

第17回全国物理コンテスト 物理チャレンジ2021

第1チャレンジ 実験課題レポート

レポート表題

物体の並進運動・回転運動と働く力の関係

第1チャレンジ番号 : 2117024

氏名 : 三輪 栞太郎

学校名または

学校のある

卒業校名 : 石川県立金沢泉丘高等学校

都道府県名 : 石川県

学年 : 高等学校2年生 (中等教育学校5年生、高等専門学校2年生)

実験をした

補足

主な場所 : 学校・施設など (公的な場所)

(その他の場合) :

共同実験者1 氏名

第1チャレンジ番号

安田拓生

共同実験者2 氏名

第1チャレンジ番号

横川周慧

実験課題に取り組んだ感想

新型コロナウイルスの流行のさなか、満足に実験室が使えないこともありましたが、仲間と協力して何とか実験を遂行できたことをうれしく思います。また、去年参加した際には、実験方法は先生や先輩のアドバイスに従ったものでしたが、今年は自らオリジナルの実験方法を編み出すことができました。自身の成長を感じ、大変うれしかったです。

方法を考え始めた時期

5月

実験を始めた時期

5月

実験に取り組んだ期間

約 30 日間

# 物理チャレンジレポート 2021

## 物体の並進運動・回転運動と働く力の関係

石川県立金沢泉丘高等学校 2年 三輪 葉太郎

### 要約

力学において扱う物体の運動は、並進運動と回転運動の 2 種類に分けられ、いずれについても、運動状態の変化には力が関係する。今回は、並進運動と回転運動を同時に行う、斜面上を転がる物体の運動を解析し、これら 2 種類の運動と力の関係について考察した。

並進の運動方程式及び回転の運動方程式を実験的に示すことを目的とし、基本的に物体の重心の加速度に注目した実験を行った。

実験は 2 種類行い、一つ目の実験では位置センサを、二つ目の実験では独自の実験装置の下で、カメラを用いて物体の位置を時間追跡した。二つ目の実験では、映像から物体の回転における回転角も読み取り、物体と斜面の間の滑りも定量的に評価した。

実験結果からは並進の運動方程式及び回転の運動方程式の成立が示唆された。実験結果には一部理論とのずれが生じたが、その理由も論理的に推測した。

## 1. 実験の目的

斜面を転がる物体について、働く力と運動の関係を調べることが目的とする。物体の運動を調べるにあたっては、重心の位置および、基準に対する回転角に注目し、それらを時間追跡する。

また、物体は重さや形状の異なる複数について調べ、物体の運動と質量や慣性モーメントの関係について調べることも目的とする。

## 2. 実験

2種類の実験(実験 A・B)を行い、実験結果と理論的予測を比較、考察した。

実験 A では、位置センサによって物体の重心位置を、実験 B では、カメラによる撮影によって物体の重心位置と基準からの回転角を時間追跡した。

実験 A では、1つの鋼球について、運動を解析した。レール上を転がる球についてその重心位置を位置センサによって時間追跡した。

実験 B では、質量の異なる3つの球と、1つの円柱について運動を解析した。斜面と物体の間での滑りが無視できるような、摩擦係数の大きい硬質ゴムの斜面を用いた。運動する物体をカメラで撮影し、その位置と基準からの回転角を時間追跡した。

### 2-1. 実験 A 位置センサによる鋼球の重心運動の時間追跡

#### A-1 実験の目的

緩やかな斜面を転がる球の重心位置を時間追跡し、物体の並進運動・回転運動を記述する運動方程式の成立を確かめる。

#### A-2 実験の理論的根拠

剛体とみなせる物体について、

物体の並進の運動方程式は

$$ma = F \quad (\text{式 a-1})$$

[ $m$ は質量、 $a$ は重心の加速度、 $F$ は物体に働く力の合力]

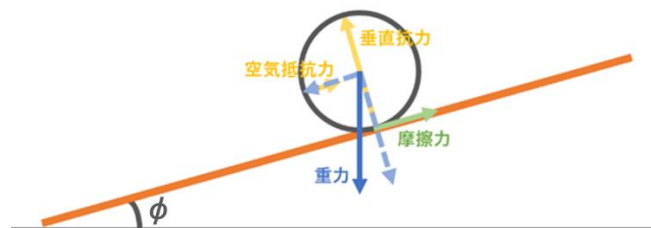
回転の運動方程式は

$$I\alpha = N \quad (\text{式 a-2})$$

[ $I$ は慣性モーメント、 $\alpha$ は回転における角加速度、 $N$ は回転軸を軸としたトルク]

と表せる。

これらを用いて、レール上を転がる物体について考える。図1は、実験系を表した模式図である。斜面の傾斜方向に平行な面で切った断面図を示した。



物体とレールの変形はともに無視できるとし、レールと垂直な方向に、物体は運動しな

いとす。また、レール上を転がる球は一直線上を運動するとする。よって、物体に働く力について、斜面に平行な方向の成分のみに注目し一次元の運動として考えればよい。

まず、物体に働く力の合力について考える。図 1 に示した通り、物体に働く、斜面に平行な成分を持つ力は、重力・摩擦力・空気抵抗力となる。ここで、空気抵抗力は十分に小さいとして無視する。

