1 Hidden Charge

1.1 x_Q と y_Q を求める

まず、電荷の x, y 座標を求める。2通りの方法を示す。

1.1.1 方法 1

初めに電子を射出する位置を適当にとって固定する。例えば、$(x_i, y_i) = (0, 0)$ とするのが良い。加速電圧を変化させて、スクリーンに当たる位置を何点か測定し、グラフにプロットする。それらの点を通る線を引いて、両側に伸ばす。電荷はこの直線上にある。

電子を射出する位置を変えて、同じことを行う。例えば、$(x_i, y_i) = (0, 10)$ とするのが良い。二つの直線の交点が電荷のおおよその位置を示す。

さらに電子を射出する位置を変える。初めの二つの直線とおおよそ垂直に交わる点を選ぶのが良い。例えば、$(x_i, y_i) = (0, -10)$ とするのが良い。3直線は一点で交わり、その点が電荷の座標 (x_Q, y_Q) を示す。

訳注

上の方法は以下のような事実に基づいている。クーロン力は中心力なので、散乱はある平面内で起こる。その平面は、電子ビームが初め z 軸の方向を向いていることから、直線 $(x, y) = (x_i, y_i)$ と点 (x_Q, y_Q, z_Q) を通る。この平面とスクリーンの交線が、上の方法で引いた直線に対応する。

また、直線を精度良く求めるためには、加速電圧として低いエネルギーのものと高いエネルギーのものを用いることで、(x_f, y_f) の幅を広くとることが重要である。さらに、高エネルギーの極限では $(x_i, y_i) \approx (x_f, y_f)$ となることを利用すると、電荷の位置を推定しやすい。

1.1.2 方法 2

この方法は方法1に比べて精度が悪い。x_i を適当にとって固定し、y_i を変化させ、y_f を測定する。ある y_i において、y_f が y_i とほとんど同じになり、その前後の値において、y_f が y_i から大きくずれるようになる。この $y_i \approx y_f$ となる値が y_Q である。y_i を固定して x_i を変化させ、同じことを行う。ただし、この方法は、電荷の位置がスクリーンの境界の外側にあるときはうまくいかないことに注意せよ!

この方法を用いた場合、満点は与えられない。

訳注

この方法を用いる場合、具体的には以下のように行うのが良い。まず、x_i を大きなステップで変化させて、b が小さくなる x_i を大雑把に見積もる。y_i についても同じことを行う。その次に、大雑把に見積もった値の周りで、x_i を細かいステップで変化させる。Rutherford の式から、b を変化させるとき、$b = 0$ 付近で θ が急激に変化することを用いて、x_Q の推定を行う。このとき、次の二つの場合が考えられる。

- 電子が全てスクリーン上で検出される場合、θ の変化が最大になるものを見つける。θ の変化は x_f や y_f の変化の仕方から知ることができる。この点が $x_f = x_Q$ の良い近似値となる。
- 加速電圧が低すぎると、散乱角度が大きすぎてスクリーンに当たらない測定点が現れる場合がある。このときは、当たっている前後の x_i の値の中間点が良い近似値となる。加速電圧を調整して、スクリーンに当たらない測定点が一点だけになるようにすると、その一点が x_Q の最も良い近似値となる。

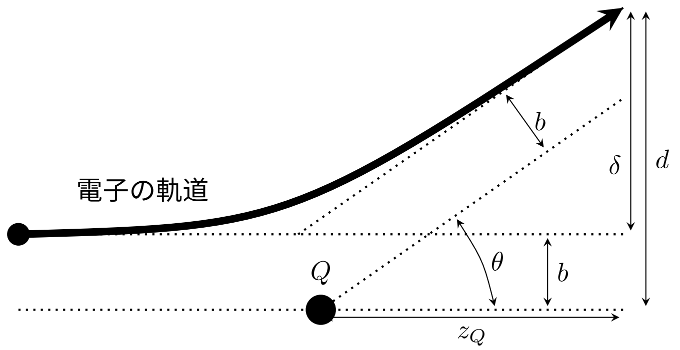
1.2 Q と z_Q を求める

Rutherford の式は以下の形に書ける。

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{kqQ}{2Eb}$$

一つの方法は、θ を適当に決めて固定し、E と b を変化させることである。もう一つの方法は、b を小さい値に固定し、E を変化させることである。どちらの方法にも良し悪しがある。

Rutherford 散乱についての図を以下に示す。



1.2.1 方法 1: θ を固定する

スクリーンとの距離 d は以下の式で与えられる。

$$d\cos\theta = z_Q \sin\theta + b$$

この式は、散乱の漸近線[1]においてのみ厳密に成立する。そうで無い場合、d の測定値は上の値より大きくなる。

θ を固定、つまり bE を固定して、b を縦軸、d を横軸にしてグラフを書く。グラフの傾きは $\cos\theta$ を表し、切片は $z_Q \sin\theta$ を表す。スクリーンからの距離であることが示されている限り、z_Q の符号は重要ではない。そこから Rutherford の式を用いて Q を求める。

b として小さな値を選ぶと、電子の軌道が漸近線に近づくため、良い結果を得ることができる。

方法 1A: δ に着目する

δ は直接測定できるので、この値に着目したほうが簡単だと思う人がいるかもしれない。この方法の問題点は、2本の漸近線の交点とスクリーンの距離は z_Q ではなく、$b/\tan(\theta/2)$ だけ遠いことである。この補正を無視すると、$\delta = z_Q \tan\theta$ という式が得られ、$z_Q Q$ の値だけを求めることができる。

