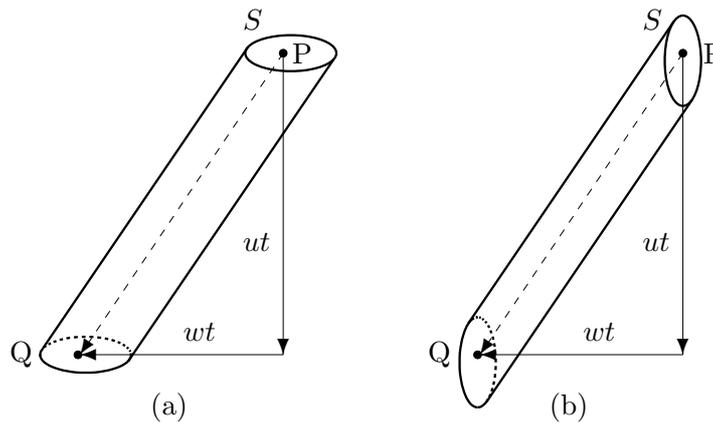


--	--	--

問 1

5 点

- (a) ある時刻に図 (a) の立体図形の上底にあった雨粒は、時間 t の後に下底にくる。したがってこの間に上底を通過した雨粒はこの立体図形の中にある。この立体図形の体積は Sut だから、その中の雨粒の子数は $nSut$ である。
- (b) 図 (b) の立体図形の体積は $S|w|t$ であるから、その中の雨粒の数は $nS|w|t$ である。



図は $w > 0$ の場合

問 2

5 点

横断に要する時間を t とする。 $D = vt$ である。円柱の側面の断面積は $2HR$ であるから、側面にあたる雨粒の数は

$$2HR \times |v + w|t \times n = 2nHR|v + w|t = 2nHRD \left| 1 + \frac{w}{v} \right|$$

側面にあたる雨粒の数は

$2nHRD \left 1 + \frac{w}{v} \right $
--

問 3

5 点

- (1) 風のないときは v に依存しないから、歩いても走っても変わらない。
- (2) 向かい風 ($w > 0$) のときは v が大きいほどかかる雨粒の数は小さくなるので、速く走った方がよい。
- (3) 追い風 ($w < 0$) のときには $v = |w|$ で進むと側面は濡れないですむ。

解答合計

点

--	--	--

問 4

5 点

円柱の上面の面積は πR^2 で、そこにかかる雨粒の数は $\pi n R^2 u t = \pi n R^2 D \frac{u}{v}$ であるから、体全体にかかる雨粒の総数は

$$2nHRD \left| 1 + \frac{w}{v} \right| + \pi n R^2 D \frac{u}{v}$$

体全体にかかる雨粒の総数は

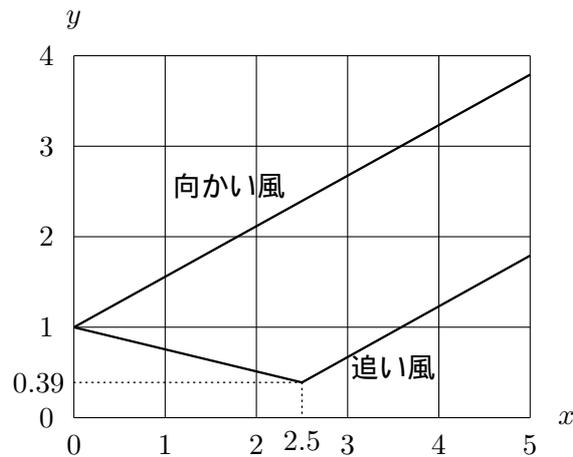
$$2nHRD \left| 1 + \frac{w}{v} \right| + \pi n R^2 D \frac{u}{v}$$

問 5

5 点

前問の結果を $2nHRD$ で割って $y = \left| 1 + \frac{w}{v} \right| + \frac{\pi R}{2H} \frac{u}{v}$ である。 $\frac{R}{H} = 0.1$, $\frac{w}{u} = \pm 0.4$ を代入して

$$y = \left| 1 \pm 0.4 \frac{u}{v} \right| + \frac{\pi}{20} \frac{u}{v} = |1 \pm 0.4x| + 0.1571x$$



問 6

5 点

あたる雨粒の数をできるだけ少なくするには

- 1) 風がないか、向かい風の場合にはできるだけ速く走るとよい。
- 2) 追い風の場合、

風速が速くなければ、すなわち $|w| < \frac{\pi R u}{2H}$ ならばできるだけ速く走るのがよい。

風速が $|w| > \frac{\pi R u}{2H}$ ならば $v = |w|$ で移動するのがよい。

解答合計

点

--	--	--	--

問 1

5 点

摩擦力 μMg が重心の運動方向とは逆向きに作用するので、重心の運動方程式は

$$M \frac{dv}{dt} = -\mu Mg$$

なお、この式が導かれていれば、解答枠内は $\frac{dv}{dt} = -\mu g$ でもよい。

フープの重心の運動方程式

$$M \frac{dv}{dt} = -\mu Mg$$

問 2

6 点

床との接点に作用する摩擦力 μMg は回転の角速度を減少させる向きで、重心のまわりの力のモーメントの大きさは μMgR 、慣性モーメントは $I = MR^2$ である。したがって回転の運動方程式は

$$MR^2 \frac{d\omega}{dt} = -\mu MgR$$

なお、この式が導かれていれば、 $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\mu g}{R}$ あるいは $R \frac{d\omega}{dt} = -\mu g$ でもよい。

