物理チャレンジ 2017

第 1 問 A　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 1　6 点

衝突前の小球の運動量は m_1v_0，衝突後の小球の水平方向の運動量は $m_1v_1\cos\theta$，三角柱の運動量は m_2v_2 であるから

$$m_1v_0 = m_1v_1\cos\theta + m_2v_2$$

水平方向の運動量保存の式　$m_1v_0 = m_1v_1\cos\theta + m_2v_2$

問 2　6 点

衝突前の小球の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}m_1{v_0}^2$，衝突後の小球の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}m_1{v_1}^2$，三角柱の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}m_2{v_2}^2$ であるから

$$\frac{1}{2}m_1{v_0}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2$$

運動エネルギー保存の式　$\dfrac{1}{2}m_1{v_0}^2 = \dfrac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \dfrac{1}{2}m_2{v_2}^2$

問 3　6 点

衝突前の小球の運動量の斜面に平行な成分は $m_1v_0\cos 30^\circ$，衝突後は $m_1v_1\cos(\theta - 30^\circ)$ であるから

$$m_1v_0\cos 30^\circ = m_1v_1\cos(\theta - 30^\circ)$$

斜面に平行方向の運動量保存の式　$m_1v_0\cos 30^\circ = m_1v_1\cos(\theta - 30^\circ)$

問 4　10 点

小球の速度の水平成分は一定 $v_1\cos\theta$ であるから，これが v_2 に等しければよい。
すなわち $v_1\cos\theta = v_2$ である。

求める関係式　$v_1\cos\theta = v_2$

解答合計　　点

第 1 問 A　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ____

問 5　10 点

問 4 で求めた式の v_2 を問 1，問 2 で求めた式に代入して整理すると，それぞれ次の式を得る。

$$rv_0 = (1+r)\,v_1\cos\theta \tag{1}$$

$$rv_0^2 = (r+\cos^2\theta)\,{v_1}^2 \tag{2}$$

問 3 で求めた式の両辺を m_1 で割って，$\cos(\theta - 30^\circ)$ を展開すると次式を得る。

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,v_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)v_1 \tag{3}$$

この式 (3) の両辺を (1) の各辺で除して整理すると，次の r と θ の関係式を得る。

$$r\tan\theta = \sqrt{3} \tag{4}$$

また式 (1) の v_0 を (2) に代入して整理すると，次の r と θ の関係式を得る。

$$r^2\tan^2\theta - r - 1 = 0 \tag{5}$$

式 (4)，(5) から $r = 2$ を得る。

$r =$ 2

解答合計　　点

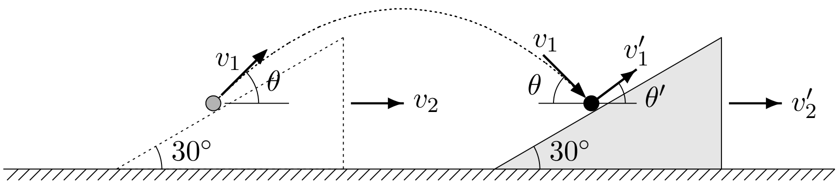
物理チャレンジ 2017

第 1 問 A　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問 6　　12 点

$r=2$ を代入して $\theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cong 40.9^\circ$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$v_1=\dfrac{\sqrt{7}}{3}v_0$，$v_2=\dfrac{2}{3}v_0$ を得る。

2 回目の衝突後のパラメータを v_1'，v_2'，θ' とする (下図参照)。



以下 $m_1=2m$，$m_2=m$ と置く。

水平方向の運動量保存　$2mv_0=2mv_1'\cos\theta'+mv_2'$　(1)

エネルギー保存則　$\dfrac{1}{2}(2m){v_0}^2=\dfrac{1}{2}(2m){v_1'}^2+\dfrac{1}{2}m{v_2'}^2$　(2)

斜面に平行な方向の運動量保存　$(2m)v_1\cos(\theta+30^\circ)=(2m)v_1'\cos(\theta'-30^\circ)$　(3)

$\left(v_1=\dfrac{\sqrt{7}}{3}v_0,\ \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}},\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$ に注意して以上の 3 つの式を整理するとそれぞれ

$$2v_0=2v_1'\cos\theta'+v_2' \tag{4}$$

$$2{v_0}^2=2{v_1'}^2+{v_2'}^2 \tag{5}$$

$$v_0=\left(3\cos\theta'+\sqrt{3}\sin\theta'\right)v_1' \tag{6}$$

となる。式 (4)，(5) から v_2' を消去して

$${v_0}^2+(1+2\cos^2\theta'){v_1'}^2-4v_0v_1'\cos\theta'=0 \tag{7}$$

この式の v_0 に式 (6) を代入して整理すると

$$\sin\theta'\left(2\sin\theta'+\sqrt{3}\cos\theta'\right)=0 \tag{8}$$

これより $\theta'=0$ を得る (もう一つの解 $\tan\theta'=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ は衝突前の角度に対応)。

