電子レンジの物理 ー 解答

Part A : マグネトロンの構造と動作 (6.6 points)

A.1. (0.4 points)

LC回路の周波数は $f = \omega/2\pi = 1/2\pi\sqrt{LC}$ と書ける。空洞のまわりを流れる電流の大きさをIとおくと、問題で与えられた仮定より、空洞に作られる磁束密度の大きさは、$0.6\,\mu_0 I/h$ と計算され、磁束は $\pi R^2 \times 0.6\,\mu_0 I/h$ である。よって共振器のインダクタンスは $L = 0.6\pi\mu_0 R^2/h$ と求まる。題意のコンデンサーを平行板コンデンサーで近似すると、その電気容量は $C = \varepsilon_0 lh/d$ で与えられる。以上より、LC回路の周波数は

$$f_{est} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{0.6\pi R^2\mu_0}\frac{d}{\varepsilon_0 lh}} = \frac{1}{2\pi}\frac{c}{R}\sqrt{\frac{d}{0.6\pi l}} = \frac{1}{2\pi}\frac{3\cdot 10^8}{7\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{1}{3.6\pi}} = 2.0\cdot 10^9\ \mathrm{Hz}$$

となる。

A.2. (1.5 points)

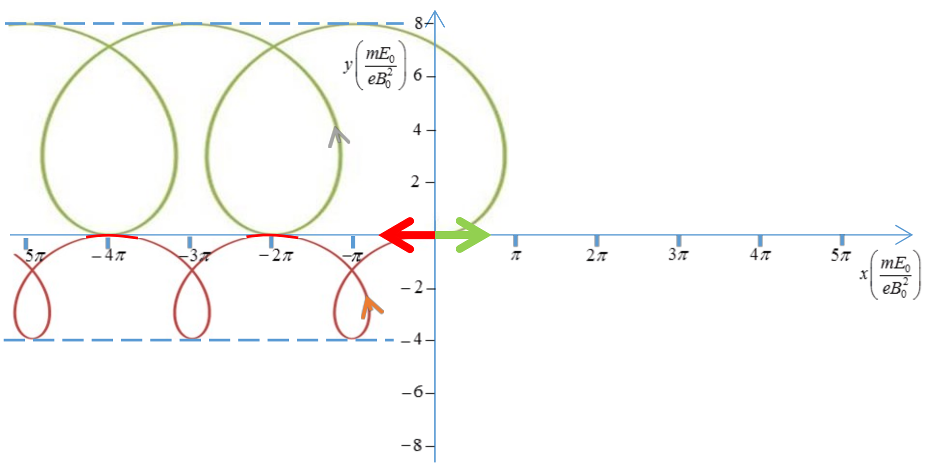
電子の速度を$\vec{u}(t)$と表す。このとき電子にかかる力は

$$\vec{F} = -e(-E_0\hat{y} + \vec{u}(t)\times B_0\hat{z})$$

と書ける。ここで$\vec{u}(t)$を、直交する電磁場中で荷電粒子がドリフトする速度（電場による力と磁場による力がちょうど打ち消し合うような速度） $\vec{u}_D = -E_0/B_0\hat{x}$ を用いて $\vec{u}(t) = \vec{u}_D + \vec{u}'(t)$ と表す。このとき $\vec{F} = -e\vec{u}'(t)\times B_0\hat{z}$ となる。このように、ドリフト速度$\vec{u}_D$で動く系から見ると、電子は一定の速さ $u' = |\vec{u}'(t)|$ で半径 $r = mu'/eB_0$ の円軌道を描くことがわかる。実験室系ではこれにドリフト速度 $\vec{u}_D$を加えればよいから、

1. t=0での電子の速度が $\vec{u}(0) = 3\mathrm{E}_0/B_0\hat{x}$ である場合： $u' = 4\mathrm{E}_0/B_0$, $r = 4mE_0/eB_0{}^2$
2. t=0での電子の速度が $\vec{u}(0) = -3\mathrm{E}_0/B_0\hat{x}$ である場合：$u' = 2\mathrm{E}_0/B_0$, $r = 2mE_0/eB_0{}^2$

円運動の周期が速さu'に依存しないことと合わせて、電子の軌道はそれぞれ以下のように書ける（緑線は1. の場合を、赤線は2. の場合を表している）。



A.3. (0.4 points)

電子の軌道が円形とみなせるような慣性系で見たとき、電子の速さは u' である。A.2. より $u_D + u' = v_{\max}$, $u_D - u' = v_{\min}$ なので、 $u' = (v_{\max} - v_{\min})/2 < v_{\max}$ が分かる。よってこの慣性系における電子の軌道半径について $r = mu'/eB_0 < mv_{\max}/eB_0$ が成り立つ。速さの最大値は運動エネルギーの最大値 $K_{\max} = \frac{1}{2}m{v_{\max}}^2 = 800\ \mathrm{eV}$によって決まるので、