補正を取り入れると、煩雑な式になる。

$$\frac{\delta}{\tan\theta} = z_Q + b\tan(\theta/2)$$

この関係式を簡単にしようとしても、大抵は上の方法と等価になり、$z_Q Q$ の値しか求められない。

[1] 訳注: 無限遠から入射したの電子の軌道と、無限遠に散乱されていく電子の軌道を直線で外挿したもののこと。

1.2.2 方法 2: b を小さな値に固定する

2つめの方法では、tan の二倍角の公式を用いる。

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$2\alpha = \theta$ とし、Rutherford の式と組み合わせると

$$\tan\theta = \frac{2\gamma E}{\gamma^2 E^2 - 1}$$

ただし $\gamma = 2b/kqQ$ である。b が d と比べて小さいとき、$\tan\theta \approx d/z_Q$ となる。これを組み合わせると、次の線形の式が得られる。

$$\frac{2E}{d} = \frac{\gamma}{z_Q}E^2 - \frac{1}{z_Q\gamma}$$

$2E/d$ を縦軸、E^2 を横軸にプロットすると傾きが γ/z_Q、切片が $1/z_Q\gamma$ の直線が得られる。この方法の難点は、電子ビームの初期位置の誤差である。b が小さいほど、b に比べて初期位置の誤差が大きくなる。もし電子ビームの初期位置に広がりがなかったとすると、この方法は $b \to 0$ の極限で厳密な解を与える。

方法 2A: δ に着目する

前と同様に、この方法は漸近線の交点とスクリーンの距離が b と θ の両方に依存する、という欠点がある。この誤差を無視すると、$2E/\delta$ を縦軸、E^2 を横軸にプロットして求めることができる。$b/\cos\theta$ だけの誤差は d の表式から取り除かれているが $b/\tan(\theta/2)$ だけの誤差が z_Q に加えられている。このとき、θ が小さいと精度が悪い。

ただし、もし電子ビームの初期位置に広がりがなかったとすると、$b \to 0$ の極限で厳密な解を与える。

1.2.3 方法3: $z_Q Q$ の値だけを求める

$\tan(\theta/2) = \delta/2z_Q$ という近似をすると、Rutherford の式は以下のように簡単になる。

$$\delta = \frac{kqQz_Q}{Eb}$$

δ を固定して（実現は困難だが!）、E または b を固定し、残った二つの変数を適当に組み合わせたものをプロットして直線を得る。ここから $z_Q Q$ の値を求めることができる。

この方法は、方法2の縦軸の切片を無視しても得られる。ただし、切片は外挿して得られるので誤差の影響を受けやすく、符号が間違って求まることもある。その場合は、学生の解答はここで終わってしまっていたようである。

1.3 採点基準

1.3.1 Part 1 (1点)

x_Q と y_Q の位置を求めることについて。

x_Q **と** y_Q **を求める**: 方法 1	
3本以上直線が引かれている (0.5点)、直線が2本 (0.3点)、直線が1本 (0.1p)	0.5
各直線に4つ以上の測定点がある (0.3点); 各直線に3つ (0.2点); 各直線に2つ (0.1点)。初期位置を測定点の一つとして数えて良い。	0.3
測定点が各直線の ≈1/3 を覆っている (0.2点); ≈1/5 を覆っている (0.1点)	0.2
part 1の合計	**1.0**

複数の直線の交点を用いて解いていて、各直線に測定点が二点だけあるとき、直線が2本だと0.4点、3本だと0.6点、4本だと0.7点、5本以上だと0.8点を与える。その後、測定点の広がりについて評価する。

x_Q **と** y_Q **を求める**: 方法 2	
方法 2を用いている	0.4
part 1の合計	**0.4**

1.3.2 Part 2 (3点)

x_Q と y_Q の正確さについて。

x_Q **と** y_Q **を求める**: どちらの方法でも共通	
x_Q が $5.3 \to 5.5$ cm の範囲 (1.0点); $5.2 \to 5.6$ cm (0.7点); $5.1 \to 5.7$ cm (0.4点); $5.0 \to 5.8$ cm (0.1点)	1.0
y_Q が $-2.5 \to -2.7$ cm の範囲 (1.0点); $-2.4 \to -2.8$ cm (0.7点); $-2.3 \to -2.9$ cm (0.4点); $-2.2 \to -3.0$ cm (0.1点)	1.0
x_Q と y_Q の値の両方が、真の値 $(5.4, -2.6)$ と比べて、答案に書いてある誤差の範囲内 (0.5点); 片方は誤差の範囲内、もう片方は誤差の2倍の範囲内 (0.3点); どちらも誤差の2倍の範囲内 (0.2点); 片方だけが誤差の2倍の範囲内 (0.1点)	0.5
x_Q と y_Q の誤差について、グラフまたは計算の結果を反映している正しい記述がある (0.5点); スクリーンの解像度 1mm またはビームの解像度 1mm のみを考慮している (それぞれに0.1点)	0.5
part 2の合計	**3.0**

1.3.3 Part 3 (1点)

データの取得、変数を求めるための予備的な計算について。

z_Q **と** Q **を求める**: どちらの方法でも共通	
b と d が求められる測定データがある	0.1
E のデータが示されている	0.1
初期状態、終状態における x と y のデータ	0.2
b を正しく計算しているデータ	0.1
d または δ を正しく計算しているデータ	0.1
8以上の測定点がある (0.4点); 4以上の測定点がある (0.3点)	0.4
part 3の合計	**1.0**

注: E の単位は J でも eV でもよい; もし電圧が E の場所に記録されていても、減点はない。初期状態と終状態の両方における x と y の値が正しく記録されていない場合、上記の0.2点は与えられない。初期状態における x または y の値を一定に保って測定している場合、その値を一度記録するだけでよいが、どの表に対応するか明記すること。“miss” の結果も記録されるべきだが、これは測定点の個数として数えない。“miss” が記録されていなくても減点はない。