なおこのとき，式 (6) より $v_1'=\dfrac{1}{3}v_0$，式 (4) より $v_2'=\dfrac{4}{3}v_0$ である。

2 回目の衝突で小球が跳ね返される方向	右向き水平方向

解答合計
点

問 6 別解　　12 点

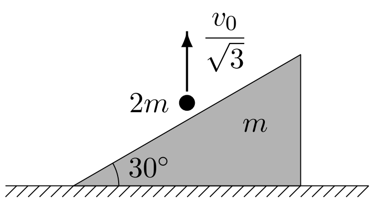
$r=2$ を代入して $\theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cong 40.9^\circ$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$v_1=\dfrac{\sqrt{7}}{3}v_0$，$v_2=\dfrac{2}{3}v_0$ を得る。

この衝突を水平方向の運動量の合計が 0 となる座標系、すなわち右方向に速さ $\dfrac{2}{3}v_0$ で移動する座標系で考えてみよう (以下、水平方向の速度は右向きを正とする)。この座標系では

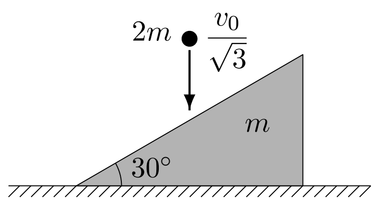
(i) 1 回目の衝突直前は，小球は速度 $\frac{1}{3}v_0$，三角柱は $-\dfrac{2}{3}v_0$ で運動している。

(ii) 1 回目の衝突直後は，小球は鉛直線上を $v_1\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}v_0$ で上昇し，三角柱は静止している。

(iii) 2 回目の衝突直前は，小球は鉛直線上を $v_1\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}v_0$ で落下しし，三角柱は静止している。



(ii) 1 回目の衝突直後



(iii) 2 回目の衝突直後

ニュートンの運動方程式は，速度と時間の符号を同時に逆転 ($t\to -t$，$\vec{v}\to -\vec{v}$) しても変わらない。そのため，1 つの力学的な過程が許されれば，その過程の速度を逆転し，時間を未来への逆，つまり過去にさかのぼる過程が許される。

さて，(iii) は (ii) の速度の符号を逆にした状況である (図参照)。従って (iii) の今後は (ii) の過程を過去にさかのぼれば得られる。その結果，2 回目の衝突直後は，1 回目の衝突直前の状況 (i) の小球と三角柱の速度の符号を逆にした過程が起こる。よって，小球は水平方向に $-\dfrac{1}{3}v_0$，三角柱は $\dfrac{2}{3}v_0$ の速度で運動する。

これをはじめの座標系に戻すには各水平速度に $\dfrac{2}{3}v_0$ を加えればよい。その結果，小球は水平方向に $\dfrac{1}{3}v_0$，三角柱は $\dfrac{4}{3}v_0$ で運動する。2 回目の衝突で小球が跳ね返される方向は右向き水平方向である。

2 回目の衝突で小球が跳ね返される方向	右向き水平方向

解答合計
点

第 1 問 B　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名

問 1　20 点

(a) 速度 v のスペースシャトルに対し，進行方向に相対速度 u で射出されたガス (質量 $-\mathrm{d}m$) の静止系に対する速度は $v+u$ である。スペースシャトルには外部から力が働いていなければ運動量は保存するので，

$$mv = (m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v) + (-\mathrm{d}m)(v+u)$$

$m \gg |\mathrm{d}m|$，$v \gg |\mathrm{d}v|$ であるから，$\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$ を無視すると

$$0 = m\mathrm{d}v - \mathrm{d}m\,u$$

となるから，スペースシャトルの加速度は

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u\,\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

のように与えられる。右辺の $\left|\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|$ が単位時間当たりのガス噴射量である。

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \boxed{\quad u\,\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\quad}$$

(b) (a) の答えの式の両辺を時間で積分すると

$$\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = u\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{すなわち} \qquad \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \mathrm{d}v = u\int_{m_\mathrm{i}}^{m_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}m}{m}$$

以上から

$$v_\mathrm{f} - v_\mathrm{i} = u\log\frac{m_\mathrm{f}}{m_\mathrm{i}} = -u\log\frac{m_\mathrm{i}}{m_\mathrm{f}}$$

となる。

$$v_\mathrm{f} = \boxed{\quad v_\mathrm{i} - u\log\frac{m_\mathrm{i}}{m_\mathrm{f}}\quad}$$

解答合計　　点

第 1 問 B　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号** 　　　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問 2　　22 点

(a) 時刻 $t=0$ における速度 $v(0)=a=v_{\mathrm{i}}$，$t=\tau$ における速度 $v(\tau)=\dfrac{a}{b\tau+1}=v_{\mathrm{f}}$ より

$$a=v_{\mathrm{i}},\qquad b=\frac{1}{\tau}\left(\frac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{f}}}-1\right)$$

を得る。

$a=$ v_{i} ，　$b=$ $\dfrac{1}{\tau}\left(\dfrac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{f}}}-1\right)$

(b) ニュートンの運動方程式より，スペースシャトルの質量を m，加速度を α，スペースシャトルに働く力を F とすると

$$F=m\alpha=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{-ab}{(bt+1)^2}=-m\frac{b}{a}v(t)^2=-\frac{m}{\tau}\left(\frac{1}{v_{\mathrm{f}}}-\frac{1}{v_{\mathrm{i}}}\right)v(t)^2$$

