熱音響エンジン - 解答

Part A: 閉じた管の中の音波 (3.7 points)

A.1 境界条件は $u(0,t)=u(L,t)=0$ であるので、$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right)=0$ となり、したがって $\lambda_{max}=2L$ を得る。

A.2 微小部分の体積は

$$V(x,t)=S\{\Delta x+u(x+\Delta x,t)-u(x,t)\}=S\Delta x\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=V_0+V_0\frac{\partial u}{\partial x}$$

であるので、

$$V(x,t)=V_0+akV_0\cos(kx)\cos(\omega t)\qquad\Rightarrow\qquad V_1(x)=akV_0\cos kx$$

A.3 単位断面積あたりについての運動方程式より

$$\rho_0\Delta x\cdot\ddot{u}=-\{p(x+\Delta x,t)-p(x,t)\}\qquad\Rightarrow\qquad\rho_0\ddot{u}=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

であるので、

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_0 a\omega^2\sin kx\cos\omega t\qquad\Rightarrow\qquad p(x,t)=p_0-a\frac{\omega^2}{k}\rho_0\cos kx\cos\omega t$$

より $p_1(x)=a\frac{\omega^2}{k}\rho_0\cos kx$ を得る。

A.4 $pV^\gamma=\text{const.}$ の両辺を t で微分し $\alpha\ll L$ を用いて 2 次の微小項を落とすことで、

$$\frac{p_1}{p_0}=\gamma\frac{V_1}{V_0}$$

を得る。従って、

$$\frac{\rho_0\omega^2}{p_0k}=\gamma k\qquad\Rightarrow\qquad c=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

A.5 理想気体の状態方程式より、$T(x,t)$ の変化率は $p(x,t)$ と $V(x,t)$ の変化率の和に等しいので

$$T_1(x)=T_0\left(\frac{p_1}{p_0}-\frac{V_1}{V_0}\right)=(\gamma-1)T_0\frac{V_1}{V_0}=ak(\gamma-1)T_0\cos kx$$

A.6 管内の気体が動くことにより管と気体の境界で熱エネルギーがやり取りされる。今、この熱流の方向を定めるために **A.5** の結果および **A.1** で与えられた $u(x,t)$ の定義式を用いる。この 2 式より、$0<x<\frac{L}{2}$ では変位 $u(x,t)$ が正の時に気体の温度が下がり、逆に $\frac{L}{2}<x<L$ では変位 $u(x,t)$ が負の時に気体の温度が下がると分かるので、点 B の近くでは熱が気体に流れ込んで点 B の温度は下がり、点 A、点 C の近くでは熱が気体から放出されてそれぞれの温度は上がると考えられる。

Part B: 外部熱源との接触による音波の増幅 (6.3 points)

B.1 考えている微小部分が接しているスタックの位置は $x = x_0 + u(x_0, t)$ であるので、

$$T_{\mathrm{env}}(t) = T_{\mathrm{plate}}(x_0 + u(x_0,t)) = T_0 - \frac{\tau}{l}u(x_0,t) \qquad \Rightarrow \qquad T_{\mathrm{st}} = \frac{\alpha\tau}{l}\sin kx_0 = \frac{\alpha\tau}{l\sqrt{2}}$$

B.2 気体が $u(x_0,t) < 0$ の時接しているスタックよりも低温であり $u(x_0,t) > 0$ の時接しているスタックよりも高温であるならば、この気体は高温熱源から低温熱源へと熱を運ぶ。これは

$$T < T_{\mathrm{env}} \qquad \Rightarrow \qquad T_{\mathrm{st}} > T_1$$

の時に起こるので、**A.5** 及び **B.1** の結果を用いて、

$$\frac{\alpha\tau_{\mathrm{cr}}}{l}\sin kx_0 = ak(\gamma-1)T_0\cos kx_0 \qquad \Rightarrow \qquad \tau_{\mathrm{cr}} = kl(\gamma-1)T_0$$

B.3 熱力学第一法則より、

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt}$$

であるので、$c_v = \frac{1}{\gamma-1}RT$ より $E = \frac{1}{\gamma-1}pV$ であることを用いれば

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}(pV) + p\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\gamma-1}V\frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p\frac{dV}{dt} \approx \frac{1}{\gamma-1}V_0\frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p_0\frac{dV}{dt}$$

B.4 与えられた $\frac{dQ}{dt}$ の表式を **B.3** の結果に代入して、

$$\frac{1}{\gamma-1}V_0\frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p_0\frac{dV}{dt} = -\beta V_0(T_{\mathrm{st}} - T_1)\cos\omega t$$