1.3.4 Part 4 (2.5点)

解法を選択し、必要な式を導出して、グラフのプロットをすることについて。このセクションでは z_Q と Q の結果の正確さは問わない。それは part 5で評価する。

z_Q **と** Q **を求める**: 方法 1 または 1A	
d (または δ) と b の間の関係の正しい導出 (1.0点); 計算ミスまたは図のミスが1つ (0.6点); そのようなミスが2つ (0.2点); そのようなミスはないが物理的なミスが1つ (0.4点); 方法 1A で補正項を無視している場合は -0.5 点	1.0
bE が一定になるべきことに気付いている	0.3
b 対 d (または δ) のグラフ	0.6
グラフの傾きから $\cos\theta$ を求めている。ここでは正確さは問わず、それを実行していることに点を与える。	0.3
切片から z_Q を求めている。ここでは正確さは問わず、それを実行していることに点を与える。	0.3
part 4の合計	**2.5**

z_Q **と** Q **を求める**: 方法 2 または 2A	
E と d または δ の関係の正しい導出 (1.3点); 計算ミスまたは図のミスが1つ (1.0点); そのようなミスが2つ (0.4点); そのようなミスはないが物理的なミスが1つ (0.7点)	1.3
$2E/d$ (または $2E/\delta$) 対 E^2 のグラフ	0.6
グラフの傾きと切片から γ (またはそれに対応するもの) が求められている。ここでは正確さは問わず、それを実行していることに点を与える。	0.3
グラフの傾きと切片から z_Q (またはそれに対応するもの) が求められている。ここでは正確さは問わず、それを実行していることに点を与える。	0.3
part 4の合計	**2.5**

z_QQ **の値だけを求める**: 方法 3	
E と d または δ の関係の正しい導出 (1.3点); 計算ミスまたは図のミスが1つ (1.0点); そのようなミスが2つ (0.4点); そのようなミスはないが物理的なミスが1つ (0.7点)	1.3
δ 対 $1/E$、または δ 対 $1/b$、または E 対 $1/b$ のグラフ; ただし、残りの変数は一定に保っていること。	0.6
グラフの傾きから z_QQ (またはそれに対応するもの) を求めている。ここでは正確さは問わず、それを実行していることに点を与える。	0.3
part 4の合計	**2.2**

グラフは満点で0.6点であり、軸にラベルがないと各軸に対し -0.1 点、軸に目盛がないか、正しく目盛がふられてないと各軸に対し -0.1 点、プロット点が間違っていると各点に対し -0.1 点、フィット線が直線でないと -0.1 点である。ただし、点数がマイナスになることはない。

線形方程式を代数的に解いていて、グラフを書いていない場合: 線形回帰をしたことが明記されている (0.2点); 相関係数またはそれに対応するものがあってフィット線の良さ/正確さが評価されている (0.2点); 直線フィット (二次関数や指数関数などではなく) されていることが明記されている (0.2点)

方法 3だけを試みている場合、この part では満点は与えられない。

複数の方法を試みている場合、最も点が高くなる方法についての点数のみが与えられる。

1.3.5 Part 5 (2.5点)

z_Q と Q の結果の正確さの評価について。

z_Q **と** Q **を求める**: 方法 1 または 2	
$\lvert z_Q\rvert$ が $11 \to 12$ cm の範囲 (1.0点); $10 \to 13$ cm (0.7点); $8 \to 14$ cm (0.4点); $6 \to 20$ cm (0.1点)	1.0
Q が負	0.1
$\lvert Q\rvert$ が $70 \to 100$ pC の範囲 (0.9点); $50 \to 150$ pC (0.7点); $10 \to 500$ pC (0.4点); $1 \to 1000$ pC (0.1点)	0.9
z_Q と Q の値が、真の値 $\lvert z_Q\rvert = 11.5$ cm、$\lvert Q\rvert = 86$ pC と比べて、書かれている誤差の範囲内 (0.3点); 片方が誤差の2倍の範囲内 (0.2点); 誤差は書かれているが、どちらも誤差の範囲外 (0.1点)	0.3
z_Q と Q の誤差について、グラフまたは計算の結果を反映している正しい記述があり、偶然誤差と近似に伴う系統誤差の両方について記述している (0.2点); 偶然誤差または系統誤差の片方だけ記述している (0.1点)	0.2
part 5の合計	**2.5**

z_QQ **の値だけを求める**: どの方法でも共通	
Q が負	0.1
$\lvert z_QQ\rvert$ が $9.7 \to 10.1$ pCm の範囲 (0.9点); $9.5 \to 10.3$ pCm (0.7点); $9 \to 11$ pCm (0.4点); $5 \to 20$ pCm (0.1点)	0.9
z_QQ が真の値 $\lvert z_QQ\rvert = 9.9$ pCm と比べて、書かれている誤差の範囲内 (0.3点); 誤差の2倍の範囲内 (0.2点); 誤差が書かれているが、誤差の2倍の範囲内にない (0.1点)	0.3
z_QQ の誤差について、グラフまたは計算の結果を反映している正しい記述があり、偶然誤差と近似に伴う系統誤差の両方について記述している (0.2点); 偶然誤差または系統誤差の片方だけ記述している (0.1点)	0.2
part 5の合計	**1.5**

誤差の要因は (1) ビーム幅 0.5mm、(2) スクリーンの解像度 1mm、(3) tan の近似、(4) スクリーンにぶつかる時には漸近線と一致するという近似、(5) 漸近線の交点の近似である。初めの2つが偶然誤差、最後の3つが系統誤差である。

z_Q, Q と z_QQ を計算している場合、それぞれについて評価される (それぞれにつき1.0点) が、上記の二つのうち点数が高い方のみ与えられる。

2 Black box

２つのばねにはたらく張力をそれぞれ F_1、F_2 とする。箱の上面の高さを y_1 とし、２つのおもりの高さをそれぞれ y_2、y_3 とする (簡単のため、おもりには高さが無いとする)。a_1、a_2、a_3 を箱、および２つのおもりの加速度とする。そうすると、それぞれの物体の運動方程式は次の通りである (摩擦力は無視している):

$$m_1a_1 = F - F_1 - m_1g$$

$$m_2a_2 = F_1 - F_2 - m_2g$$

$$m_3a_3 = F_2 - m_3g$$

ばねは非線形なので、一般に $F_1 \neq k_1(y_1 - y_2)$ と $F_2 \neq k_2(y_2 - y_3)$ である。しかし、平衡点近くのわずかな変位に対しては $k_1 = \frac{\Delta F_1}{\Delta(y_1-y_2)}$ と $k_2 = \frac{\Delta F_2}{\Delta(y_2-y_3)}$ が成り立つ。