力の大きさは $|F|$ である。

力の大きさ　$\dfrac{m}{\tau}\left(\dfrac{1}{v_{\mathrm{f}}}-\dfrac{1}{v_{\mathrm{i}}}\right)v(t)^2$

(c) 直径 12 m のパラシュートが展開される速度は 346 km/h で，パラシュートが投棄される速度が 110 km/h であるから，$v_{\mathrm{i}}=346\,\mathrm{km/h}=96.1\,\mathrm{m/s}$，$v_{\mathrm{f}}=110\,\mathrm{km/h}=30.6\,\mathrm{m/s}$ である。

力の大きさ $|F(t)|$ は $v(t)^2$ に比例するので，$\dfrac{|F(t)|}{v(t)^2}$ を計算すると

$$\frac{mb}{a}=\frac{m}{\tau}\left(\frac{1}{v_{\mathrm{f}}}-\frac{1}{v_{\mathrm{i}}}\right)=\frac{78000\,\mathrm{kg}}{\tau}\left(\frac{1}{30.6\,\mathrm{m/s}}-\frac{1}{96.1\,\mathrm{m/s}}\right)=\frac{1}{2}\times1.42\times1.225\times\pi\times6^2\,\mathrm{kg/m}$$

より $\tau=17.7\,\mathrm{s}$ を得る。またこの間に進む距離は

$$\int_0^\tau v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\tau\frac{a}{bt+1}\mathrm{d}t=\frac{a}{b}\left[\log\left(t+\frac{1}{b}\right)\right]_0^\tau=\frac{a}{b}\log(b\tau+1)=\frac{v_{\mathrm{i}}\tau}{\frac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{f}}}-1}\log\frac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{f}}}=909\,\mathrm{m}$$

時間 $\tau=$ 18 s，進む距離 910 m

(d) パラシュートによる抵抗力を受けて，スペースシャトルは速度を落とし，運動エネルギーを失う。スペースシャトルが失ったエネルギーは運動エネルギーの減少量に等しい。したがって，

$$\frac{1}{2}m({v_{\mathrm{i}}}^2-{v_{\mathrm{f}}}^2)=\frac{1}{2}\times78000\times(96.1^2-30.6^2)\,\mathrm{J}=3.24\times10^8\,\mathrm{J}$$

失ったエネルギー　3.2×10^8 J

解答合計　　点

第 1 問 B　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号**　　氏名

問 3　8 点

下記および次ページは一例である。様々な答案があったが，ここにあげた例に限らず，何らかの発想から出発して適切な筋道で空気温度の上昇を説明し，温度を推定していれば，たとえ部分的であったとしも，好ましい解答と評価した。

スペーシャトルに固定した座標系で考えると，スペーシャトルに向かって高速で入射 する空気の分子がスペーシャトルの前面でせき止められる。空気の分子の質量を m，スペーシャトルの速さを V とすると，入射する空気の分子は 1 個あたり $\frac{1}{2}mV^2$ の運動エネルギーをもつ。せき止められた結果，空気の温度が T になったとすると， 空気の分子は 1 個あたり $\frac{7}{2}k_{\mathrm{B}}T$ のエネルギーをもつ。したがって，入射する空気の分子の運動エネルギーがすべて空気の温度の上昇に使われると仮定すれば，

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{7}{2}k_{\mathrm{B}}T$$

によって大まかな温度が求まると考えられる。空気の平均モル質量を M とすると，$m = \frac{M}{N_A}$ であるから，与えられた数値を用い て

$$T = \frac{MV^2}{7k_{\mathrm{B}}N_{\mathrm{A}}} = \frac{29\times10^{-3}\times(3.7\times10^3)^2}{7\times1.4\times10^{-23}\times6.0\times10^{23}}\ \mathrm{K} = 6.8\times10^3\ \mathrm{K}$$

となる。入射分子の運動エネルギーが空気の温度上昇以外に使われるとすると，温度はこれより低くなる。

あるいは

空気の分子が静止した座標系で考えると，空気の分子がスペーシャトルの機体に押されて動き，平均の速度が機体と同じ速度であるとして，分子の運動エネルギーが内部エネルギーになるとすると

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{7}{2}k_{\mathrm{B}}T$$

が得られる (以下同じ)。

さらに，仰角が α のとき，せき止められるのは機体に垂直な速度の成分 $V\sin\alpha$ であると考えれば，上の式の V は $V\sin\alpha$ で置き換えられる。$\alpha = 40^\circ$ とすると，

$$T = 6.8\times10^3\times(\sin40^\circ)^2\,\mathrm{K} = 6.8\times10^3\times0.41\,\mathrm{K} = 2.8\times10^3\,\mathrm{K}$$

となる。

[注] 次ページの「別解」にあるように，圧力のする仕事を考慮すると，$\frac{7}{2}k_{\mathrm{B}}T$ の代わりに $\frac{9}{2}k_{\mathrm{B}}T$ とする方がより適当である。

[付記] 実際には，音速より速く飛ぶスペースシャトルの前方では，機体の先端の数 10cm 前方に衝撃波面が生じる。衝撃波面を通過した気体は非常に高温になったあと，機体に近づくにつれて温度が下がるが，スペースシャトルの安全のため，機体の表面ではさらに温度が 2000 ℃よりも十分低く保たれるよう様々に工夫されている。また，機体近くの酸素や窒素の気体分子が原子に解離 (分解) するなどの化学反応もあり，実際の気体の温度は機体の前方の位置に複雑に依存する。しかし，問 3 では，解答者なりの自由な物理的思考，単純化や論理などを問うているだけである。

