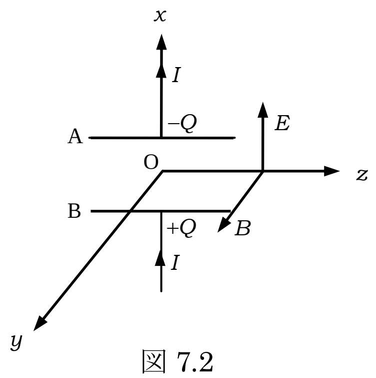

図 7.2

ここでは，簡単のため，$+z$方向に伝わる平面波としての**電磁波**（electromagnetic wave）を考察する。そこで，ある時刻で見たとき，電場も磁場もz方向には変化しているが，x, y方向には一様であるとする。図7.3のように，z軸上に底辺をもち，$x-z$平面上に微小な長方形PQQ′P′，$y-z$平面上にPP″Q″Qをとり，$\mathrm{PP'}=\Delta x$，$\mathrm{PP''}=\Delta y$，$\mathrm{PQ}=\Delta z$とする。

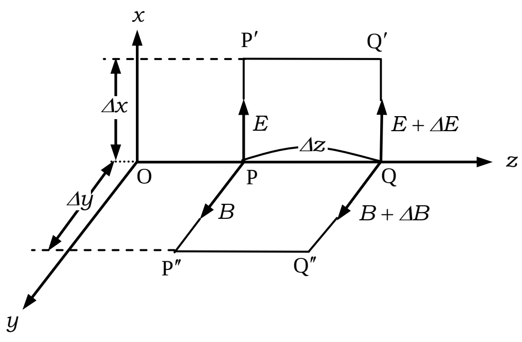

図 7.3

まず，点 P の$+x$方向の電場をE，点 Q の$+x$方向の電場を$E+\Delta E$として経路$\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{Q'}\to\mathrm{P'}\to\mathrm{P}$に積分形の電磁誘導の法則(5.4)を適用する。電場はx方向を向きz軸に垂直と考えているので，経路$\mathrm{P}\to\mathrm{Q}$と$\mathrm{Q'}\to\mathrm{P'}$での線積分は 0（なぜなら，内積

$\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$）であることに注意すると，(5.4)式は，

$$(E + \Delta E)\Delta x - E\Delta x = -\frac{\partial B}{\partial t}\Delta x\Delta z$$

となる。ここで，両辺を $\Delta x\Delta z$ でわり，$\Delta z \to 0$ として，

$$\frac{\Delta E}{\Delta z} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \to \quad \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{7.6}$$

を得る。この式は，磁場が時間的に変化するとき，空間的に変動する電場が伴うことを示している。

こうして生じた電場 E は時間的に変化する。そこで次に，経路 $\mathrm{P} \to \mathrm{P}'' \to \mathrm{Q}'' \to \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ に積分形のマクスウェル - アンペールの法則を適用する。いま真電流は $I = 0$ である。磁場は y 方向を向いているとして，点 P での磁束密度を B，点 Q での磁束密度を $B + \Delta B$ とすると，(7.5)式は，

$$B\Delta y - (B + \Delta B)\Delta y = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\Delta y\Delta z$$

となる。ここで，両辺を $\Delta y\Delta z$ でわり $\Delta z \to 0$ として，

$$\frac{\partial B}{\partial z} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} \tag{7.7}$$

を得る。この式は，電場が時間的に変化するとき，空間的に変動する磁場を伴うことを示している。

7.3　電磁波

最後に電磁波を考えるために，波動方程式とよばれる微分方程式ついて説明しておこう。

波動方程式

時刻 $t = 0$ における波形が $y = f(x)$ で表され，速さ v で x 軸正方向に伝わる波を考えよう。時刻 t において，波形は x 方向に距離 vt だけ動くから，時刻 t における波形の式は，$t = 0$ の式を x 方向に vt だけ平行移動した式，つまり $y = f(x - vt)$ で表される。一方，時刻 $t = 0$ における波形が $y = f(x)$ で表される波が，速さ v で x 軸負方向に伝わるとき，時刻 t における波形の式は，$y = f(x + vt)$ で表される。

一般に，x 軸正方向と負方向に同じ速さ v で伝わる異なる波形の波が同時に存在するとき，位置 x で時刻 t における波形は，重ね合わせの原理より，

$$y = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{7.8}$$

と書ける。ここで，$s_+ = x - vt$，$s_- = x + vt$ とおき，$\dfrac{df}{ds_+} = f'$，$\dfrac{dg}{ds_-} = g'$ と書くことにすると，合成関数の微分を用いて，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'', \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -vf', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 f''$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g', \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = g'', \quad \frac{\partial g}{\partial t} = v g', \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = v^2 g''$$

となるから，(7.8)式を x と t で 2 回ずつ偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{7.9}$$

となる。(7.9)式を**波動方程式**（wave equation）という。

電磁波の方程式

さて，(7.6)式の両辺を z で微分し，(7.7)式の両辺を t で微分して $\frac{\partial^2 B}{\partial z \partial t}$ を消去すると，

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \tag{7.10}$$

同様に，(7.7)式の両辺を z で微分し，(7.6)式の両辺を t で微分して $\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t}$ を消去すると，

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \tag{7.11}$$

となる。これらを(7.9)式と比較すると，電場 E と磁束密度 B が速さ $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ で波として z 方向に伝わることがわかる。