2.1 和 $m_1 + m_2 + m_3$ を求める

系が静止して平衡状態になっていれば、箱を吊り下げている力は系全体にはたらく重力 $F_0 = (m_1 + m_2 + m_3)g$ に等しい (同じ結果は、上の運動方程式に $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ を代入しても得られる)。

F_0 を測定するには、箱を静止させた状態 ($a_1 = 0$) で F の値を求める。その力の値が一定であることから、系は初期状態ですでに平衡状態になっていることがわかる。

初期状態の測定を10回繰り返して、その平均値をとると $F_0 \approx 14.774\,\mathrm{N}$ を得るので、

$$m_1 + m_2 + m_3 = \frac{F_0}{g} = \frac{14.774\,\mathrm{N}}{9.81\,\mathrm{N/kg}} \approx 1.506\,\mathrm{kg}.$$

正解: 1.506 kg.

和 $m_1 + m_2 + m_3$ を求める		
1a	$a_1 = 0$ のときに $F = g\sum m_i$ と気づく	0.5
1b	F_0 の測定 ($14.77 \pm 0.10\,\mathrm{N}$) 方針が立たずに測定だけでは０点	0.3
1c	$1.51 \pm 0.01\,\mathrm{kg}$ の範囲で $\sum m_i$ を求めている	0.2
	小計:	**1.0**

Note: $\sum m_i$ の値が正しくても、満点を取るためには F_0 の測定値が必要。測定値が無い場合には 0.7 点のみ。1c から、$\frac{F_0}{g}$ が質量の和であることを暗に使っていれば0.2点。

2.2 m_1 を求める

上述の運動方程式の第１式から $F = m_1a_1 + m_1g + F_1$ を得る。上のばねの力 F_1 は２つのおもりの位置にのみ依存する (そして、その力はすべての実験で最初の値は同じ) ので、箱をつるす力 F は、実験開始直後には加速度だけに依存する。

従って、加速を与えることによって最初に力がどのぐらい変化するか測定することで m_1 を求めることができる。最も高い精度を得るために、最大の加速度 ($30\,\mathrm{m/s^2}$) をかける。３回の測定の平均値は $F_{30} \approx 40.487\,\mathrm{N}$ となるので

$$m_1 = \frac{F_{30} - F_0}{a} = \frac{(40.487 - 14.774)\,\mathrm{N}}{30\,\mathrm{m/s^2}} \approx 0.857\,\mathrm{kg}.$$

よって $m_2 + m_3 = 0.649\,\mathrm{kg}$.

(さらに精度を上げるために、F_{30} と F_{-30} を測定して、その差から求めてもよい。)

正解: 0.857 kg.

m_1 を求める		
2a	$F = m_1a_1 + m_1g + F_1$ または等価な運動方程式 (F_1 が正しく $k_1(y_1 - y_2)$ で代入されていなくても0.5点)	0.5
2b	$m_1 = \frac{\Delta F}{\Delta a_1}$ に気づく。	0.5
2c	$\Delta a_1 \geq 10\,\mathrm{m/s^2}$ を使っている。	0.2
2d	m_1 が $0.857 \pm 0.002\,\mathrm{kg}$ の範囲内 m_1 が $0.857 \pm 0.010\,\mathrm{kg}$ の範囲内 m_1 が $0.857 \pm 0.050\,\mathrm{kg}$ の範囲内	0.8 0.6 0.3
	小計:	**2.0**

Note: 2c から、繰り返し測定をせずに自由落下 ($a_1 = -g$) を使った場合には 0 点。数回の測定によって全体的に良い精度で測定されている場合には $\Delta a_1 \geq 10\,\mathrm{m/s^2}$ であれば満点とする。

2.3 k_1 を求める

2.3.1 方法 1: 箱を素早く動かしたときの力の変化

箱を素早く加速し減速する（摩擦をさけるために)。箱の高さを素早く変えた直後には、下のおもりの位置はほとんど静止していると仮定できる。

(形式的には、$\Delta y_1 = \frac{a_1}{2}t^2$ ならば、$m_2a_2 = k_1\Delta y_1 - k_1\Delta y_2 - \Delta F_2 \leq k_1\Delta y_1$ であり、それゆえ $a_2 \leq \frac{k_1}{2m_2}t^2 \cdot a_1$ となる。この前提は $\frac{k_1}{2m_2}t^2 \ll 1$ なら成り立つ。)

それゆえ、箱を加速度 a_1 で時間 t の間加速し、その後、加速度 $-a_1$ で時間 t だけ減速すると、$\Delta F \approx k_1\Delta y_1 = k_1a_1t^2$ となる。

最高の精度を得るために、$a_1 = 30\,\mathrm{m/s^2}$ と $a_1 = -30\,\mathrm{m/s^2}$ の２種類の実験行う。さらに最短の時間間隔 $t = 0.01\,\mathrm{s}$ を使う。それぞれの実験を５回繰り返す。測定結果を平均して、時刻 $2t = 0.02\,\mathrm{s}$ での力 $F_\mathrm{u} \approx 14.890\,\mathrm{N}$ と $F_\mathrm{d} \approx 14.652\,\mathrm{N}$ を得る。よって、

$$k_1 \approx \frac{F_\mathrm{u} - F_\mathrm{d}}{2a_1t^2} = \frac{(14.890 - 14.652)\,\mathrm{N}}{2 \cdot 30\,\mathrm{m/s^2} \cdot (0.01\,\mathrm{s})^2} \approx 39.7\,\mathrm{N/m}$$

正解: 39.2 N/m.