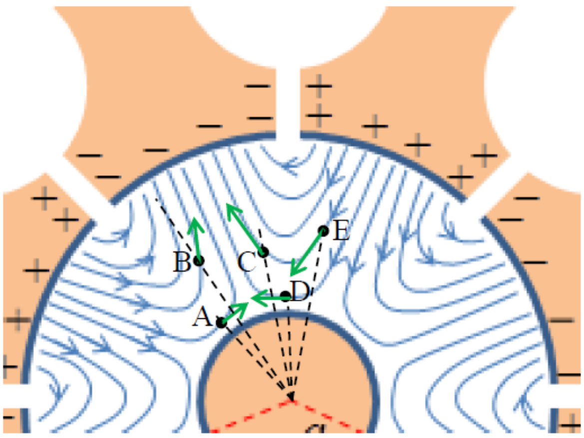
$$r < \frac{m}{eB_0}\sqrt{\frac{2K}{m}} = \frac{m}{eB_0}\sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{2mV}{e}} = \frac{1}{0.3}\sqrt{\frac{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 800}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 3.18 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$
$$\approx 0.3\ \mathrm{mm}$$

ここで得られた軌道半径の最大値は陰極ー陽極間距離よりも十分小さいため、円運動を無視し、電子の運動をドリフトのみで近似することができる。

A.4. (1.2 points)

前述の通り、電子の運動はドリフトのみで近似できる。A.2. で確かめたように、ドリフト$\vec{u}_D$は$\vec{E} \times \vec{B}$の方向に向かう。ドリフト速度のうち動径方向成分には電場の接線方向成分のみが寄与するが、静電場は接線成分を持たないので、考慮する必要があるのは交流電場のみである。図より、点Ａ・Ｂにおいて交流電場成分は時計回り方向、点Ｃ・Ｄ・Ｅにおいて反時計回り方向となっているから、磁場が紙面手前方向にかかっていることと合わせて、ドリフトの方向は次の表のようになる。

点	陽極方向	陰極方向	動径方向と完全に垂直
A		X	
B		X	
C	X		
D	X		
E	X		



A.5. (1.2 points)

本問では、ドリフト速度のうち接線方向成分のみを考えればよい。各点は全て陽極から等距離にあるので、感じる静電場は全て等しい。よって交流電場の動径方向成分のみが電子の位置ベクトルどうしのなす角の増減を決定づける。これが内向き（陰極方向）をならドリフト速度の接線方向成分は反時計回りに、外向き（陽極方向）なら時計回りになる。以上より、位置ベクトルどうしのなす角の増減は次の表のようになる。

点のペア	角度は減少する	角度は増加する	この条件だけでは決められない
AB	X		
BC	X		
CA	X		
DE		X	
EF		X	
DF		X	

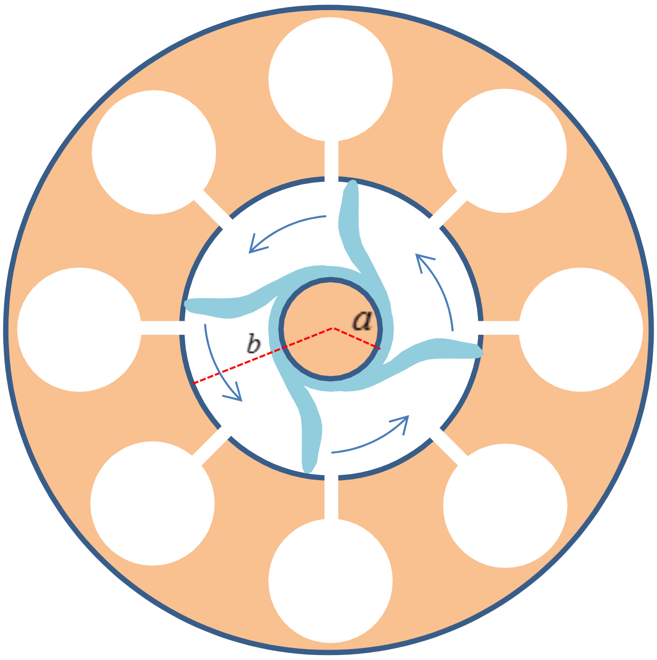
A.6. (0.8 points)

スポークは電子が集中する場所にできる。前問より、下図のように４つのスポークができることがわかる。電子のドリフト運動により、その回転方向は反時計回りであることがわかる。

交流電場の周波数は $f = 2.45GHz$ である。各スポークは、交流電場の向きが反転する半周期の間に、 $\pi/4$ 回転して次の空洞に移る。よって各スポークの角速度は

$$\omega = \frac{\pi}{4}/\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}f = 3.85 \cdot 10^9 \ \mathrm{rad/s}$$