慣性モーメント $I =$

$$MR^2$$

, 回転の運動方程式

$$MR^2 \frac{d\omega}{dt} = -\mu MgR$$

問 3

6 点

重心の運動方程式は、初速度 v_0 、加速度 $\frac{dv}{dt} = -\mu g$ の等加速度運動であるので、解は、 $v = -\mu g t + v_0$ となる。

回転の運動方程式の ω についても同様に考えると、最初の角速度は ω_0 、 $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\mu g}{R}$ (=一定) であるので、 $\omega = -\frac{\mu g t}{R} + \omega_0$ となる。

$$v(t) =$$

$$-\mu g t + v_0$$

$$, \omega(t) =$$

$$-\frac{\mu g t}{R} + \omega_0$$

問 4

4 点

重心の速さが v 、重心のまわりに角速度 ω で回転しているので $u = v + R\omega$

$$u =$$

$$v + R\omega$$

解答合計

点

--	--	--	--

問 5

6 点

フープの重心の速度 v が 0 になったときの時刻 t_1 は $0 = -\mu g t_1 + v_0$ より, $t_1 = \frac{v_0}{\mu g}$ となる。

時刻 t での重心の位置は $x = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2$ で与えられるので, 時刻 t_1 までに重心の進んだ距離は $l = \frac{v_0^2}{2\mu g}$ となる。

$$t_1 = \boxed{\frac{v_0}{\mu g}}, \quad l = \boxed{\frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

問 6

7 点

時刻 t_2 で $v = -R\omega$ が成り立つことより $-\mu g t_2 + v_0 = -R\left(\frac{-\mu g t_2}{R} + \omega_0\right)$

この式を解いて $t_2 = \frac{v_0 + R\omega_0}{2\mu g}$ を得る。このときの速度は $v_2 = -\mu g t_2 + v_0 = \frac{v_0 - R\omega_0}{2}$ となる。

また, フープが左に転がるためには, $v_2 < 0$ でなければならないので, 条件は, $v_0 < R\omega_0$ となる。

[別解]

左向きになるのは, $\omega = 0$ となる時刻 $\frac{R\omega_0}{\mu g}$ より, $v = 0$ となる時刻 $\frac{v_0}{\mu g}$ の方が早い場合だから,

$\frac{v_0}{\mu g} < \frac{R\omega_0}{\mu g}$, すなわち, $v_0 < R\omega_0$ 。

$$t_2 = \boxed{\frac{v_0 + R\omega_0}{2\mu g}}, \quad v_2 = \boxed{\frac{v_0 - R\omega_0}{2}}$$

フープが左向きに動き出す条件

$$v_0 < R\omega_0$$

問 7

6 点

$R = 0.4 \text{ m}$, $\mu g = 2.0 \text{ m/s}^2$ であるので, $t_1 = \frac{v_0}{2.0 \text{ m/s}^2} = 1.0 \text{ s}$, $t_2 = \frac{v_0 + R\omega_0}{2 \times 2.0 \text{ m/s}^2} = 1.5 \text{ s}$ より,

$v_0 = 2.0 \text{ m/s}$, $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ となる。

$$\omega_0 = \boxed{10} \text{ rad/s}, \quad v_0 = \boxed{2.0} \text{ m/s}$$

解答合計

点

--	--	--

問 1

6 点

内部エネルギーとは、分子系の力学的エネルギーの総和のことである。今の場合、全ての分子は運動エネルギーを持たず、 N_c 個の結晶分子がそれぞれ $-\mu$ という位置エネルギーを持つから、内部エネルギーは $-\mu N_c$ 。