重力の大きさを  $W$ 、摩擦力の大きさを  $f$ 、斜面の傾斜角を  $\varphi$  とすると、物体に働く力の、斜面に平行な成分の和は、 $W - f$  となる。

式 a-1 を用いると、斜面を転がる物体における並進の運動方程式、

$$ma = W \sin \varphi - f \quad (\text{式 a-3})$$

が得られる。

ここで物体の質量を  $m$  とすると、 $W = mg$  より、式 a-3 は次のように書き換えられる。

$$ma = mg \sin \varphi - f \quad (\text{式 a-4})$$

次に、物体にかかるトルクについて考える。物体の回転半径を  $R$  とすると、回転軸を軸としたトルクは、 $N = Rf$  となる。(摩擦力は半径方向と直交する方向に働くため。)

よって式 a-2 は、

$$I\alpha = Rf \quad (\text{式 a-5})$$

と書き換えられる。

実験 A は、式 a-1 および式 a-2 の成立、より具体的には式 a-4 と式 a-5 の成立を確かめることを目的としているが、式 a-4 および式 a-5 には、大きさを測定(もしくは理論的に予測)しにくい摩擦力の項が含まれるため、成立を確かめるのが非常に難しいと考えた。

そこで、両式を連立し、摩擦力の項を消去した式、

$$ma = mg \sin \varphi - \frac{I\alpha}{R} \quad (\text{式 a-6})$$

について考えることとした。

また、球とレールの間に生じる滑りは、傾斜が小さい緩やかな斜面の場合小さく、無視できるのではないかと考えた。

物体と斜面の間に滑りが生じない場合、回転した周の長さと、重心の変位が一致するので、

$$R\omega = v$$

[ $\omega$  は角速度、 $v$  は重心の速度]

が成立し、両辺を時間で微分して

$$R\alpha = a \quad (\text{式 a-7})$$

が成り立つ。

式 a-7 が成立する場合(物体と斜面の間に滑りが生じない場合)、式 a-7 と式 a-6 を連立して、

$$ma = mg \sin \varphi - \frac{al}{R^2}$$

が得られ、これを  $a$  について解くと

$$a = \frac{g \sin\phi}{1 + \frac{I}{mR^2}} \quad (\text{式 a-8})$$

となり、右辺は時間変化しないため、物体は等加速度運動をするといえる。

ここで、物体の(重心の)変位を  $x$  とすると、初速度が 0 ならば

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

式 a-8 を代入して、

$$x = \frac{1}{2} \frac{g \sin\phi}{1 + \frac{I}{mR^2}} t^2 \quad (\text{式 a-9})$$

[ $t$ は物体が運動し始めてからの時間]

となる。

物体の変位と時間の 2 乗の関係を示す  $x-t^2$  グラフが直線となった場合、その傾きの 2 倍が加速度となる。

### A-3 実験の方法

- 測定器具

本実験で用いた器具は以下の通りである。



写真 1

ノギス：写真 1

最小目盛り 0.5 mm のものを用いた。



写真 2

差し金：写真 2

30 cm まで測定でき、最小目盛り 1 mm のものを用いた。





写真 3

物差し：写真 3

1 m まで測定でき、最小目盛り 1 mm のものを用いた。



写真 4

電子天秤：写真 4

1/1000 g まで測定でき、測定誤差  $\pm 0.01$  g のものを使用した。



写真 5

距離センサ：写真 5

NaRiKa 社のデータロガーであるイージーセンスの付属品。

測定範囲：距離 0.15～10 m、時間 1,000～60,000  $\mu$ s

分解能：距離 1 mm、時間 1  $\mu$ s

(NaRiKa イージーセンスカタログより)

超音波により反射波の戻ってくる時間から距離を計測する。



写真 6



写真 7

レール(斜面) : 写真 6

レールはアルミニウム製。レール内幅は $(4.3 \pm 0.05) \times 10^{-3}$  m。

(ノギスで 5 回測定した平均値を使用し、測定誤差は 0.05 mm とした。 : 写真 7)



写真 8


スタンド(写真 8)



写真 9

実験用ジャッキ(写真 9)

実験にて運動を解析した物体は次のとおりである。

	写真	素材	直径 /m	質量 /kg
球 A	 写真 10	鋼	$(29.5 \pm 0.05) \times 10^{-3}$ (ノギスで 5 回測定した平均)	$(110.015 \pm 0.01) \times 10^{-3}$