解答合計

点

第 1 問 B　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ____________

問 3 別解　8 点

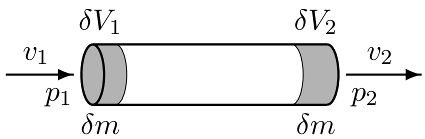
流れを平行と近似できるなら，スペースシャトルに固定した座標系で，流れに沿って速度を v , 内部エネルギー密度を ε，圧力を p，$h = \varepsilon + p$ (エンタルピー密度) として，保存則

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{h}{\rho} = \text{const.}$$

が成り立つ。なお，この式は「流れの両端のエネルギー差は両端の気圧の行った仕事に等しい」ことを表す式 (下図参照)

$$\left(\frac{1}{2}\delta m\, {v_2}^2 + \varepsilon_2 \delta V_2\right) - \left(\frac{1}{2}\delta m\, {v_1}^2 + \varepsilon_1 \delta V_1\right) = p_1 \delta V_1 - p_2 \delta V_2$$

の両辺を δm で割り，移項すれば得られる (ショックでエントロピーが非保存でも成立つ)。



1 モルの質量を M，定圧モル比熱を C_p，比熱比 $\gamma = \frac{9}{7}$ として

$$\frac{h}{\rho} = \frac{C_\mathrm{p} T}{M} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{k_\mathrm{B} T}{m} = \frac{9}{2}\frac{k_\mathrm{B} T}{m}$$

温度 T_1，速度 v_1 で入ってきた気体がスペースシャトルに当たり速度が 0 となり，温度が T_2 になったとすると

$$\frac{1}{2}{v_1}^2 + \frac{9}{2}\frac{k_\mathrm{B} T_1}{m} = \frac{9}{2}\frac{k_\mathrm{B} T_2}{m}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{9}\frac{m}{k_\mathrm{B}}{v_1}^2 = \frac{M}{9R}{v_1}^2$$

数値を代入して

$$T_2 - T_1 = \frac{0.029}{9 \times 8.31} \times (3700)^2\,\mathrm{K} = 5.3 \times 10^3\,\mathrm{K}$$

T_2 は T_1 に比べて十分大きいので， 求める T は T_2 としてよい。

さらに，仰角が α のとき，0 となるのは機体に垂直な速度の成分 $v_1 \sin\alpha$ であると考えれば，上の式の v_1 は $v_1 \sin\alpha$ で置き換えられる。$\alpha = 40°$ とすると，

$$T = 5.3 \times 10^3 \times (\sin 40°)^2\,\mathrm{K} = 5.3 \times 10^3 \times 0.41\,\mathrm{K} = 2.2 \times 10^3\,\mathrm{K}$$

となる。

[注] 圧力のする仕事を考慮してない前ページの「解答例」では，モル比熱として $\frac{9}{2}R$ の代わりに $\frac{7}{2}R$ を用いている。

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　1/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ________

問 1　5 点

微小時間 Δt の間の水の運動量の変化は，区間 BB$'$ にある運動量 $Jv_2 dlt$ から区間 AA$'$ にある運動量 $Jv_1\Delta t$ を引いた差に等しい。したがって，運動量の変化は $\Delta p = J\left(v_2 - v_1\right)\Delta t$ である。

運動量の変化は力積に等しいから $\Delta p = F\Delta t$，ゆえに外力は $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = J\left(v_2 - v_1\right)$

$\Delta p =$ $\boxed{J\left(v_2 - v_1\right)\Delta t}$ ，　$F =$ $\boxed{\dfrac{\Delta p}{\Delta t}}$

問 2　5 点

前問と同様に考えて，Δt の間の運動エネルギーの変化は，区間 BB$'$ にある運動エネルギー $\dfrac{1}{2}J{v_2}^2\Delta t$ から間 AA$'$ にある運動エネルギー $\dfrac{1}{2}J{v_1}^2\Delta t$ を引いた差に等しい。

したがって $\Delta K = \dfrac{1}{2}J\left({v_2}^2 - {v_1}^2\right)\Delta t$ である。

$\Delta K =$ $\boxed{\dfrac{1}{2}J\left({v_2}^2 - {v_1}^2\right)\Delta t}$

問 3　5 点

水に働く外力 F は，右向きを正として $F = (P_\mathrm{A}S_1 - P_0S_2) + F_\mathrm{s}$ である。

これが問 1 で考えた $\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$ に等しいから，

$$F_\mathrm{s} = -(P_\mathrm{A}S_1 - P_0S_2) + \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$F_\mathrm{s} =$ $\boxed{-(P_\mathrm{A}S_1 - P_0S_2) + \dfrac{\Delta p}{\Delta t}}$