問 2

6 点

結晶の外の空間にあるセルの数は $(V - N_c)$ でそこに $(N - N_c)$ 個の分子を配置する仕方は

$$W = \frac{(V - N_c)!}{(V - N)! (N - N_c)!} \text{ 通り}$$

あるから、これを (3) 式の右辺に代入して、問題の式を得る。

問 3

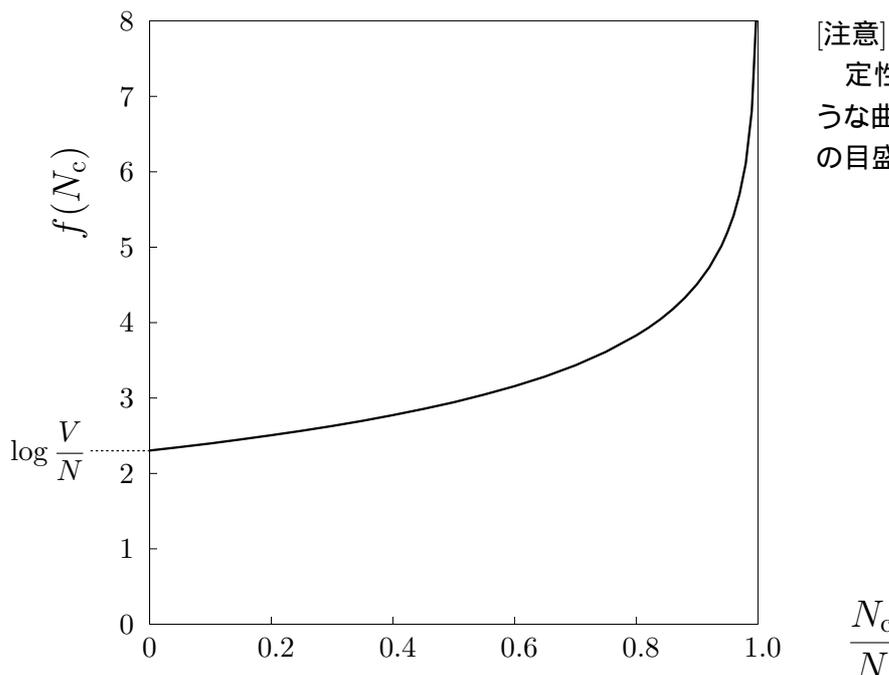
8 点

(2) 式に (1) 式と (4) 式を代入して N_c で微分すると

$$\frac{dF(N_c)}{dN_c} = k_B T \left(-\frac{\mu}{k_B T} + \log \frac{V - N_c}{N - N_c} \right)$$

となるから、 $f(N_c) = \log \frac{V - N_c}{N - N_c} = \log \frac{\frac{V}{N} - \frac{N_c}{N}}{1 - \frac{N_c}{N}}$ であり、 $V > N$ なので、仮に $\frac{V}{N} = 10$ とすると

以下のグラフを得る。



[注意]

定性的に左のグラフのような曲線であればよい。縦軸の目盛は参考までのもの。

解答合計

点

--	--	--	--

問4

8点

$$\frac{dF(N_c)}{dN_c} = k_B T \left(-\frac{\mu}{k_B T} + f(N_c) \right) = 0$$

より $\frac{dF}{dN_c} = 0$ となる N_c^* は、2つの N_c の関数

$$y = \frac{\mu}{k_B T} \quad \text{および} \quad y = f(N_c) = \log \frac{V - N_c}{N - N_c}$$

の交点から決定される。

グラフより、

$$N_c > N_c^* \text{ のとき, } f(N_c) > \frac{\mu}{k_B T} \text{ であり, } \frac{dF}{dN_c} > 0,$$

$$N_c < N_c^* \text{ のとき, } f(N_c) < \frac{\mu}{k_B T} \text{ であり, } \frac{dF}{dN_c} < 0$$

であるから、 $N_c = N_c^*$ は $f(N_c)$ の最小値を与える。

または、もう一度微分して

$$\frac{d^2 F(N_c)}{dN_c^2} = k_B T \left(\frac{1}{N_c - V} - \frac{1}{N_c - N} \right) = k_B T \frac{V - N}{(V - N_c)(N - N_c)}$$

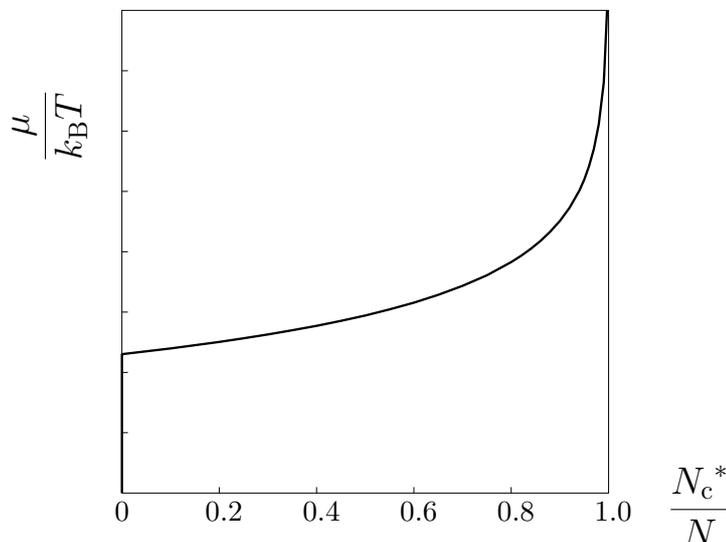
$V > N > N_c$ だから、この最右辺は正。したがって、 $F(N_c)$ のグラフは下に凸なので、 $F(N_c)$ は $N_c = N_c^*$ で極小値を持つ。

問5

8点

問3のグラフの縦軸を $\frac{\mu}{k_B T}$ とすれば、 $\frac{\mu}{k_B T}$ の関数として N_c^* が得られる。グラフは下図のようになる。

グラフから $\frac{\mu}{k_B T}$ が減少すると、結晶の分子数 N_c^* も減少し、 $\frac{\mu}{k_B T} \leq \log \frac{V}{N}$ のときには結晶は昇華し、存在しなくなる。