k_1 を求める方法１		
3.1a	測定法の方針	0.5
3.1b	t が小さい場合、$\Delta y_1 \gg \Delta y_2$ に気づく。	0.5
3.1c	k_1 に対する正しい表式	0.5
3.1d	最低で3 回の測定	0.1
3.1e	$\Delta a_1 \geq 30\,\mathrm{m/s^2}$	0.2
3.1f	$2t \leq 0.08\,\mathrm{s}$	0.2
3.1g	k_1 が $39.2 \pm 1.0\,\mathrm{N/m}$ の範囲内 k_1 が $39 \pm 4\,\mathrm{N/m}$ の範囲内 k_1 が $39 \pm 8\,\mathrm{N/m}$ の範囲内 k_1 が $39 \pm 15\,\mathrm{N/m}$ の範囲内	1.0 0.7 0.4 0.2
	小計:	**3.0**

2.3.2 方法 2: 箱を加速しているときの力の変化

箱を一定の加速度 a_1 で加速すると、方法１と同様に短時間 t ならば $\Delta F \approx \frac{k_1a_1}{2}t^2$ となる。しかし、この方法は方法１に

比べて精度が悪い。なぜなら、a_1 が大きい場合には摩擦を無視できないし、a_1 が小さな場合には ΔF の測定分解能が追いつかない。

例えば、$a_1 = 30\,\mathrm{m/s^2}$、$t = 0.02\,\mathrm{s}$ として、５回の測定を平均する $F_{t=0} \approx 40.482\,\mathrm{N}$、$F_{t=0.02} \approx 40.792\,\mathrm{N}$ となるので、

$$k_1 \approx \frac{2\Delta F}{a_1 t^2} = \frac{2\cdot(40.792 - 40.482)\,\mathrm{N}}{30\,\mathrm{m/s^2}\cdot(0.02\,\mathrm{s})^2} \approx 51.7\,\mathrm{N/m}$$

これは正解より $\sim 30\%$ 程度大きい。なぜなら、$t = 0.02\,\mathrm{s}$ で箱にはたらく摩擦力はおよそ $0.08\,\mathrm{N}$ となるからである。

もっと良いパラメータは、$a_1 = 5\,\mathrm{m/s^2}$、$t = 0.02\,\mathrm{s}$ であろう。５回の測定の平均をとると $F_{t=0} \approx 19.058\,\mathrm{N}$、$F_{t=0.02} \approx 19.100\,\mathrm{N}$ なので、

$$k_1 \approx \frac{2\Delta F}{a_1 t^2} = \frac{2\cdot(19.100 - 19.058)\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{m/s^2}\cdot(0.02\,\mathrm{s})^2} \approx 42.0\,\mathrm{N/m}$$

この場合には摩擦力はずっと小さい (およそ $0.002\,\mathrm{N}$)。

k_1 **を求める方法 2**		
3.2a	測定法の方針	0.5
3.2b	t が小さい場合、$\Delta y_1 \gg \Delta y_2$ に気づく。	0.5
3.2c	k_1 に対する正しい表式	0.5
3.2d	最低 3 回の測定	0.1
3.2e	$2\,\mathrm{m/s^2} \le a_1 \le 10\,\mathrm{m/s^2}$	0.2
3.2f	$t \le 0.08\,\mathrm{s}$	0.2
3.1g	k_1 が $39.2 \pm 1.0\,\mathrm{N/m}$ の範囲内 k_1 が $39 \pm 4\,\mathrm{N/m}$ の範囲内 k_1 が $39 \pm 8\,\mathrm{N/m}$ の範囲内 k_1 が $39 \pm 15\,\mathrm{N/m}$ の範囲内	1.0 0.7 0.4 0.2
	小計:	**3.0**

Note: 根拠の無い正解、あるいは物理的に無意味な方法で正解を得ても 0 点とする。

2.3.3 方法 3: 平衡状態での $y_1 - y_2$ を見積もって $F_1 \approx k_1(y_1 - y_2)$ を利用

このばねは非線形であるが、$k_1 \approx \frac{F_1}{y_1 - y_2}$ の関係から k_1 の値を見積もることができる。この関係は、ばねが完全に線形であるなら正しい。

平衡状態では

$$F_1 = F_0 - m_1 g \approx 14.774\,\mathrm{N} - 0.857\cdot 9.81\,\mathrm{N} \approx 6.367\,\mathrm{N}$$

箱を下向きに素早く加速し、箱がおもり２に衝突するまでの時間 t を測定すると、$\Delta y_1 = \frac{a_1}{2}t^2$ から $y_1 - y_2$ の初期値を見積もることができる。

いろいろな数値を入れてみると、$|a_1| \ge 26.7\,\mathrm{m/s^2}$ の場合には $t \le 0.13\,\mathrm{s}$ であり、$|a_1| \le 26.6\,\mathrm{m/s^2}$ の場合には $t \ge 0.13\,\mathrm{s}$ とあることがわかる。

よって

$$y_1 - y_2 \approx \frac{26.7\,\mathrm{m/s^2}}{2}\cdot(0.13\,\mathrm{s})^2 \approx 0.226\,\mathrm{m}$$

また

$$k_1 \approx \frac{F_1}{y_1 - y_2} = \frac{6.367\,\mathrm{N}}{0.226\,\mathrm{m}} \approx 28.2\,\mathrm{N/m}$$

この方法は、ばねの非線形性のために、また、$y_1 - y_2$ の値を過大評価しているために (実際の値は $0.179\,\mathrm{m}$)、k_1 の値を過小評価してしまう.

k_1 **を求める。方法3**		
3.3a	測定法の方針	0.5
3.3b	$y_1 - y_2$ を正しく求めている	0.5
3.3c	k_1 を求められる正しい表式	0.5
	Total:	**1.5**

Note: この方法はあまり精度が良くないので、満点でも1.5点とする。距離 $y_1 - y_2$ を求めたとしても、それをどう使うのか方針が立っていない場合には0点とする。

目見当による k_1 の見積もり m_2 と m_3 の間が剛体として結合していると仮定し、ゆっくりした固有振動数を測定した場合、そのアイディアと定式化に対して 0.5+0.5点を与える (ただし、測定が実際に行われ、固有振動の妥当な周期を求め、そこから k_1 または $\frac{k_1}{m_2+m_3}$ を求めた場合に限る)。単に $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2+m_3}{k_1}}$ を書いただけでは 0点。