問 4　5 点

時間 Δt の間の水の運動量の変化は，区間 BB$'$ にある運動量 $J_\mathrm{t}v_2\Delta t$ から区間 AA$'$ にある運動量 $J_\mathrm{t}v_1\Delta t$ を差し引いた結果に等しい。したがって運動量の変化 Δp は

$$\Delta p = J_\mathrm{t}(v_2 - v_1)\Delta t$$

別解

問 1 の Δp の式において J を J_t とすればよい。

$\Delta p =$ $\boxed{J_\mathrm{t}(v_2 - v_1)\Delta t}$

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　2/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ____________

問 5　　5 点

前問と同様に考えて，Δt の間の運動エネルギーの変化は，区間 BB′ にある運動エネルギー $\frac{1}{2}J_{\mathrm{t}}{v_2}^2\Delta t$ から区間 AA′ にある運動エネルギー $\frac{1}{2}J_{\mathrm{t}}{v_1}^2\Delta t$ を差し引いた結果である。また連続の式から $v_1S_1 = v_2S_2$ の関係がある。したがって，

$$\Delta K = \frac{1}{2}J_{\mathrm{t}}({v_2}^2 - {v_1}^2)\Delta t = \frac{1}{2}J_{\mathrm{t}}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]{v_1}^2\Delta t$$

海水の運動エネルギーがタービンに与えられる結果，$\Delta K < 0$ となる。そのためには，$S_1 < S_2$ でなければならない。すなわち $v_1 > v_2$ となり，流管の断面積は増大し，流管内の定常流の速度は減速される。

$\Delta K =$ $\boxed{\frac{1}{2}J_{\mathrm{t}}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]{v_1}^2\Delta t}$

問 6　　5 点

運動量の変化は力積に等しいから $\Delta p = F_{\mathrm{t}}\Delta t$，したがって

$$F_{\mathrm{t}} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

この式の右辺に問 4 の結果 $\Delta p = J_{\mathrm{t}}(v_2 - v_1)\Delta t$ を代入して次の結果を得る。

$$F_{\mathrm{t}} = J_{\mathrm{t}}(v_2 - v_1)$$

問 7　　5 点

(5) 式 $\mathcal{P} = Fv$ の F に問 6 の $F_{\mathrm{t}} = J_{\mathrm{t}}(v_2 - v_1)$ を，v に (3) 式 $J_{\mathrm{t}} = \rho v_{\mathrm{t}}S_{\mathrm{t}}$ で定義された v_{t} を代入して，タービンが流体になす仕事率は

$$\mathcal{P} = F_{\mathrm{t}}v_{\mathrm{t}} = J_{\mathrm{t}}(v_2 - v_1)v_{\mathrm{t}}$$

一方，運動エネルギーの変化率を使って計算すると，これは

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{1}{2}J_{\mathrm{t}}({v_2}^2 - {v_1}^2)$$

この 2 つの式の右辺同士を等置して次の結果を得る。

$$v_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

$v_{\mathrm{t}} =$ $\boxed{\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}$

解答合計　　点

問 8　5 点

$\mathcal{P}_{\mathrm{t}} = -\mathcal{P}$ であるから，(3) 式 $J_{\mathrm{t}} = \rho v_{\mathrm{t}} S_{\mathrm{t}}$，前問の結果 $v_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ を使うと

$$\mathcal{P}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2} J_{\mathrm{t}}({v_1}^2 - {v_2}^2) = \frac{1}{2}(\rho v_{\mathrm{t}} S_{\mathrm{t}})({v_1}^2 - {v_2}^2) = \frac{1}{4}\rho S_{\mathrm{t}}(v_1 + v_2)({v_1}^2 - {v_2}^2)$$

あるいは

$$\mathcal{P}_{\mathrm{t}} = J_{\mathrm{t}}(v_1 - v_2)v_{\mathrm{t}} = \rho S_{\mathrm{t}}(v_1 - v_2){v_{\mathrm{t}}}^2 = \frac{1}{4}\rho S_{\mathrm{t}}(v_1 + v_2)({v_1}^2 - {v_2}^2)$$

問 9　20 点

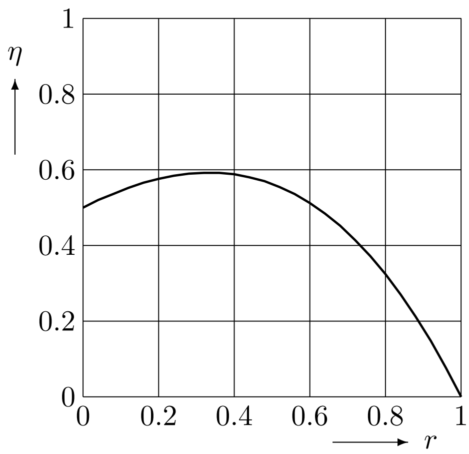
(a) 断面積 S_{t} の断面を単位時間あたり通過する水の質量は $\rho v_1 S_{\mathrm{t}}$ である。これが速度 v_1 で運動しているので，$\mathcal{P}_0 = \frac{1}{2}(\rho v_1 S_{\mathrm{t}}){v_1}^2 = \frac{1}{2}\rho {v_1}^3 S_{\mathrm{t}}$ である。

$\mathcal{P}_0 =$ $\boxed{\frac{1}{2}\rho {v_1}^3 S_{\mathrm{t}}}$

(b) 問 8 で導いたようにタービンが流体になす仕事率 $\mathcal{P}_{\mathrm{t}}$ は (6) 式で与えられるから，タービンが定常流からエネルギーを引き出す効率 $\eta(r)$ はこれを $\mathcal{P}_0$ で割って