解答合計

点

--	--	--

問 6

6 点

問 5 より, $\frac{\mu}{k_B T} \leq \log \frac{V}{N}$ のとき, 平衡結晶は存在しないことから, $T_0 = \frac{\mu}{k_B \log \frac{V}{N}}$ である。

次に $k_B T_0 = \frac{\mu}{\log \frac{V}{N}}$ であるから, V が N に比べて非常に大きい場合, $\log \frac{V}{N}$ は 1 に比べてかなり大きいので, $k_B T_0$ は μ に比べてかなり小さい。

$$T_0 = \frac{\mu}{k_B \log \frac{V}{N}}$$

問 7

6 点

$\theta = 0$ のとき, 格子間隔 a あたり 1 つの結合を切るから表面張力は $\gamma(0) = \frac{\varepsilon}{a}$ となる。

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, $2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} a$ ごとに 2 つの結合を切るから表面張力は $\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\varepsilon}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} a} = \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{a}$ となる。

$$\gamma(0) = \frac{\varepsilon}{a}, \quad \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{a}$$

問 8

6 点

$\tan \theta = \frac{M}{N}$ (M, N は自然数) のとき, x 軸方向に M 本の結合を切り, y 軸方向に N 本の結合を切るから, 表面張力は $\gamma(\theta) = \frac{\varepsilon(M+N)}{a\sqrt{M^2+N^2}} = \frac{\varepsilon}{a}(\cos \theta + \sin \theta)$ となる。

解答合計

点

--	--	--	--

問 9

20 点

- (a) 図の三角形の高さは $h = l \sin \theta = L \sin \frac{\pi}{4}$ (L は三角形の左の斜辺の長さ)。底面の長さは $l \cos \theta + L \cos \frac{\pi}{4} = l \cos \theta + l \sin \theta \cot \frac{\pi}{4} = l(\cos \theta + \sin \theta)$ であるから、三角形の面積は

$$S = \frac{1}{2} l^2 \sin \theta (\cos \theta + \sin \theta)$$

$$S = \frac{1}{2} l^2 \sin \theta (\cos \theta + \sin \theta)$$

- (b) S が一定の条件の下に E を最小化する問題では、 l, θ が変化するが、 S が一定の条件により、 l と θ の間に関係が生じる。ここで、 $E = \varepsilon \frac{l}{a} (\cos \theta + \sin \theta)$ であるから、

$$\frac{E^2}{S} = 2 \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^2 \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta}$$

を考えると、 l が消去され、 S が一定であるから、 E の最小化問題は $\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta}$ の最小化問題に帰着される。

- (c)

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{E^2}{S} \right) \propto \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{d}{d\theta} (1 + \cot \theta) = -\frac{1}{\sin^2 \theta} < 0$$

であるから、 $\frac{E^2}{S}$ は単調減少で、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき E は最小となる。

E を最小とする $\theta =$

$\frac{\pi}{2}$

- (d) 界面が x 軸となす角が $\frac{\pi}{2}$ であり、対称性を考慮すると、正方形となる。

解答合計

点

--	--	--	--

問 10

6 点

(多様な解答を期待する。以下は例。考え方が示されていれば、多少の論理の飛躍はあってもよい。)

[例 1]

分子を中心とする面積 a^2 の正方形タイル (辺は x または y 方向) を考え、与えられた個数 N のタイルを並べるとき、外側の辺の長さの和 L を最小にすることを考える。

任意の配列を、 y 方向の列の集まりとみなせる場合について、最下辺が x 軸に揃うように各列を y 方向にずらしても、 L は不変または減少し、 N は変わらない。

次に、各列の (y 方向の) 高さが x 方向に単調減少になるように、列の (x 方向の) 順を入れ替える。このとき、 L は変わらないか、減少する (減少するのは、入れ替える前に単調でない凹んだ部分があり、入れ替えにより凹の内側の向き合っていた辺がなくなる場合)。

この状態で、 x 方向の幅を $M_x a$ 、高さの最大値を $M_y a$ とすると、 $L = 2(M_x + M_y)a$ 。したがって、この状態からタイルを (凹の部分をつくらないように) 動かして、 M_x, M_y を出来るだけ小さくすれば L_{\min} が得られる。また、 N の関数としての $L_{\min}(N)$ は N を増加したとき、変わらないか、増加する (凹の部分埋めれば減少できるが、凹の部分はないと考えてよい)。

$N = M^2$ (M は整数) のときには、1 辺 Ma の正方形に変形でき、 L_{\min} は $L_{\min}(M^2) = 4Ma$ 。したがって、 $M^2 \leq N \leq (M + 1)^2$ とすると、

$$4Ma \leq L_{\min}(N) \leq 4(M + 1)a \quad \text{すなわち} \quad 1 \leq \frac{L_{\min}(N)}{4Ma} \leq 1 + \frac{1}{M}$$

N, M が十分大きいとき、右の式の右辺は 1 に近づくから、表面エネルギーが最小になるのは結晶が正方形のときであると言える。

[例 2]