2.4 m_2, m_3 k_2 を求める

2.4.1 方法 1: 固有振動の振動数を求める

この方法は非常に精度が高いが、２つのパラメータを求めるための計算が結構大変になる。また、これによって、一方のパラメータが他の方法で求まっているなら、この方法で他方のパラメータを求めることができる。

最初に、箱を静止している状態で、系が固有振動しているときの振動数を求める。平衡点から変位 $x_2 = \Delta y_2$ と $x_3 = \Delta y_3$ は小さいとすると、

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2(x_2 - x_3)$$

$$m_3\ddot{x}_3 = k_2(x_2 - x_3)$$

$x_2 = A\cos(\omega t)$ と $x_3 = B\cos(\omega t)$ として上式を解くことができる。ここで A と B は定数である。

(あるいは複素数表示を用いてもよい: $\tilde{x}_2 = Ae^{i\omega t}$ と $\tilde{x}_3 = Be^{i\omega t}$。)

$\ddot{x}_2 = -\omega^2 A\cos(\omega t)$ と $\ddot{x}_3 = -\omega^2 B\cos(\omega t)$ となるので、

$$-m_2\omega^2 A\cos(\omega t) = -k_1 A\cos(\omega t) - k_2(A - B)\cos(\omega t)$$

$$-m_3\omega^2 B\cos(\omega t) = k_2(A - B)\cos(\omega t)$$

時間依存性は削除され、

$$-m_2\omega^2 A = -k_1 A - k_2 A + k_2 B$$

$$-m_3\omega^2 B = k_2 A - k_2 B$$

第２式より $B = \frac{k_2 A}{k_2 - m_3\omega^2}$, それを第１式に代入すると

$$-m_2\omega^2 A = -k_1 A - k_2 A + \frac{k_2^2}{k_2 - m_3\omega^2}A$$

予想通り、A は削除することができ (これは、固有振動の振動数は振動の振幅に依存しないため)、

$$-m_2\omega^2(k_2 - m_3\omega^2) + (k_1 + k_2)(k_2 - m_3\omega^2) - k_2^2 = 0$$

$$m_2 m_3\omega^4 - k_2 m_2\omega^2 - (k_1 + k_2)m_3\omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

$$\omega^4 - \left(\frac{k_2}{m_3} + \frac{k_1 + k_2}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_2 m_3} = 0$$

この4次方程式の解は、固有振動の角振動数である。その解 ω_1 と ω_2 がわかったとすると Vieta の公式（根と係数の関係）から

$$\frac{k_2}{m_3}+\frac{k_1+k_2}{m_2}=c_1$$

$$\frac{k_1k_2}{m_2m_3}=c_2,$$

ここで $c_1=\omega_1^2+\omega_2^2$ and $c_2=\omega_1^2\omega_2^2$。

そうすると

$$\frac{m_2}{k_1}+\frac{m_3}{k_2}+\frac{m_3}{k_1}=\frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{m_3}{k_2}=\frac{c_1}{c_2}-\frac{m_2+m_3}{k_1}$$

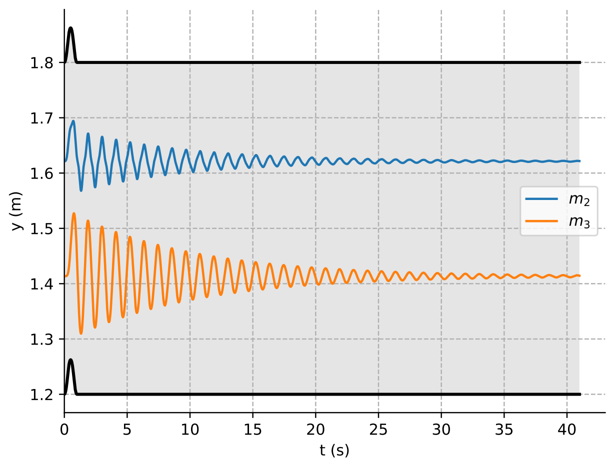
$$\frac{k_1}{m_2c_2}=\frac{c_1}{c_2}-\frac{m_2+m_3}{k_1}$$

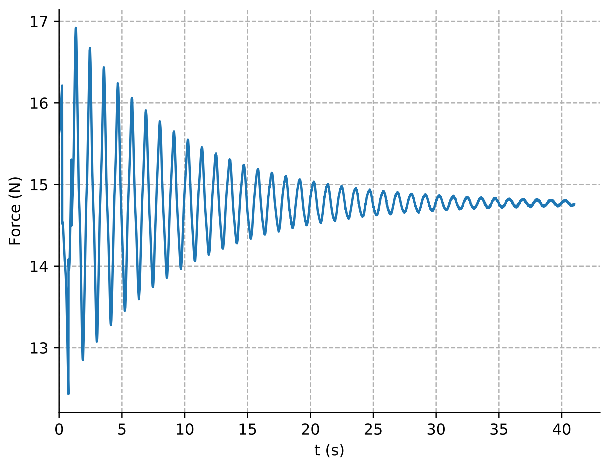
$$m_2=\frac{k_1^2}{c_1k_1-c_2(m_2+m_3)}$$

この式から m_2 を求めることができる。そうすれば、簡単に m_3 と k_2 も求められる。

固有振動の振動数を測定するには、箱をいくつかの異なる振動数で振動させ、その後、振動させるのを止め、その後、力が時間とともにどう変化するのか測定する。試行錯誤を繰り返して、２つの振動の周期を求めることができる $T_1\approx 1\,\mathrm{s}$ and $T_2\approx 0.4\,\mathrm{s}$.

小さい方の振動数を求めるには、箱に持続時間 1 s の加速度のパルスを与える。.