例えば，電場 E が振幅 E_0，角振動数 ω の正弦波として，

$$E = E_0 \sin\left\{\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right\}$$

と表されるとする。これを(7.7)式に代入すると，

$$\frac{\partial B}{\partial z} = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega E_0 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right\}$$

となる。さらに上式を z で積分する。積分定数を 0 とおき（B は 0 を中心に振動する），$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ を用いて，

$$B = \varepsilon_0 \mu_0 c E_0 \sin\left\{\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right\} \qquad \therefore \quad B = \frac{1}{c} E \tag{7.12}$$

を得る。(7.12)式は，電場と磁場が同位相で振動することを表している。こうして進行する電磁波は，図 7.4 のように表される。

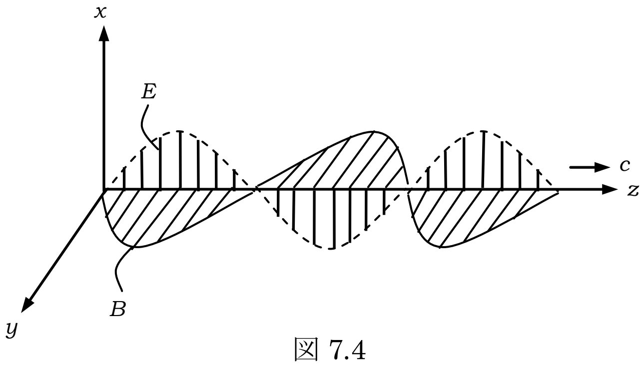

図 7.4

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆【発展終】

いろいろな電磁波

知られている真空の誘電率 $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ F/m , 真空の透磁率 $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m を用いると，真空中の電磁波の速さ c は,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.998\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

となり，観測されている真空中の光速に一致する。このことから，マクスウェルは，光は特別な波長をもつ電磁波であると考えた。

その後，いろいろな電磁波が発見され，それらの波長領域は，図 7.5 のように与えられることが分かっている。

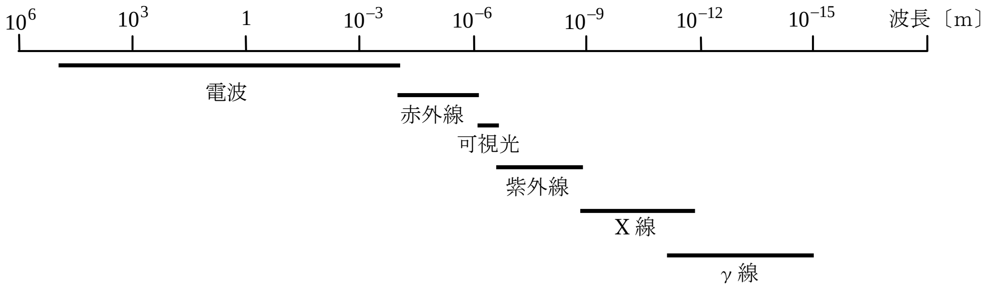

図 7.5

数学公式

1．三角関数（以下，複号同順とする）

(1)　一般角：

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\quad \cos(-\theta)=\cos\theta,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\sin\theta,$$

$$\sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta,\quad \cos(\pi\pm\theta)=-\cos\theta$$

(2)　加法定理：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

(3)　２倍角の公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

(4)　合成公式

$$a\cos\theta\pm b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta\mp\phi),\quad \tan\phi=\frac{b}{a}$$

(5)　和積公式：

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

(6)　三角関数と図形（図１）

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

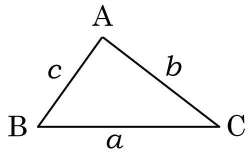

図１

2．微分法

(1)　微分公式：y, z を x の関数とし，a, b は定数とする。

(a)　$(ay+bz)'=ay'+bz'$　　(b)　$(yz)'=y'z+yz'$

(c)　$\left(\dfrac{y}{z}\right)'=\dfrac{y'z-yz'}{z^2}$

(d)　合成関数の導関数

$$y=y(x),\quad x=x(t) \text{ のとき，}\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

(2)　**初等関数の導関数**：

(a)　$(x^a)'=ax^{a-1}$　　(b)　$(e^x)'=e^x$　　(c)　$(a^x)'=a^x\log a$

(d)　$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$　　(e)　$(\sin x)'=\cos x$　　(f)　$(\cos x)'=-\sin x$

(g)　$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(3)　**ベキ級数展開**：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

(a)　$(1+x)^a=1+ax+\dfrac{1}{2}a(a-1)x^2+\cdots\quad(|x|<1)$

(b)　$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

(c)　$\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\leqq 1)$

(d)　$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(e)　$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(f)　$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\cdots\quad\left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$

３．積分法

(1)　**積分公式**：a, b は定数とする。

(a)　$\displaystyle\int[af(x)+bg(x)]dx=a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx$

(b)　置換積分　x が t の関数であるとき，$\displaystyle\int f(x)\frac{dx}{dt}dt=\int f(x)dx$

(c)　部分積分　　$\displaystyle\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

(2)　**不定積分**：a は定数とし，積分定数を省く。

(a)　$\displaystyle\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} \quad (a \neq -1)$　　(2)　$\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$

(c)　$\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x$　　(d)　$\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x$

(e)　$\displaystyle\int \tan x\, dx = -\log|\cos x|$