分子を中心とする面積 a^2 の正方形タイル (辺は x または y 方向) を考え、与えられた個数 N のタイルを並べるとき、外側の辺の長さの和 L を最小にすることを考える。

以下、長さを a の倍数で、面積を a^2 の倍数 (N) で表すことにする。

結晶全体の横幅を M_x 、縦幅を M_y とし (右上図)、これらの整数 M_x, M_y は十分大きいとき、それらを連続変数として扱ってよいとする。この結晶の周長 L_0 は明らかに

$$L_0 \geq 2(M_x + M_y)$$

である。この結晶の形が、もし、長方形でなければ、横幅 M_x 、縦幅 M_y の長方形内には結晶の存在しない隙間ができるので、 $M_x M_y > N$ である。

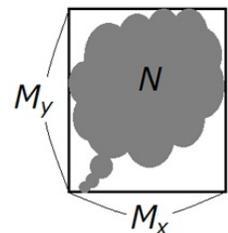
$$M_y > \frac{N}{M_x}$$

さて、同じ面積 N で横幅 M_x 、高さが $\frac{N}{M_x}$ の長方形の結晶を考えると、周長は

$$L_S = 2 \left(M_x + \frac{N}{M_x} \right)$$

である。元の結晶の形が長方形でなければ、 $M_y > \frac{N}{M_x}$ であったため、明らかに、 $L_0 > L_S$ である。よって面積 N 、横幅 M_x の結晶は、長方形の場合に周長が最短である。

次に、長方形と正方形を比べると、面積が同じ場合に明らかに正方形のほうが周長が短い。よって、結晶が正方形のとき、同じ面積に対し最も周長が短い。



解答合計

点

--	--	--	--

問 1

6 点

図 1(a) のコンデンサーの電気容量は

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

一方, (b) のコンデンサーの電気容量を C' とし, $\bar{\epsilon}$ の定義を使うと

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{C'V_0}{CV_0} = \frac{C'}{\epsilon_0 A/d} = \bar{\epsilon}$$

ゆえに,

$$C' = \epsilon_0 \bar{\epsilon} \frac{A}{d}$$

$$C' = \boxed{\epsilon_0 \bar{\epsilon} \frac{A}{d}}$$

問 2

8 点

上の極板の電位が下の極板より高いから, \vec{E} の向きは下向きで大きさは $E = \frac{V_0}{d}$ 。したがって, 電場の z 成分は $E_z = -\frac{V_0}{d}$ となるので, 電位は

$$V(z) = \frac{z}{d} V_0 = -zE_z$$

電場の向き 下向き

電場の大きさ $E = \boxed{\frac{V_0}{d}}$, $V(z) = \boxed{-zE_z}$

問 3

6 点

(a) 重ね合わせの原理を使うと (1) 式と (2) 式の右の式より,

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} + \frac{(-q)}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \quad (\text{A3-1})$$

$$V(C) = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}}$$

(b)

$$r_{\pm} = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z \mp \frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 \mp lz} = r \left(1 \mp \frac{1}{2} \frac{lz}{r^2}\right)$$

$$r_- - r_+ = \frac{lz}{r} = l \cos \theta \quad (\text{A3-2})$$

(A3-2) 式を (A3-1) 式の右辺に代入すると与えられた式 $V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos \theta$ が導かれる。

解答合計

点

--	--	--

問 4

10 点

(a) $V(r, \theta)$ として (6) 式の右边を使うと

$$V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

したがって,

$$E_r(r, \theta) = - \left(\frac{dV(r, \theta)}{dr} \right)_\theta = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta(r, \theta) = - \frac{1}{r} \left(\frac{dV(r, \theta)}{d\theta} \right)_r = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$E_r(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$	$, E_\theta(r, \theta) = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
---	--

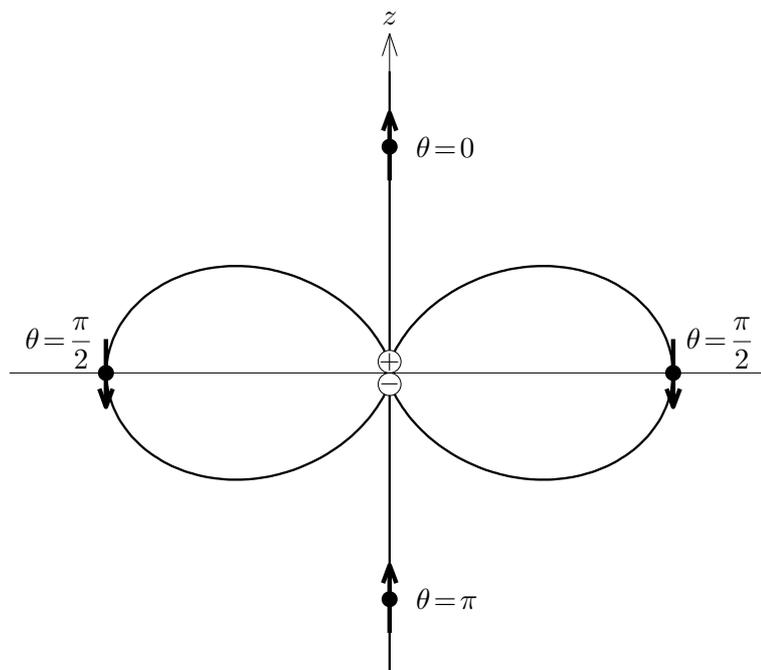
(b) $E(r) = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ とすると,