- 測定方法

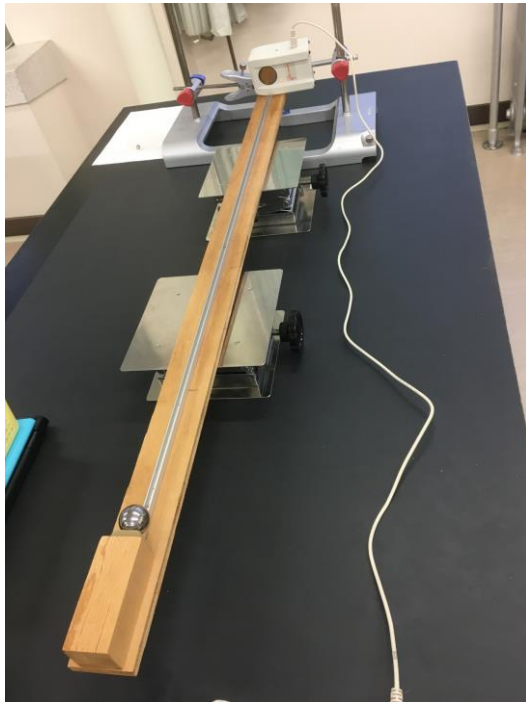


写真 11

写真 11 のような実験装置を組み立て、レールの上から球 A を転がした。転がし始めでは、球 A から静かに手を放し、初速度を与えないようにした。

距離センサにより、センサと鋼球の間の距離を 0.3 秒ごとに測定した。センサと小球の初距離は 12.3 cm とし、距離が 52.3 cm を超えるまで測定した。

なお、センサからの超音波を反射する(位置座標を時間追跡する)のは球 A の重心ではなく後端であるが、球 A が変形しないとすれば、球 A の重心と後端は同じ動きをするので、後端の位置座標を時間追跡しても差し支えないと考える。

斜面の傾きの大きさは床面(水平とする)とレールのなす角で指定し、2 台の力学台の高さを調節することで変化させる。本実験では、

$\sin\varphi = (3.68 \pm 0.05) \times 10^{-2}, (8.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}, (13.5 \pm 0.05) \times 10^{-2}$   
の 3 段階の角度で実験を行い、各角度において 5 回実験を行った。

#### A-4 実験の仮説

A-2 における

$$x = \frac{1}{2} \frac{g \sin\varphi}{1 + \frac{I}{mR^2}} t^2 \quad (\text{式 a-9})$$

が成立し、変位と時間の 2 乗が比例すると考えられる。

その際の比例係数は  $\frac{1}{2}a$  となり、その値は

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \frac{g \sin\varphi}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$



となると考えられる。

またここで、実験 A の結果として予測される、各傾斜  $\varphi$  における加速度  $a$  の理論値を算出する。

まず重力加速度  $g$  については、平成 29 年理科年表を参照すると

$$g = 9.79819198 \text{ m/s}^2$$

となるが、

この値はブーゲー補正、フリーエア補正、地形補正などの重力補正を行わずに計算した(地学[6]を参照した)ものである。泉丘高等学校の標高は 27 m ほどであるため、重力加速度の値は

$$g = 9.79819198 \pm 0.0001 \text{ m/s}^2$$

と表せる。

次に球 A について、

質量は

$$m = (110.015 \pm 0.01) \times 10^{-3} \text{ kg}$$

回転半径は

$$R = (14.6 \pm 0.05) \times 10^{-3} \text{ m}$$

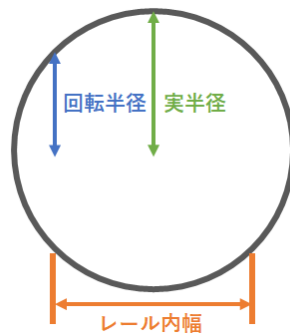
実半径は

$$R' = (14.8 \pm 0.05) \times 10^{-3} \text{ m}$$

球 A において質量はすべて一様に分布しているとし、慣性モーメントは、球では  $\frac{2}{5}mR'^2$  であるとする(導出は省く)。ゆえに、

$$I = \frac{2}{5}mR'^2 = (9.57 \pm 0.07) \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ kg}$$

なお、実半径と回転半径の違いは以下の図の通りである。



また、慣性モーメントの有効数字は回転半径のものに合わせて 3 桁とし、誤差範囲は最大誤差を考えて  $\pm 0.07 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ kg}$  とした。(誤差範囲の有効数字は 1 桁)