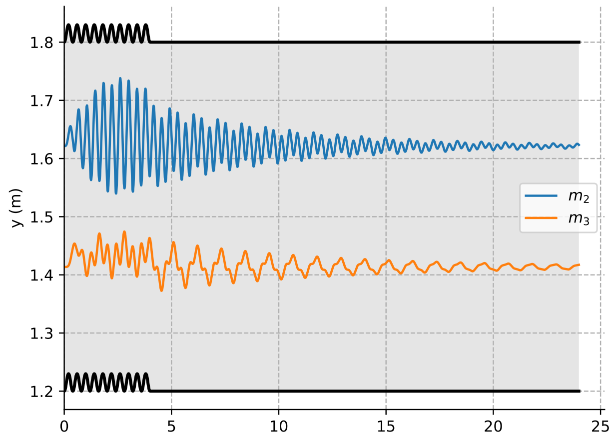


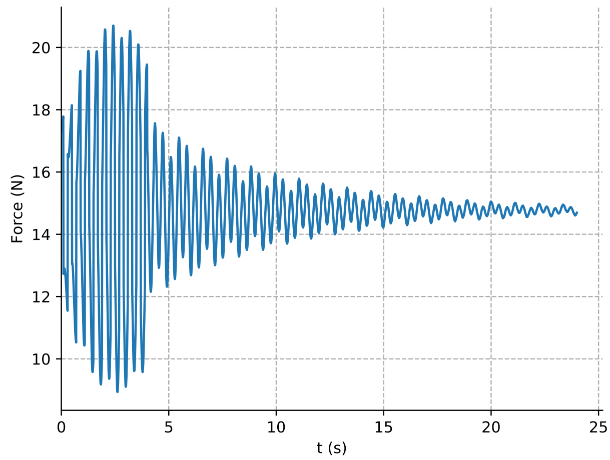


振動の周期を測るときには、（ばねの非線形性を避けるために）小さな振幅で振動させる必要がある。それによって

$$T_1=\frac{(34.70-20.27)\,\mathrm{s}}{13}\approx 1.11\,\mathrm{s}.$$

同様に、大きな値の方の振動数を求めるには、箱を振動させるか箱に短いパルスを与えて、力の振動の様子を調べる。





$$T_2=\frac{(20.00-9.94)\,\mathrm{s}}{27}\approx 0.373\,\mathrm{s}.$$

と求められる。

よって

$$\omega_1^2=\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\approx 32.04\,\mathrm{Hz}^2$$

$$\omega_2^2=\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\approx 283.8\,\mathrm{Hz}^2$$

c_1 と c_2 を計算すると m_2 を求めることができる:

$$c_1=\omega_1^2+\omega_2^2\approx 315.8\,\mathrm{Hz}^2$$

$$c_2=\omega_1^2\omega_2^2\approx 9093\,\mathrm{Hz}^4$$

$$m_2=\frac{k_1^2}{c_1k_1-c_2(m_2+m_3)}\approx 0.238\,\mathrm{kg}$$

$$m_3=0.649\,\mathrm{kg}-0.238\,\mathrm{kg}=0.411\,\mathrm{kg}$$

$$k_2=\frac{c_2m_2m_3}{k_1}\approx 22.4\,\mathrm{N/m}$$

正解: $m_2=0.236\,\mathrm{kg}$, $m_3=0.413\,\mathrm{kg}$, $k_2=22.6\,\mathrm{N/m}$.

2.4.2 方法 2: 短いパルス

方法 1 と同様に、k_1 の値を求めるには、時間 t の間に加速度 a_1 で箱を加速し、その後、時間 t の間に加速度 $-a_1$ で箱を減速する。このとき、時間 t が十分短いなら、箱が動いている間には y_2 はあまり変化しないと考えられるので $\Delta F_1 = \Delta F \approx k_1 \Delta y_1$.

また、パルスを与えた後、おもり 2 が動き始めても、短時間なら y_3 はほとんど変化しないと考えられる。

よって、おもり 2 が動き出す前には $m_2 a_2 = \Delta F_1 - \Delta F_2 \approx \Delta F_1$ となり、おもり 3 が動き出す前には $m_2 a_2 \approx k_1 \Delta y_1 - k_1 \Delta y_2 - k_2 \Delta y_2 = k_1 \Delta y_1 - (k_1 + k_2)\Delta y_2$ となる。

したがって、t が十分短い場合、t の直後には:

$$F - F_0 = \Delta F_1 \approx m_2 a_2 = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{m_2}{k_1}\frac{d^2 F_1}{dt^2} = -\frac{m_2}{k_1}\frac{d^2 F}{dt^2}.$$

この方法は方法 1 に比べれば精度が落ちる。なぜなら、多くの近似をしているし、摩擦力を無視しているし、F の測定分解能が良くないためである。この方法で精度を上げるためには最初に m_2 の値を見積もり、次に箱を加速している最中の Δy_2 を見積もるといいだろう。

理論的には、さらに精度が落ちるが k_2 の値も求めることができる。$\frac{d^2F}{dt^2} = 0$ のとき、$a_2 = 0$ となり、それから $k_1 \Delta y_1 \approx (k_1 + k_2)\Delta y_2$ となる。

できるだけ精度を上げるため、$a_1 = 30\,\mathrm{m/s^2}$ とする。t をできるだけ短くしたいが、F の測定分解能があまり良くないことを考えると、$t = 0.05\,\mathrm{s}$ とするのがよい。2 階微分をとるため高精度が必要なので、10回の測定の平均値をとる。その結果を下表に示す。

Time (s)	F (N)	$\frac{dF}{dt}$ (N/s)
0.10	12.572	
0.11	12.781	20.9
0.12	13.013	23.2
0.13	13.268	25.5
0.14	13.533	26.5
0.15	13.811	27.8
0.16	14.078	26.7
0.17	14.351	27.3
0.18	14.599	24.8