これに与えられた p, V の表式を代入し $\cos\omega t, \sin\omega t$ の係数をそれぞれ比較して

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma-1}V_0 p_a\omega + \frac{\gamma}{\gamma-1}p_0 V_a\omega = -\beta V_0(T_{\mathrm{st}} - T_1) \\ \frac{1}{\gamma-1}V_0 p_b\omega - \frac{\gamma}{\gamma-1}p_0 V_b\omega = 0 \end{cases}$$

従って、まず V_b について

$$V_b = \frac{p_b V_0}{\gamma p_0}$$

を得る。また、V_a については、**B.1** と **B.2** の結果から得られる式

$$T_{\mathrm{st}} - T_1 = \frac{a}{l\sqrt{2}}(\tau - \tau_{\mathrm{cr}})$$

を代入すれば、

$$V_a = -\left(\frac{1}{\gamma}p_a + \frac{(\gamma-1)\beta a}{\gamma\omega l\sqrt{2}}(\tau - \tau_{\mathrm{cr}})\right)\frac{V_0}{p_0}$$

B.5 全気体のなす仕事 $V_0 w$ を積分 $\int p dV$ によって求め、その結果について長時間に渡って時間平均をとる。この式における p, V として **B.4** で与えられた (6) 式を用いれば、$\cos\omega t \sin\omega t$ の時間平均が 0、$\cos^2\omega t, \sin^2\omega t$ の時間平均が $\frac{1}{2}$ であることを踏まえて、

$$V_0 w = -\pi(p_a V_b + p_b V_a)$$

を得る。これに **B.4** の結果を代入すれば、

$$V_0 w = \frac{\pi(\gamma-1)\beta a}{\gamma\omega l\sqrt{2}}(\tau-\tau_{\rm cr})V_0\frac{p_b}{p_0}$$

となり、また微小な項を考慮しなければ、(6) 式を (3) 式と比較することで

$$p_b \approx p_1(x_0) = a\frac{\omega^2}{k}\rho_0\cos kx_0 = \frac{ak\gamma p_0}{\sqrt{2}}$$

だと分かるので、以上より

$$\begin{aligned} w &= \frac{\pi(\gamma-1)\beta a}{\gamma\omega l\sqrt{2}}(\tau-\tau_{\rm cr})\frac{p_b}{p_0} \\ &= \frac{\pi}{2\omega l}(\gamma-1)\beta(\tau-\tau_{\rm cr})ka^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\rm tot} &= Slw \\ &= \frac{\pi}{2\omega}(\gamma-1)\beta(\tau-\tau_{\rm cr})Ska^2 \end{aligned}$$

B.6 1 サイクルの間に運ばれる熱を計算するために、気体の微小部分に出入りする熱の量を計算し、それをその瞬間の微小部分の変位で重み付けする。これにより、微小部分により運ばれる熱の総量は、1 サイクルに渡って積分して

$$Q_{\rm tot} = \frac{1}{\Delta x}\int\left(-\frac{dQ}{dt}\right)udt$$

と書ける。従って、近似的な計算として与えられた表式 $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0(T_{\rm st} - T_1)$ と変位 $u(x_0,t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t$ を用いれば、

$$Q_{\rm tot} = \frac{\pi}{\omega\Delta x}\beta V_0(T_{\rm ct} - T_1)\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\omega}\beta S\frac{a}{l\sqrt{2}}(\tau-\tau_{\rm cr})\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\omega}\beta(\tau-\tau_{\rm cr})\frac{a^2 S}{l}$$

[翻訳時の補足] 問題文の Hint を用いれば，1 サイクルの積分で $Q_{\rm tot} = \frac{1}{\Delta x}\int Q\frac{du}{dt}dt$ $(*)$ と表される。右辺で $\int Q\frac{du}{dt}dt = \int\left(-\frac{dQ}{dt}\right)udt$ に注意すれば上の解となる。気体の微小部分が位置 u で熱 $-\frac{dQ}{dt}$ を出すことは $-\frac{dQ}{dt}$ を $x = x_0$ から u だけ運んだことになり，上の解ではこれを 1 サイクルに渡って積分している。(採点要領では $Q(t) = -\frac{1}{\omega}\beta V_0(T_{st} - T_1)\sin(\omega t) + Q_0$ を求め，$(*)$ により計算する解が想定されていた。)

B.7 B.5 と **B.6** の結果より、

$$\eta = \frac{W_{\rm tot}}{Q_{\rm tot}} = (\gamma-1)kl = \frac{\tau_{\rm cr}}{T_0} = \frac{\tau_{\rm cr}}{\tau}\cdot\frac{\tau}{T_0} = \frac{\tau_{\rm cr}}{\tau}\eta_c$$