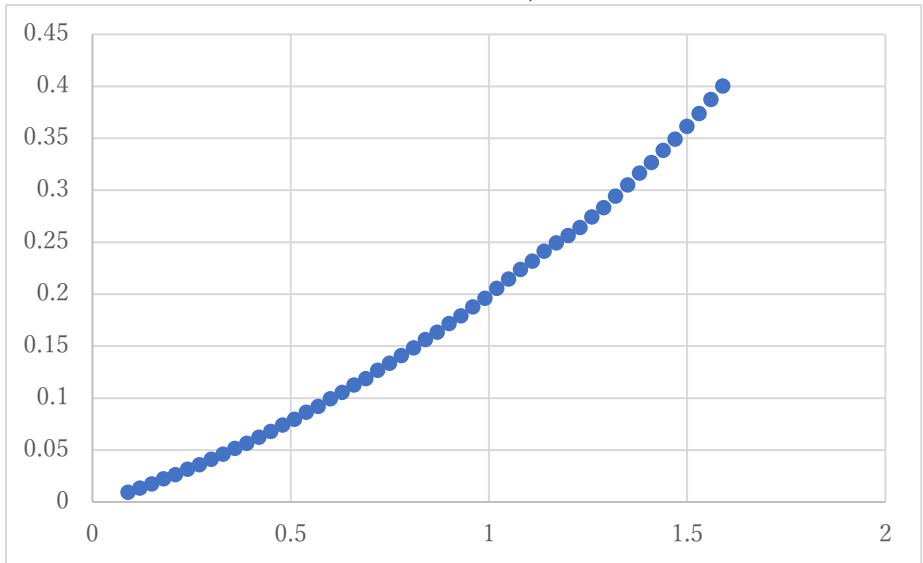
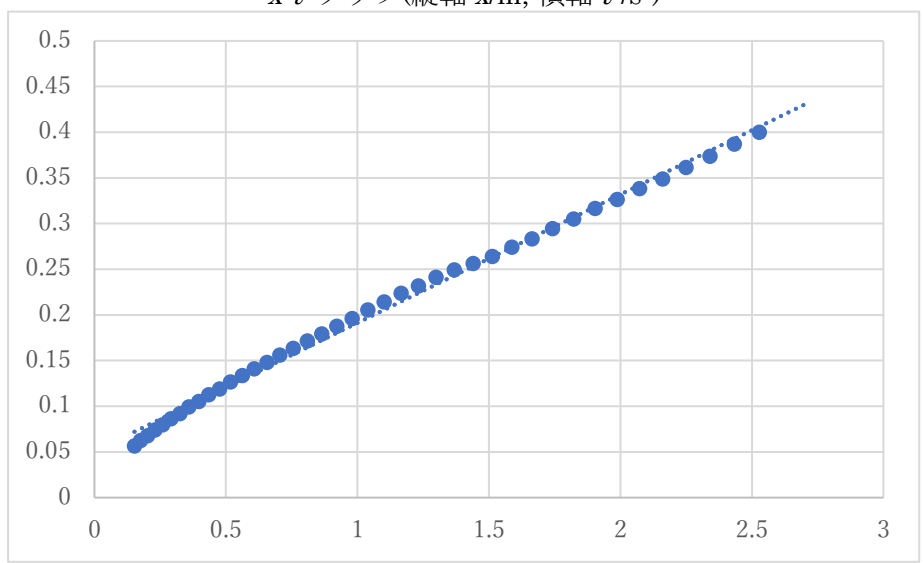
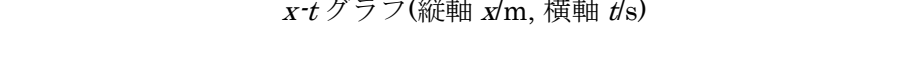
以上より、球の加速度の理論値は各傾斜において以下のようにになると予想される。

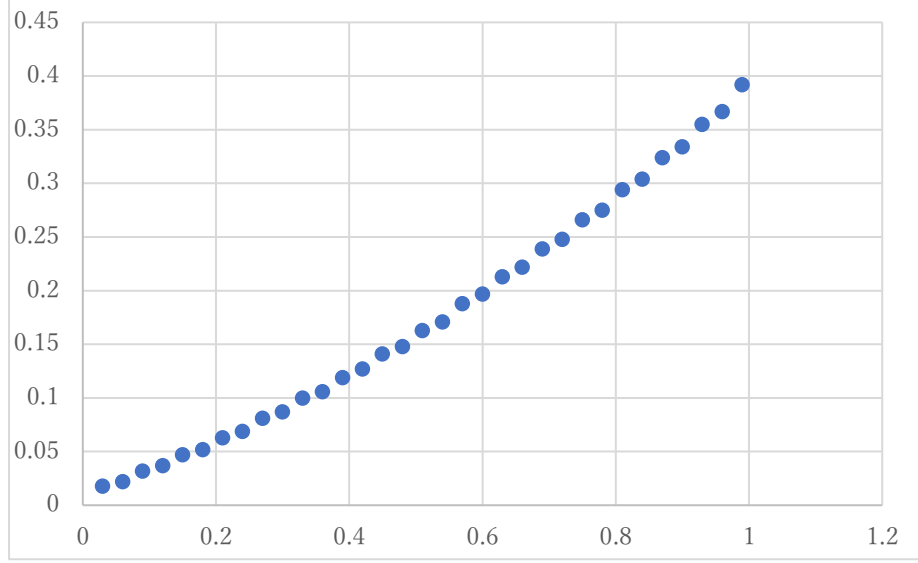
$\sin\varphi$	$a/\text{ms}^{-2}$
$(3.68 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(25.6 \pm 0.5) \times 10^{-2}$
$(8.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(55.6 \pm 0.5) \times 10^{-2}$
$(13.5 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(93.9 \pm 0.5) \times 10^{-2}$