これから $t = 0.11\,\mathrm{s}$ のときに $\frac{d^2F}{dt^2} \approx 230\,\mathrm{N/s^2}$。よって、

$$m_2 \approx -\frac{(F - F_0)k_1}{\frac{d^2F}{dt^2}} = -\frac{(12.781 - 14.774)\,\mathrm{N} \cdot 39.7\,\mathrm{N/m}}{230\,\mathrm{N/s^2}}.$$

$$m_2 \approx 0.344\,\mathrm{kg}.$$

また、$F = 13.811\,\mathrm{N}$ のときに $t \approx 0.15\,\mathrm{s}$ で $\frac{d^2F}{dt^2} = 0$。よって $\Delta y_1 = a_1 t^2 = -30\,\mathrm{m/s^2} \cdot (0.05\,\mathrm{s})^2 = -0.075\,\mathrm{m}$。

$F = 13.811\,\mathrm{N}$ では、

$$\Delta(y_1 - y_2) \approx \frac{(13.811 - 14.774)\,\mathrm{N}}{39.7\,\mathrm{N/m}} \approx -0.024\,\mathrm{m},$$

となり、$\Delta y_2 \approx 0.051\,\mathrm{m}$ を得る。

$k_1 \Delta y_1 \approx (k_1 + k_2)\Delta y_2$ なので、

$$k_2 \approx k_1 \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} - 1\right) \approx 18.4\,\mathrm{N/m}$$

	m_2, m_3, k_2 を求める。方法は問わず	
4a	正しい方法	0.5
4b	m_2, m_3, k_2 を求められる正しい方程式	0.5
	m_2 と m_3 だけを求められる正しい方程式	0.3
4c	必要な測定	1.0
	方針は立っていないが自由振動の振動数（周期）を求めている場合	
	T_1 が $1.11 \pm 0.02\,\mathrm{s}$ の範囲内	0.3
	T_1 が $1.11 \pm 0.10\,\mathrm{s}$ の範囲内	0.1
	T_2 が $0.373 \pm 0.005\,\mathrm{s}$ の範囲内	0.3
	T_2 が $0.373 \pm 0.050\,\mathrm{s}$ の範囲内	0.1
4d	k_2 が $22.6 \pm 0.5\,\mathrm{N/m}$ の範囲内	1.0
	k_2 が $22.6 \pm 1.0\,\mathrm{N/m}$ の範囲内	0.8
	k_2 が $23 \pm 3\,\mathrm{N/m}$ の範囲内	0.6
	k_2 が $23 \pm 6\,\mathrm{N/m}$ の範囲内	0.4
4e	m_2 が $0.236 \pm 0.010\,\mathrm{kg}$ の範囲内、または m_3 が $0.413 \pm 0.010\,\mathrm{kg}$ の範囲内	0.9
	m_2 が $0.236 \pm 0.020\,\mathrm{kg}$ の範囲内、または m_3 が $0.413 \pm 0.020\,\mathrm{kg}$ の範囲内	0.6
	m_2 が $0.236 \pm 0.050\,\mathrm{kg}$ の範囲内、または m_3 が $0.413 \pm 0.050\,\mathrm{kg}$ の範囲内	0.3
4f	4e で得点している場合、m_2 から m_3 を正しく計算しているか、その逆を計算している	0.1
	Total:	**4.0**

Note: おもり 2 とおもり 3 に対する運動方程式を書いただけでは 0 点。ω に対する正しい 4 次方程式を導いたら 0.5 点（4a）。4b では、k_1、$m_2 + m_3$、ω_1、ω_2 を既知のパラメータとして、その 4 次方程式から $k_2, m_2,$ あるいは m_3 に対する正しい表式を求めたら得点を与える。ω^2 に対する正しい 方程式を導いた場合には部分点を与える (少し間違った表式の場合には0.4点、行列式を書いた場合には 0.2 点)。それらの式を解いて T_1 と T_2 を求めた場合には0.3点、解けなかった場合には0.1点を与える。ω に対する 4 次方程式を立てられた場合には0.1点を与える。T_1 と T_2 の値を同じ誤差で求められている場合にはそれぞれ0.5点と0.2点を与える。正しい答えが出ていても、その導出が無かったり、物理的におかしな方法で得ている場合には 0 点とする。

2.4.3 方法 3: 平衡状態で $y_2 - y_3$ を見積もって $F_2 \approx k_2(y_2 - y_3)$ を使って $\frac{k_2}{m_3}$ を求める

k_1 を求めるための方法 3 を使って $y_1 - y_2$ を求め、同様に箱を素早く上向きに加速することによって $y_3 - (y_1 - a)$ を求めることができる（ここで $a = 0.6\,\mathrm{m}$）。この方法では、おもりには高さが無いということを使う。

再び、いいろいろな数値を入れて実験すると、衝突する時間は $a_1 = 25.6\,\mathrm{m/s^2}$ では $t = 0.13\,\mathrm{s}$ となる。よって

$$y_3 - (y_1 - a) \approx \frac{a_1}{2} t^2 \approx 0.216\,\mathrm{m}$$

$$y_2 - y_3 = a - (y_1 - y_2) - (y_3 - y_1 + a)$$

$$y_2 - y_3 \approx 0.6\,\mathrm{m} - 0.226\,\mathrm{m} - 0.216\,\mathrm{m} \approx 0.158\,\mathrm{m}$$

$$\frac{k_2}{m_3} \approx \frac{g}{y_2 - y_3} \approx 62.1\,\mathrm{N/(kg\,m)}$$

実際の値は $y_2 - y_3 = 0.208\,\mathrm{m}$ と $\frac{k_2}{m_3} = 54.7\,\mathrm{N/(kg\,m)}$ である。

k_2/m_3 **を求める**		
4.1a	方針	0.5
4.1b	$y_3 - y_1 + a$ を正しく求めている	0.5
4.1c	k_2/m_3 を求める正しい表式	0.2
4.1d	k_2/m_3 が $55 \pm 10\,\mathrm{N/(kg\,m)}$ の範囲内	0.3
	Total:	**1.5**

Note: 方針を立てずに距離 $y_3 - y_1 + a$ を求めただけでは 0 点。