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{t}}}{\mathcal{P}_0} = \frac{1}{2}(1 + r)(1 - r^2), \qquad 0 < r < 1$$

となる。$\eta(r)$ のグラフを右図に示す。



$\eta =$ $\boxed{\frac{1}{2}(1 + r)(1 - r^2)}$

(c) この最大値を求めるために η を r で微分すると，$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2}(1 - 3r)(1 + r)$ である。$r > 0$ だから，これが 0 になるのは $r = \frac{1}{3}$ のときで，効率の最大値は $\eta_{\max} = \frac{16}{27}$　0.593 である。

η を最大とする r の値 $\boxed{\frac{1}{3}}$，$\eta_{\max} =$ $\boxed{\frac{16}{27} \text{ または } 0.593}$

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　4/4　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 10　10 点

(a) 単位時間に断面積 S を通過する運動エネルギーは $\mathcal{P}_0 = \dfrac{1}{2}\rho {v_1}^3 S$

ここで S は黒潮の流れに垂直な全断面積で，$S = 100 \times 10^3 \times 400\,\mathrm{m}^2 = 4 \times 10^7\,\mathrm{m}^2$

海水の密度 $\rho = 1\,\mathrm{g/cm^3} = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, 流速 $v_1 = 3 \times 1852\,\mathrm{m/h} = 1.54\,\mathrm{m/s}$

以上を $\mathcal{P}_0$ の式に代入すれば

$$\mathcal{P}_0 = \frac{1}{2} \times 10^3 \times 1.54^3 \times (4 \times 10^7)\,\mathrm{J/s} = 7.30 \times 10^{10}\,\mathrm{J/s} = 7.3 \times 10^{10}\,\mathrm{W} = 73\,\mathrm{GW}$$

$\mathcal{P}_0 =$ $\boxed{7 \times 10^{10}}$ W

(b) 最大発電効率 (ベッツの上限) は $\eta_{\mathrm{max}} = 0.593$ である。

発電能力の上限は $\mathcal{P}_{\mathrm{max}} = \dfrac{1}{100} \times 0.593 \times \mathcal{P}_0 = 4.3 \times 10^8\,\mathrm{W} = 0.43\,\mathrm{GW}$

発電能力 (仕事率) の上限 $\boxed{4 \times 10^8}$ W

解答合計
点

第 3 問　解答用紙　1/4　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 1　5 点

(6) の右辺を

$$(L\Delta y)\frac{E(y+\Delta y,\,t)-E(y,\,t)}{\Delta y}=(L\Delta y)E_0\frac{\sin\phi(y+\Delta y,\,t)-\sin\phi(y,\,t)}{\Delta y}$$

と変形し，(5) に代入して両辺を $L\Delta y$ で割ると

$$E_0\frac{\sin\phi(y+\Delta y,\,t)-\sin\phi(y,\,t)}{\Delta y}=\omega B_0\cos\phi$$

左辺で $\Delta y\to 0$ とすると

$$E_0k\cos\phi=\omega B_0\cos\phi$$

よって与式を得る。

問 2　5 点

コンデンサーの極板の面積を S，間隔を d とすると，容量は $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ 。

また，下の電極の電荷を Q，上の電極の電荷を $-Q$ とすると，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q=I$ 。

極板間の電場は底面に垂直で，大きさは $E=\dfrac{Q}{Cd}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ であるから，電束は $S\varepsilon_0E$，電束電流は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S\varepsilon_0E=S\varepsilon_0\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q=I$ 。したがって，底面が S_0，S_1，S_2 のどの場合でも同じ。

問 3　5 点

(10) の両辺を $L\Delta y$ で割り，左辺を次のように計算する。

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{B(y,\,t)-B(y+\Delta y,\,t)}{\Delta y}=-kB_0\cos\phi$$

したがって $-kB_0\cos\phi=-\varepsilon_0\mu_0\omega E_0\cos\phi$ を得る。両辺を比べて与式 $(kB_0=\varepsilon_0\mu_0\omega E_0)$ を得る。

解答合計
点

第 3 問　解答用紙　2/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名

問 4　10 点

(a) (7) 式 $\omega B_0 = kE_0$，(11) 式 $kB_0 = \varepsilon_0\mu_0\omega E_0$ の各辺を割り算して $\omega^2 = \dfrac{k^2}{\varepsilon_0\mu_0}$,

したがって $\omega = \left(\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{1/2} k$，波の速さは $\dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\omega}{k} = \left(\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{1/2}$

$\dfrac{\lambda}{T} = \boxed{\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{1/2}}$

(b) $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{H/m}$ を代入して計算すると，$\mathrm{FH} = \mathrm{s}^2$ に注意して

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{1.113 \times 10^{-17}}}\ \mathrm{m/s} = 2.998 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

[注] $\mathrm{FH} = \mathrm{s}^2$ に言及しなくてもよい。

波の速さ = $\boxed{2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}$

問 5　5 点

単位時間に通過する電子数は単位底面積, 高さ v_z の柱状体積中の電子数 nv_z に等しい。
よって単位時間に通過する電気量は $(-e)nv_z$ である。