$\theta = 0$ のとき $E_r = E(r)$, $E_\theta = 0$

$\theta = \pi$ のとき $E_r = -E(r)$, $E_\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $E_r = 0$, $E_\theta = E(r)$

これより, 図の 4 点の電場の向きが矢印で示したように決まる。電気力線は正極から湧き出し, 負極に吸い込まれるから, それらを考慮すると 4 点を通る電気力線はおおよそ下図のようになるだろう。



解答合計

点

--	--	--

問 5

6 点

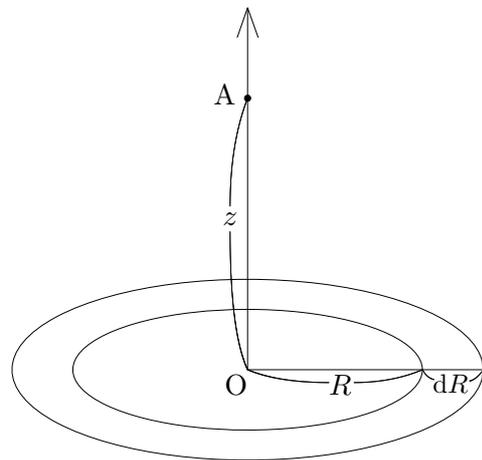
原点を中心とし半径が $R + dR$ と R の 2 つの円に挟まれたリング状の領域の中の双極子モーメントは z 方向で、大きさは $2\pi R P_S dR$, それらのモーメントから点 A $(0, 0, z)$ までの距離は $\sqrt{R^2 + z^2}$ 。そこで (6) 式に $p = 2\pi R P_S dR$, $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ を代入すると、この双極子モーメントのリングから電位への寄与 $dV(A)$ は

$$dV(A) = \frac{P_S z}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R dR}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

したがって、多数のリングからの寄与を加えあわせたものを $R = 0 \sim \infty$ での定積分で表すと

$$V(A) = \frac{P_S z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{2\pi R dR}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

となり、(8) 式を得る。



問 6

6 点

$t = R^2$ という置換をすると、(8) 式より

$$V(z) = \int_0^\infty \frac{P_S z}{4\epsilon_0} \frac{dt}{(z^2 + t)^{3/2}} = \frac{P_S z}{2\epsilon_0 |z|}$$

$z < 0$ のとき $\frac{z}{|z|} = -1$, $z > 0$ のとき $\frac{z}{|z|} = 1$ であることを使うと、(9) 式

$$V(A) = V(z) = \begin{cases} \frac{P_S}{2\epsilon_0} & z > 0 \text{ のとき} \\ -\frac{P_S}{2\epsilon_0} & z < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

が導かれる。

解答合計

点

--	--	--

問 7

8 点

(a) $(n - \frac{1}{2})a < z < (n + \frac{1}{2})a$ の領域からみると、それより下に n 枚の双極子層があり、それより上に $(N - n)$ 枚の双極子層がある。すると (9) 式により、この領域の電位は一定で

$$V(z) = n \frac{P_S}{2\epsilon_0} - (N - n) \frac{P_S}{2\epsilon_0} = (2n - N) \frac{P_S}{2\epsilon_0}$$

となる。

$$V(z) = \frac{(2n - N) P_S}{2\epsilon_0}$$

(b) n の値が 1 だけ増減するとこの式の右辺は $\frac{P_S}{\epsilon_0}$ だけ増減する。とくに、 $z = 0$ で $n = 0$ 、 $z = d$ で $n = N$ だから、

$$V(0) = -N \frac{P_S}{2\epsilon_0}, \quad V(d) = N \frac{P_S}{2\epsilon_0}$$

したがって、

$$V(d) - V(0) = N \frac{P_S}{\epsilon_0}$$

問 8

6 点

電位が距離 d の間で $\frac{NP_S}{\epsilon_0}$ だけ変わるのだから、電位分布の坂道の平均の勾配は $\frac{NP_S}{\epsilon_0 d}$ 。 $\frac{N}{d}$ は z 方向の単位長さあたりの双極子モーメントの数だから、 $\frac{NP_S}{d}$ は単位体積中の双極子モーメントの大きさ。これを P と書くと、

$$E_z = -\frac{NP_S}{d\epsilon_0} = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