誤差範囲については最大誤差を考えた。

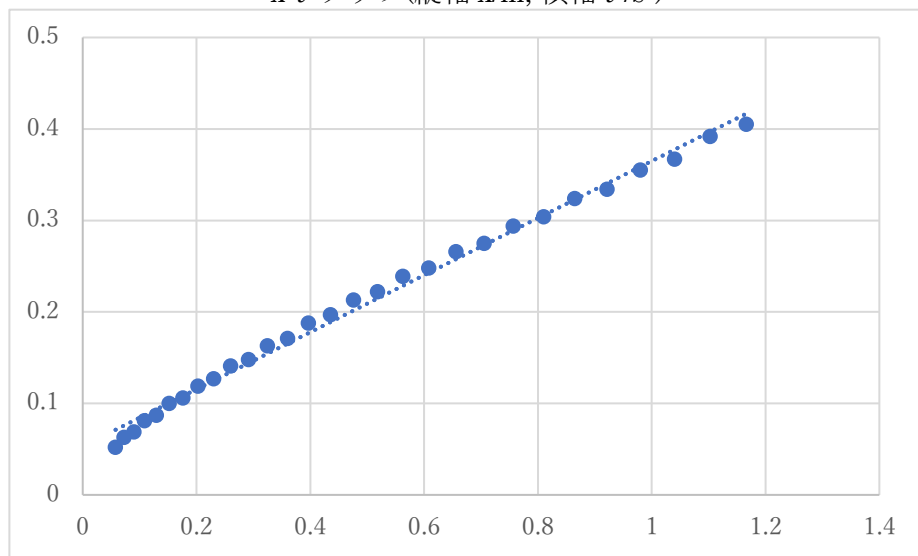
### A-5 実験の結果

以下に示したのは、各傾斜における変位  $x$  と時間  $t$  の関係を示した  $x-t$  グラフおよび  $x$  と  $t^2$  の関係を示した  $x-t^2$  グラフである。なお、同条件での実験はそれぞれ 11 回行ったが、以下のグラフにおける  $x$  は各秒において 11 回の測定の平均をとったものである。

$\sin\phi$	グラフ
$(0.92 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$x-t$ グラフ(縦軸 $x/m$ , 横軸 $t/s$ ) 
	$x-t^2$ グラフ(縦軸 $x/m$ , 横軸 $t^2/s^2$ ) 
$(2.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$x-t$ グラフ(縦軸 $x/m$ , 横軸 $t/s$ ) 