問 6　10 点

(a) 運動方程式 $m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = (-e)E_0 \sin\phi$ に $v_z = v_0\cos\phi$ を代入して ($\phi = ky - \omega t$，運動は z 方向)

$$mv_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\phi = m\omega v_0 \sin\phi = (-e)E_0 \sin\phi$$

両辺を比較して $v_0 = \dfrac{-e}{m\omega}E_0$ を得る。

$v_0 = \boxed{\dfrac{-e}{m\omega}E_0}$

(b) 問 5 の表式 $(-e)nv_z$ に $v_z = v_0\cos\phi$ を代入，面積 $(L\Delta y)$ を乗じ，v_0 に (a) の解を代入する。

$$(L\Delta y)(-e)nv_0\cos\phi = (L\Delta y)\frac{ne^2}{m\omega}E_0\cos\phi$$

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　3/4　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ________

問 7　5 点

(13) の両辺を $L\Delta y$ で割り，左辺で $\Delta y \to 0$ の極限をとる。左辺は問 3 のときと同様に

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{B(y,\,t) - B(y+\Delta y,\,t)}{\Delta y} = -kB_0 \cos\phi$$

したがって

$$-kB_0 \cos\phi = -\varepsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2}\right) \omega E_0 \cos\phi$$

これから次の与式を得る。

$$kB_0 = \varepsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2}\right) \omega E_0$$

問 8　5 点

例えば，n, e, ε_0, m の次元 (単位) はそれぞれ m^{-3}，C，F/m=C/(V m)，kg であるから，$\left[\dfrac{e^2}{\varepsilon_0}\right] = \mathrm{CVm} = \mathrm{Jm} = \mathrm{kg\,m^3\,s^{-2}}$ である (CV = J に注意)。したがって $\left[\dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\right] = \mathrm{s}^{-2}$ となる。

問 9　5 点

(14) 式 $kB_0 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega \left(1 - \dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \dfrac{1}{\omega^2}\right) E_0$ の左辺，右辺をそれぞれ (7) 式 $\omega B_0 = kE_0$ の左辺，右辺で割り，分母を払うと $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \left(1 - \dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \dfrac{1}{\omega^2}\right) = \varepsilon_0 \mu_0 \left(\omega^2 - \dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)$ を得る。これより (16) を得る。

$$\omega^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} k^2 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} k^2 + {\omega_\mathrm{p}}^2$$

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　4/4　**第 2 チャレンジ番号**　　氏名

問 10　5 点

(16) から

$$\frac{k}{\omega} = (\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}\ \frac{(\omega^2 - \omega_{\rm p}{}^2)^{1/2}}{\omega}$$

したがって

$$\text{屈折率} = \frac{c}{\omega/k} = c\,(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}\ \frac{(\omega^2 - \omega_{\rm p}{}^2)^{1/2}}{\omega}$$

ここで問 4(a) の結果 $c\,(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2} = 1$ を用いて次の結果を得る。

$$\text{屈折率} = \frac{(\omega^2 - \omega_{\rm p}{}^2)^{1/2}}{\omega}$$

[注] $c\,(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2} = 1$ は**問 4(a)** の答の利用でも記憶でもよい。また，$c\,(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ のままでも大きくは減点しない。

屈折率の式　$\boxed{\dfrac{(\omega^2 - \omega_{\rm p}{}^2)^{1/2}}{\omega}}$

問 11　10 点

(a) $n = 10^{12}\,\mathrm{m^{-3}}$ とすると，

$$\omega_{\rm p} = \left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2} = \left[\frac{10^{12}\times(1.602\times10^{-19})^2}{8.854\times10^{-12}\times9.109\times10^{-31}}\right]^{1/2}\mathrm{s^{-1}} = 5.64\times10^{7}\,\mathrm{s^{-1}}$$

すなわち $\omega_{\rm p} \sim 6\times10^7\,\mathrm{rad/s}\ \left(\dfrac{\omega_{\rm p}}{2\pi} \sim 10^7\,\mathrm{s^{-1}} = 10\,\mathrm{MHz}\right)$

[注] 有効数字 1 桁。角振動数まででよい。ω_p の単位 rad/s を $\mathrm{s^{-1}}$ としても減点しない。

$\omega_{\rm p} =$ $\boxed{6\times10^7\,\mathrm{rad/s}}$

(b) $\dfrac{(\omega^2 - \omega_{\rm p}{}^2)^{1/2}}{\omega} < 1$ であるから電離層の方が屈折率が小さい。したがって電離層への入射角が大きくなると全反射が起きる。全反射の臨界角 (全反射の起きる最小の入射角) θ は真空と電離層の屈折率の比により

$$\sin\theta = \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2}}{\omega}$$

と与えられる。ω が $\omega_{\rm p}$ に近づくと，$\theta \to 0$ となり，$\omega_{\rm p}$ 以下の角振動数 (10 MHz 以下の周波数) の電波は電離層により反射される。

[注] 常識，あるいは水中から水面に入射する光のイメージなどから「反射」としていれば，臨界角への言及はなくてよい。

解答合計　　点

第 4 問　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号**　|　|　|　氏名 ________________