\vec{P} は上向きで \vec{E} は下向きだから、これより (10) 式

$$\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

が導かれる。

問 9

6 点

最初に極板間にできる電場 \vec{E}_Q は下向きで大きさは

$$E_Q = \frac{V_0}{d}$$

誘電体を入れたとき誘電体内にできる電場は (14) 式により、

$$E = \frac{E_Q}{1 + \chi_P/\epsilon_0} = \frac{V_0/d}{1 + \chi_P/\epsilon_0}$$

したがって、誘電体を入れたとき極板間の電位差は

$$V = Ed = \frac{V_0}{1 + \chi_P/\epsilon_0}$$

両極間の電位差

$$\frac{V_0}{1 + \frac{\chi_P}{\epsilon_0}}$$

解答合計

点

--	--	--

問 10

6 点

図 1(b) の極板間にできる \vec{E}_Q は, 図 1(a) の Q が Q' になったとき極板間にできる電場に等しい。そのときの電位差 V' は $V' = \frac{Q'}{C}$ だから, $E_Q = \frac{V'}{d} = \frac{Q'}{dC} = \frac{Q'}{\epsilon_0 A}$, $D = \frac{Q'}{A}$

問 11

6 点

試料上の金属板が Q' に帯電しているとき, コンデンサーの左の極板は $-Q'$ に帯電し, 右の極板は Q' に帯電している。この電荷はコンデンサーに

$$V_c = \frac{Q'}{C} \tag{A12-1}$$

という電圧を加える。一方, 試料の金属板上の電荷 Q' は試料の誘電体の中に

$$D = \frac{Q'}{A} \tag{A12-2}$$

という電束密度を作る。(A12-1) と (A12-2) から Q' を消去して $V_c = \frac{A}{C} D$

V_c と D の関係式

$$V_c = \frac{A}{C} D$$

問 12

6 点

水平端子電圧は $V_x(t) = E(t)d$ 。一方, 垂直端子電圧 $V_y(t)$ は $D(t)$ に比例する。よって, 縦軸は D , 横軸は E , よって, $V_x(t)$ と $V_y(t)$ は周期的に同期してそれぞれ電場 $E(t)$ と電束密度 $D(t)$ に比例した電圧が加わり, D - E の関係が描かれることになる。

解答合計

点

--	--	--

問 1

10 点

^{235}U と ^{238}U の半減期をそれぞれ $t_{1/2}^{(235)}$, $t_{1/2}^{(238)}$ と置く。 ^{235}U と ^{238}U の存在比が現在は 0.72% : 99.3% であるが、時間 t だけ以前には、原子炉として使える 3% : 97% であったとすると

$$\frac{3}{97} \times \frac{2^{-t/t_{1/2}^{(235)}}}{2^{-t/t_{1/2}^{(238)}}} = \frac{0.72}{99.3}$$

$$\frac{2^{t/t_{1/2}^{(235)}}}{2^{t/t_{1/2}^{(238)}}} = \frac{e^{0.6931t/t_{1/2}^{(235)}}}{e^{0.6931t/t_{1/2}^{(238)}}} = \frac{3}{97} \frac{99.3}{0.72} = 4.262$$

両辺の自然対数をと

$$\frac{t}{a} = \frac{\log 4.262}{0.6931} = \frac{1.450}{0.6931} = 2.092 \quad (\log \text{ は自然対数})$$

または両辺の常用対数をと

$$\frac{t}{a} = \frac{\log 4.262}{\log 2} = \frac{0.6296}{0.3010} = 2.092 \quad (\log \text{ は常用対数})$$

ここに $a = \left(\frac{1}{t_{1/2}^{(235)}} - \frac{1}{t_{1/2}^{(238)}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{7.038 \text{ 億年}} - \frac{1}{44.68 \text{ 億年}} \right)^{-1} = 8.35 \text{ 億年}$ である。

以上から $t = 8.35 \text{ 億年} \times 2.09 = 17.45 \text{ 億年}$

今から約

17 億

年以上前

問 2

4 点

$^{152}\text{Sm}^*$ の寿命 τ は、 $\tau = \frac{2.05 \times 10^{-14} \text{ s}}{\log_e 2} = 2.96 \times 10^{-14} \text{ s}$ であるから、エネルギーの不確定の幅は

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{2.96 \times 10^{-14} \text{ s}} = 3.56 \times 10^{-21} \text{ J} = 2.22 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

$\Gamma =$

0.022

eV

解答合計

点

--	--	--

問 3

16 点

γ の運動量 \vec{p} , ν 線の運動量 \vec{q} を使うと, $^{152}\text{Sm}^*$ の運動量は $-\vec{q}$, ^{152}Sm の運動量は $-\vec{p} - \vec{q}$ である。 $^{152}\text{Sm}^*$ の質量 M_2 , ^{152}Sm の質量 M_1 を使うと, エネルギーの保存則から

$$c\sqrt{(M_2c)^2 + (-\vec{q})^2} = c\sqrt{(M_1c)^2 + (-\vec{p} - \vec{q})^2} + pc$$

原子核の質量が大きい近似

$$c\sqrt{(M_2c)^2 + q^2} \approx M_2c^2 + \frac{q^2}{2M_2} \quad \text{および} \quad c\sqrt{(M_1c)^2 + (\vec{p} + \vec{q})^2} \approx M_1c^2 + \frac{(\vec{p} + \vec{q})^2}{2M_1}$$