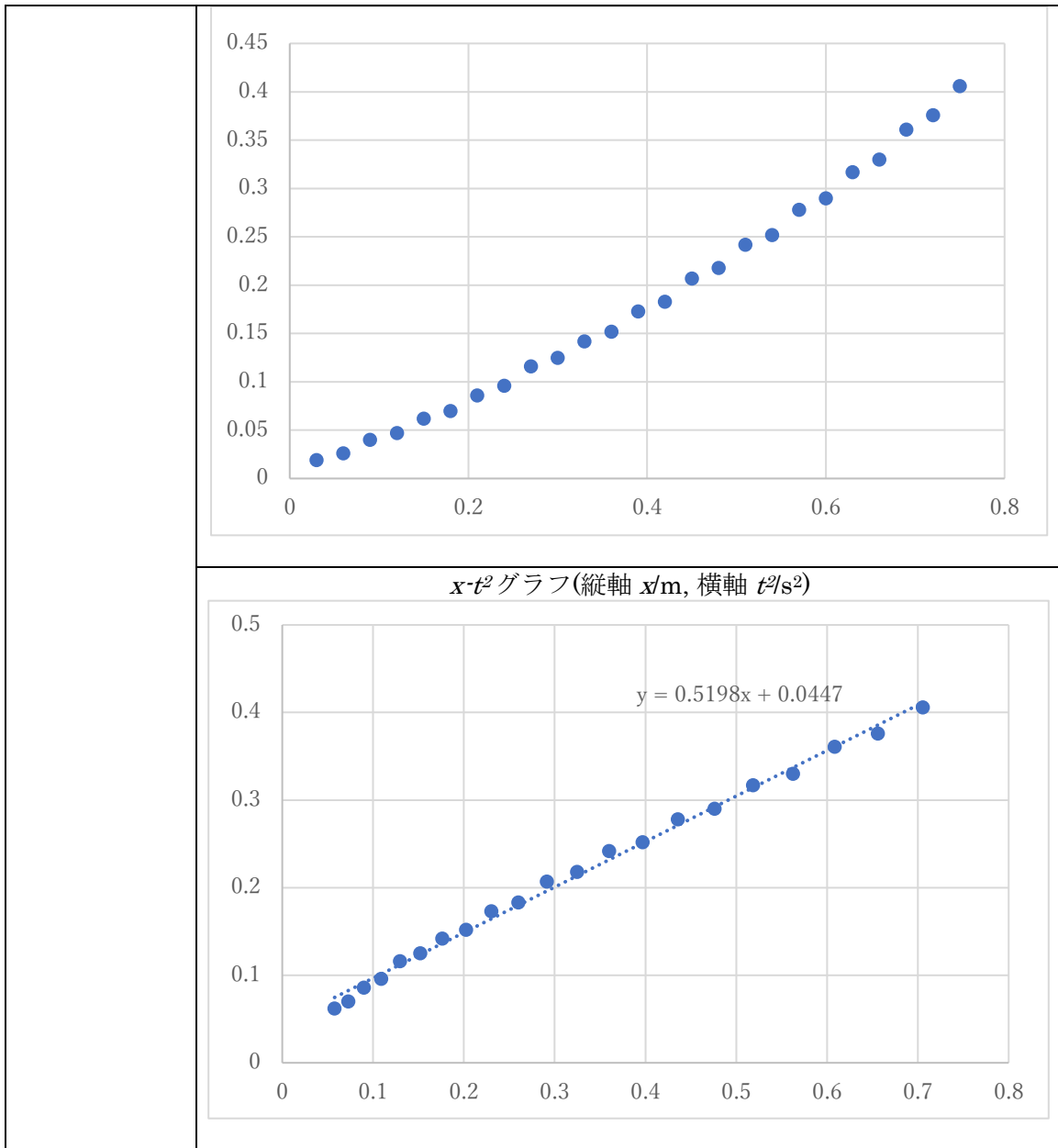


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )



$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(3.38 \pm 0.05) \times 10^{-2}$



以下には、 $x-t^2$  グラフにおける近似曲線の傾きから算出した、球の加速度(11回の測定での平均)を示した。標準誤差は、各条件における 11 回の測定について、それぞれ加速度を求め、そこから算出した。なお、標準誤差の誤差は、試行回数  $n$  としたとき、 $1/\sqrt{(2n-1)}$  と表され、試行回数 11 回の場合は  $\frac{1}{\sqrt{21}} \cong 22\%$  となる。よって、標準誤差の有効数字は一桁とする。また、測定値の分布は正規分布に従うとして、95%信頼区間を算出した。

$\sin\varphi$	$a/ms^{-2}$	標準誤差 $\sigma/ms^{-2}$	95%信頼区間/ $ms^{-2}$
$(3.68 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.281	0.004	0.273~ 0.289
$(8.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.623	0.004	0.615~ 0.631

$(13.5 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	1.04	0.005	1.03~ 1.05
----------------------------------	------	-------	---------------

## A-6 実験の考察

- (1)  $x-t^2$  グラフはいずれの傾斜においてもほぼ直線となり、変位は時間の 2 乗に比例したとわかる。つまり、球は等加速度運動をしたとわかる。
- (2) 加速度の理論値と測定値を以下に示した。また、

$$(\text{ずれ}) = \frac{(\text{測定値}) - (\text{理論値})}{(\text{理論値})} \times 100$$

を定義し(ずれの単位は%)、これを示した。

$\sin\varphi$	理論値 $a/\text{ms}^{-2}$	測定値 $a/\text{ms}^{-2}$	ずれ/%
$(3.68 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(25.6 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(28.1 \pm 0.8) \times 10^{-2}$	+9.77
$(8.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(55.6 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(62.3 \pm 0.8) \times 10^{-2}$	+12.1
$(13.5 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(93.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(104 \pm 1) \times 10^{-2}$	+10.8

測定値の誤差範囲に理論値は含まれない。これより、理論値と測定値には有意な差があるといえる。また、いずれの傾斜においても、加速度の理論値よりも、測定値は大きくなった。

- (3) 理論値よりも測定値が大きくなったのは、理論値は物体とレールの間に滑りが生じないとして算出したのにもかかわらず、実際には滑りが生じてしまったことが原因ではないかと推測できる。(滑りが生じると加速度が大きくなるのは、滑りが生じる場合、A-2 における式 a-7 が成立せず、 $R\alpha < a$  となり、これを等式とした時よりも加速度が大きくなるからである。)

しかし、仮に滑りが生じるとすれば、球は一般に等加速度運動をしないと考えられるのに対し、実験において球は等加速度運動をした。この理由としては、滑りによる加速度の増加と空気抵抗による加速度の減少が偶然釣り合ったなどの原因が考えられるが、空気抵抗は微小であることや、滑りの大きさを定量的に評価できていないことから、これ以上の考察は無意義であると考えられる。

- (4) 実験 A における反省点としては、センサの性能上測定できる範囲が狭く、データの量が少なくなってしまうこと、滑りの有無が明確ではないことがあげられる。次の実験 B では、広範囲(長時間)の観察のために位置センサによる測定ではなく映像解析を行い、滑りの有無を明確にするために回転角の観察も行った。

## 2-1. 実験 B ゴム斜面上を運動する物体の運動の時間追跡

### B-1 実験の目的

ゴム斜面上を転がる球の重心位置と基準からの回転角をカメラでの撮影によって時間追跡し、斜面と物体間の滑りの有無を明確にしたうえで、物体の並進運動・回転運動を記述する運動方程式の成立を確かめる。