問 1　5 点

1 光年は 1 年 $\times c = 9.45 \times 10^{15}$ m，ゆえに銀河円盤の体積 V_{G} は，

$$V_{\mathrm{G}} = \pi {R_{\mathrm{G}}}^2 D_{\mathrm{G}} = 3.14 \times (5 \times 10^4)^2 \times (1 \times 10^3) \times (1.0 \times 10^{16})^3 = 7.8 \times 10^{60}\ \mathrm{m}^3$$

一方，エネルギー密度は MKS 単位で，$w = 10^6\,\mathrm{eV/m^3} = 1.6 \times 10^{-13}\,\mathrm{J/m^3}$ なので，銀河円盤内の宇宙線のエネルギーは $W_{\mathrm{T}} = wV_{\mathrm{G}} = 1.3 \times 10^{48}$ J 。ゆえにこれが失われる率は

$$\frac{W_{\mathrm{T}}}{\tau} = \frac{1.3 \times 10^{48}\ \mathrm{J}}{1000\,\text{万年}} = 1.3 \times 10^{41}\ \mathrm{J}/\text{年}$$

1 年あたりに作られる宇宙線のエネルギー $\boxed{1 \times 10^{41}}$ J/年

問 2　10 点

ヒントの式 $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}m} = -\dfrac{Gm}{r}$ に $r = \left(\dfrac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$ を代入して $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}m} = -\dfrac{Gm^{2/3}}{(3/4\pi\rho)^{1/3}}$

$$U = -\frac{G}{(3/4\pi\rho)^{1/3}} \int_0^M m^{2/3}\,\mathrm{d}m = -\frac{3}{5}\frac{GM^{5/3}}{(3/4\pi\rho)^{1/3}} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{(3M/4\pi\rho)^{1/3}} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

問 3　5 点

中性子星のもつエネルギー $|U| = \dfrac{3GM^2}{5R} = \dfrac{3 \times 6.67 \times 10^{-11} \times (1.3 \times 2 \times 10^{30})^2}{5 \times 10^4}\ \mathrm{J} = 2.71 \times 10^{46}$ J

その 0.01% は $W_1 = |U| \times 10^{-4} = 2.71 \times 10^{42}$ J

$f = \dfrac{1}{100\,\text{年}}$ をかけて $W_1 f = 2.71 \times 10^{40}$ J/年

$W_1 = \boxed{3 \times 10^{42}\ \mathrm{J}}$ ，　$W_1 f = \boxed{3 \times 10^{40}}$ J/年

解答合計　　点

第 4 問　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ____________

問 4　10 点

(a) $E = Mc^2\gamma$, $p = Mc\gamma\beta$ において，$\beta \to 1$ のとき $p \quad Mc\gamma$ となるから $E \quad pc$ である。

(b) $\beta = \dfrac{V}{c}$ が小さいとき $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \quad 1 + \dfrac{\beta^2}{2} = 1 + \dfrac{V^2}{2c^2}$

$$\text{エネルギー}\quad E = Mc^2\gamma = Mc^2\left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right) = Mc^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

$$\text{運動量}\qquad p = Mc\gamma\beta = Mc\left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)\frac{V}{c} \quad MV$$

問 5　10 点

$\dfrac{\varDelta E}{E} = \beta\,(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$ である。

$\cos\theta$ の平均値は $\langle\cos\theta\rangle = \dfrac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}$ と表される。

$\cos\theta = t$ と置くと $\mathrm{d}t = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ であるから積分は $\dfrac{-\displaystyle\int_1^0 t^2\,\mathrm{d}t}{-\displaystyle\int_1^0 t\,\mathrm{d}t} = \dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$

以上から $\langle\cos\theta_1\rangle = \langle\cos\theta_2\rangle = \dfrac{2}{3}$，ゆえに $\alpha = \langle\beta\,(\cos\theta_2 + \cos\theta_1)\rangle = \dfrac{4\beta}{3}$

解答合計　　点

第 4 問　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ________________

問 6　10 点

初期エネルギーが E_0 の宇宙線が E 以上まで加速されるには，$E = E_0 \mathrm{e}^{N\alpha}$ として最低限 $N = \dfrac{1}{\alpha}\log\dfrac{E}{E_0}$ 回の加速まで，宇宙線が加速領域から漏れずに加速されることが必要である．したがってエネルギーが E 以上の確率は

$$P_E = \mathrm{e}^{-N\delta} = \exp\left\{-\Big(\frac{1}{\alpha}\log\frac{E}{E_0}\Big)\delta\right\} = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\delta/\alpha}$$

問 7　5 点

$$f_2(E)\Delta E = f_1(E) - f_1(E+\Delta E) = -\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}E}\Delta E = CE^{-2}\Delta E$$

ゆえに

$$f_2(E) = -\frac{\mathrm{d}f_1(E)}{\mathrm{d}E} = CE^{-2}$$

問 8　5 点

衝突で作られた直後のホウ素のエネルギーは，酸素と同じエネルギー分布 $\left|\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}E}\right| \propto E^{-2.7}$ をしている。そのホウ素の銀河内の滞在時間が $E^{-0.7}$ に比例するから，観測されるホウ素のエネルギー分布は

$$\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}E}\right| \propto E^{-(2.7\,+\,0.7)} = E^{-3.4}$$

となる。

解答合計　　点