により

$$E_\gamma = pc = M_2c^2 - M_1c^2 + \frac{q^2}{2M_2} - \frac{(\vec{p} + \vec{q})^2}{2M_1}$$

ここで右辺の最後の 2 項について, $M_2 \approx M_1$ を用い, また $M_2 - M_1 = \Delta M$, \vec{p} と \vec{q} のなす角を θ と置けば

$$E_\gamma - \Delta Mc^2 = -\frac{2pq \cos \theta + p^2}{2M_1}$$

ここで $pc \approx \Delta Mc^2 = 9.61 \times 10^5 \text{ eV}$, $qc = 9.50 \times 10^5 \text{ eV}$, $M_1c^2 = 152 \times 9.31 \times 10^8 \text{ eV} = 1.42 \times 10^{11} \text{ eV}$ を代入し

$$\begin{aligned} E_\gamma - \Delta Mc^2 &= -\frac{2 \times 9.50 \times 10^5 \times 9.61 \times 10^5 \times \cos \theta + (9.61 \times 10^5)^2}{2 \times 1.42 \times 10^{11}} \text{ eV} \\ &= -\frac{1.826 \times 10^{12} \cos \theta + 9.235 \times 10^{11}}{2.84 \times 10^{11}} \text{ eV} = -(6.43 \cos \theta + 3.25) \text{ eV} \end{aligned}$$

同方向の場合 ($\cos \theta = 1$): $E_\gamma - \Delta Mc^2 = -\frac{2pq + p^2}{2M_1} = -(6.43 + 3.25) \text{ eV} = -9.68 \text{ eV}$

反対方向の場合 ($\cos \theta = -1$): $E_\gamma - \Delta Mc^2 = \frac{2pq - p^2}{2M_1} = (6.43 - 3.25) \text{ eV} = 3.18 \text{ eV}$

	式		値
同方向の場合 $E_\gamma - \Delta Mc^2 =$	$-\frac{2pq + p^2}{2M_1}$,	-9.68 eV
反対方向の場合 $E_\gamma - \Delta Mc^2 =$	$\frac{2pq - p^2}{2M_1}$,	3.18 eV

問 4

10 点

共鳴を起こす最適の γ 線のエネルギー E は $E - \Delta Mc^2 = \frac{(\Delta M)^2 c^2}{2M_1} = 3.25 \text{ eV}$ である。反対方向に出たガンマ線のエネルギーとの差は $3.25 \text{ eV} - 3.18 \text{ eV} = 0.07 \text{ eV}$ であり, これは原子核のエネルギー幅 $\Gamma = 0.022 \text{ eV}$ の 10 倍以内にあるので共鳴を起こす範囲内にある。一方, 同方向に出た γ 線の最適なエネルギーとの差は $-9.68 \text{ eV} - 3.25 \text{ eV} = -12.93 \text{ eV}$ であり, この差は原子核のエネルギー幅 $\Gamma = 0.022 \text{ eV}$ の 500 倍以上倍あって, 共鳴の条件を満たさない。

共鳴条件を満たすのは γ 線と ν の方向が

逆の場合

解答合計

点

--	--	--	--

問 5

10 点

運動量の保存則から，鉄の反跳エネルギー ΔE は， γ 線の運動量を p として

$$\Delta E = \frac{p^2}{2M} = \frac{(pc)^2}{2Mc^2} = \frac{(\Delta Mc^2)^2}{2Mc^2} = \frac{(1.44 \times 10^4 \text{ eV})^2}{2 \times 57 \times 9.31 \times 10^8 \text{ eV}} = 1.95 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

反跳する $^{57}_{26}\text{Fe}$ の運動エネルギーは

1.95×10^{-3}

eV

問 6

10 点

$h_1 > h_2$ の場合，観測された振動数のずれは

$$\Delta f = -\frac{v}{c} f = -\frac{g(h_1 - h_2)}{c^2} f$$

^{57}Fe の振動方向と γ 線の進行方向が同じだったので，本当の振動数は測定値よりも $\frac{g(h_1 - h_2)}{c^2} f$ だけ大きいことが分る。

$\Delta f = -\frac{g(h_1 - h_2)}{c^2} f$
--

問 7

10 点

等価原理によれば重力加速度 g で自然落下する観測者は重力場がない慣性系にいると感じる。高さ h_1 の線源が γ 線を放出した時刻を $t = 0$ とし，その時の観測者から見た線源の速度は $v = 0$ であったとする。この γ 線を高さ h_2 の測定器が受ける時刻は $t = \frac{h_1 - h_2}{c}$ 後であり，そのときの観測者・測定器間の相対速度は $v = gt = g \frac{h_1 - h_2}{c}$ である。このとき測定器に付いている振動板と観測者の相対速度がゼロなら，振動板は観測者から見て止まって見え，したがって等価原理により，メスbauer効果で共鳴散乱が起きる。故に振動板は測定器から γ 線の進行方向に速さ $v = \frac{g(h_1 - h_2)}{c}$ で動いているとき共鳴散乱が起きる。実験結果はこの考察の結果と一致しているので，実験は等価原理で説明できた。

[注意] ゴチックは肝要な部分である。

解答合計

点