## B-2 実験の理論的根拠

実験 B の理論的根拠は、実験 A のものと同じである。物体と斜面の間に滑りが生じない場合、

$$x = \frac{1}{2} \frac{g \sin \phi}{1 + \frac{I}{mR^2}} t^2 \quad (\text{式 a-9})$$

が成立する。

実験 B ではこの理論について、滑りの大きさを定量的に示しながら考察する。

## B-3 実験の方法

### ● 測定器具

本実験で用いた器具は以下の通りである。

<実験 A でも用いた測定器具>

電子天秤・定規・スタンド・実験用ジャッキ・ノギス  
写真や誤差範囲は A-3 に示した。

<実験 B で初めて用いた測定器具>



写真 12

### iPhone11(写真 12)

本実験では特に、純正アプリ「カメラ」を用いて、30fps で物体を撮影した。



写真 13

スマートカート(写真 13)

分解能：距離 0.2mm、時間 0.01s

(島津理科ホームページより)

0.01s ごとに変位を測定可能である。



写真 14

斜面(写真 14)

表面を硬質ゴムでおおわれている。

表面のゴムは弾性体であるが、硬質なものを用いたため、球の荷重による変形は十分に無視できると考えた。



写真 15

木片(写真 15)





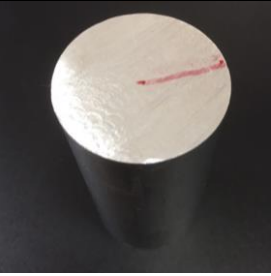
写真 16

糸(写真 16)

<実験で用いた物体>

以下にまとめた。なお、直径はノギスで 5 回測定した平均値をとったため誤差は $\pm 0.05\text{mm}$ とし、(表示は省く。)質量は誤差範囲が $\pm 0.01\text{g}$ の電子天秤を用いて測定した。また、円柱における直径は 2 底面の直径の平均値をとった。扱う物体における質量はすべて一様に分布しているとし、慣性モーメントは、球では $\frac{2}{5}mR^2$ 、円柱では $\frac{1}{2}mR^2$ とする。(導出は省く。)



	写真	素材	直径 $2R/m$	質量 $m/kg$	慣性モーメント $I/m^2kg$
球 A	 写真 17	鋼	$(29.5 \pm 0.05) \times 10^{-3}$	$(110.015 \pm 0.01) \times 10^{-3}$	$(9.57 \pm 0.04) \times 10^{-6}$
球 B	 写真 18	アルミニウム	$(29.8 \pm 0.05) \times 10^{-3}$	$(39.657 \pm 0.01) \times 10^{-3}$	$(3.52 \pm 0.04) \times 10^{-6}$
球 C	 写真 19	アクリル	$(30.0 \pm 0.05) \times 10^{-3}$	$(16.624 \pm 0.01) \times 10^{-3}$	$(1.50 \pm 0.04) \times 10^{-6}$
円柱 D	 写真 20	アルミニウム	$(29.9 \pm 0.05) \times 10^{-3}$ ※円柱の高さは $(60.2 \pm 0.05) \times 10^{-3}$	$(112.63 \pm 0.01)$	$(1.30 \pm 0.04) \times 10^{-6}$

● 測定方法

運動の記録方法は、次のとおりである。

- ① 下の写真 21 のように、スマートカートの上に iPhone11 をのせて固定する。さらに、スマートカートには写真 22 のような装置を取り付け、写真 23 のようなカートを作った。このカート上のカメラを起動すると、写真 24 のようにちょうど定規が映った。