となる。各スポークは交流電場４周期分の間にマグネトロンを１周する。



A.7. (1.1 points)

陰極と陽極の間のちょうど中間の位置 $r = (b + a)/2$ における電場の大きさは、その地点での静電場の大きさ $E = V_0/(b - a)$ に等しいから、ドリフト速度の接線方向成分は $u_D = E/B_0 = V_0/[B_0(b - a)]$ と書ける。u_D/r が前問で求めた角速度と等しいことから、 $V_0 = \pi f B_0(b^2 - a^2)/4$ がわかる。

Part B: マイクロ波と水分子の相互作用 (3.4 points)

B.1. (0.5 points)

時刻 t におけるトルクは $\tau(t) = -qd\sin[\theta(t)]\,E(t) = -p_0\sin[\theta(t)]\,E(t)$

と表される。よって電場から双極子に与えられる瞬間のエネルギーは

$$H_i(t) = \tau(t)\dot{\theta}(t) = -p_0E(t)\sin\theta(t)\,\dot{\theta}(t) = E(t)\frac{d}{dt}(p_0\cos\theta(t)) = E(t)\frac{dp_x(t)}{dt}$$

である。

B.2. (0.5 points)

双極子モーメント密度は電場に平行なので、単位時間あたりに吸収されるエネルギーの時間平均は

$$\begin{aligned}\langle H(t)\rangle &= \langle \sin(\omega_f t)\frac{dP_x}{dt}\rangle = \langle E_0\sin(\omega_f t)\frac{d}{dt}(\beta\varepsilon_0E_0\sin(\omega_f t - \delta))\rangle \\ &= {E_0}^2\beta\varepsilon_0\omega_f\langle \sin(\omega_f t)\cos(\omega_f t - \delta)\rangle = 0.5{E_0}^2\beta\varepsilon_0\omega_f\langle \sin\delta + \sin(2\omega_f t - \delta)\rangle \\ &= 0.5{E_0}^2\beta\varepsilon_0\omega_f\sin\delta\end{aligned}$$

B.3. (1.1 points)

深さ z における電磁場のエネルギー密度は、その点での電場のエネルギー密度の２倍に等しいから、$2\times\varepsilon_r\varepsilon_0\langle E^2(z,t)\rangle/2 = \varepsilon_r\varepsilon_0{E_0}^2(z)\langle\sin^2\omega t\rangle = \varepsilon_r\varepsilon_0{E_0}^2(z)/2$ である。よって、深さ z におけるエネルギー流速密度の時間平均は

$$I(z) = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0{E_0}^2(z)\times\frac{c}{n} = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_r}\varepsilon_0c{E_0}^2(z)$$

となる。ここで c は真空中での光速である。B.2. で計算したエネルギー損失を考えると、次の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\frac{1}{2}\beta\varepsilon_0\omega{E_0}^2(z)\sin\delta = -\frac{\beta\omega\sin\delta}{c\sqrt{\varepsilon_r}}I(z)$$

これを解いて $I(z) = I(0)\exp[-z\beta\omega\sin\delta\,/\,(c\sqrt{\varepsilon_r})]$

B.4. (0.6 points)

前問と同様に、エネルギー流速密度は

$$I(z) = \sqrt{\varepsilon_r}\varepsilon_0 c\langle E^2(z,t)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_r}\varepsilon_0 c {E_0}^2 e^{-z\omega\sqrt{\varepsilon_r}\tan\delta/c}$$

と求まる。B.3. の結果と比較して、$\tan\delta \approx \sin\delta$を利用すれば、$\beta = \varepsilon_r$ が分かる。

B.5. (0.7 points)

1. 前問の結果から、エネルギー流速密度の値が $z = 0$ における値の半分になるのは、

$$z_{1/2} = \frac{c\ln 2}{\omega\sqrt{\varepsilon_r}\tan\delta} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r}\ln 2}{\omega\varepsilon_l}$$

である。周波数と水の温度が分かっているので、グラフから読み取ると $\varepsilon_r \approx 78\,,\varepsilon_l \approx 10$ が分かるから、$z_{1/2} \approx 12\ \mathrm{mm}$となる。また、侵入長は $\sqrt{\varepsilon_r}/\varepsilon_l$に比例することがわかる。

2. 水の温度を増加させると、マイクロ波の周波数では ε_lの減り具合が明らかに$\sqrt{\varepsilon_r}$の減り具合よりも大きい。よって水の温度が増加すると、マイクロ波はより深くまで侵入して内側を温めることができる。

3. 反対に、スープを温めると、マイクロ波の周波数では ε_l が増加する一方 ε_r は減少する。よって侵入長は短くなり、マイクロ波は奥まで侵入することはできない。

物質	温度が増加すると$z_{1/2}$は増加する	$z_{1/2}$は減少する	$z_{1/2}$は変わらない
水	X		
スープ		X	