写真 21

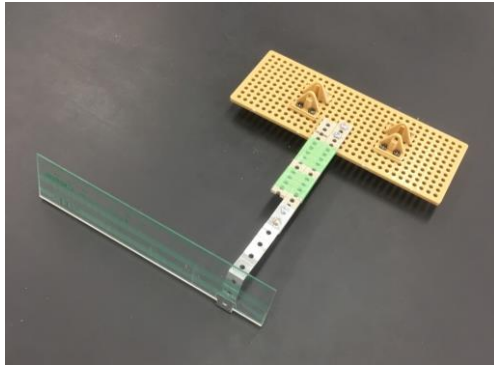


写真 22

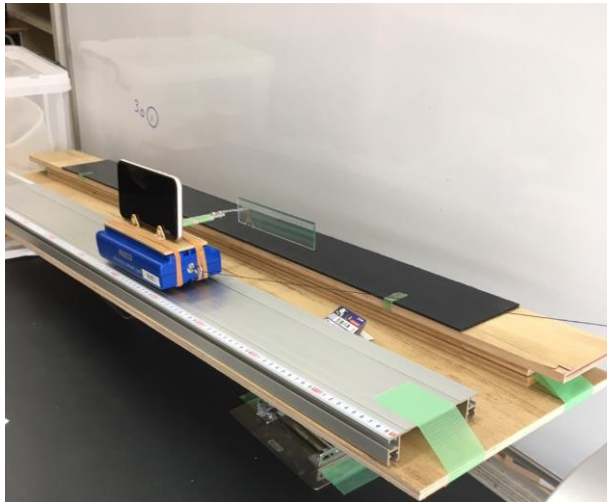


写真 23

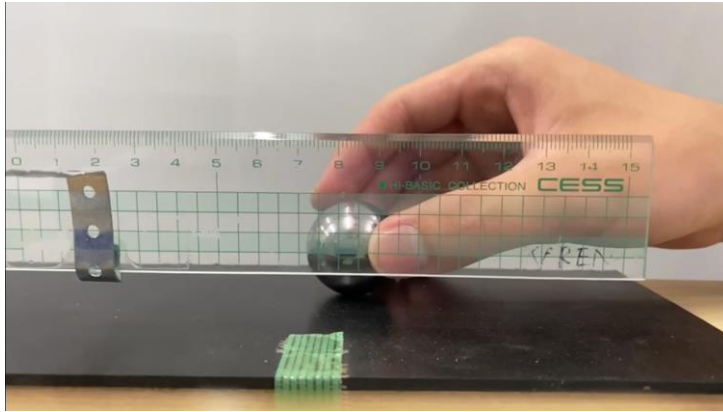


写真 24

- ② 上の写真 23 のように、2 本のレールを並べ、カメラを乗せたスマートカートと、運動を解析する物体を傾斜の等しい斜面上に配置した。斜面の傾斜は、下の写真 25 のように机に取り付けた、実験用ジャッキで調節した。物体は、表面が硬質ゴムでできた斜面上で、できるだけ定規に近い位置に配置した。カメラには、上の写真 24 のように、定規だけでなく物体も映った。

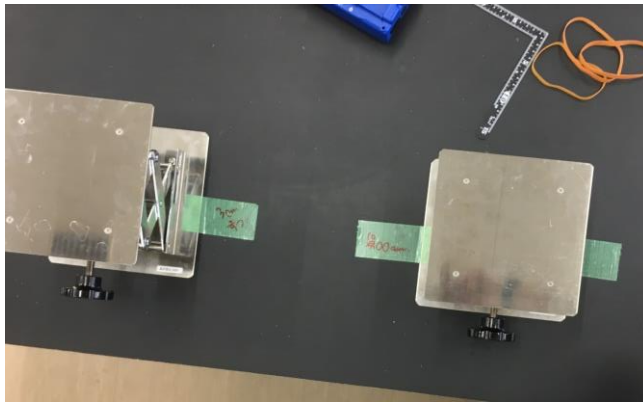


写真 25

- ③ 下の写真 26 の状態から、カメラで録画を開始し、手を放して、物体とスマートカートを  $0.800\text{ m}$  並走させた。この時、スマートカートには下の写真 27 のように紐と木片を取り付けることで速度を調節し、なるべく物体とスマートカートの位置が離れないように(斜面を物体が転がり落ちる間、常にカメラに物体が収まるように)した。

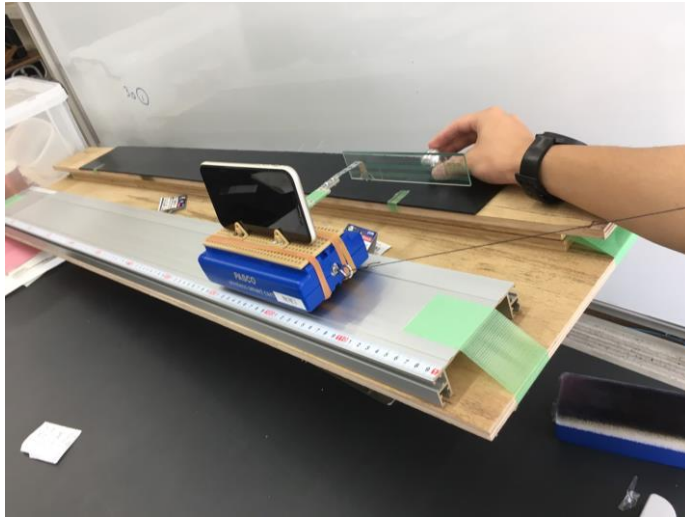


写真 26



写真 27

- ④ iPhone の純正アプリ「カメラ」を用いて、物体を撮影した。PC 用映像解析ソフト「Kinovea」を用いてスマートカートと物体の相対変位を記録した(1/30 s に対し 1 回変位を記録可能)。「Kinovea」では、変位は px の単位で記録されるが、カメラに映った定規から、「Kinovea」における 1 px が何 m に当たるか算出し、スマートカートから見た物体の相対変位を、m の単位で記録した。
- ⑤ スマートカートは自身の変位を、1 秒間に 100 回、測定・記録する。スマートカートによって測定したスマートカートの変位に、カメラを用いて測定したスマートカートに対する物体の相対変位を足し合わせることで、物体自身の重心の変位を読み取った。
- ⑥ カメラで撮影した映像から、物体の重心が 0.800 m 動く間に、物体(につけた印)は何°回転するか読み取った。角度を読み取ることで、回転した周の長さがわかり、それと重心の変位 0.800m の比から、滑りの大きさを評価した。

以下に示すのは、実際にこの方法で撮影した映像の一つである。(スロー再生)

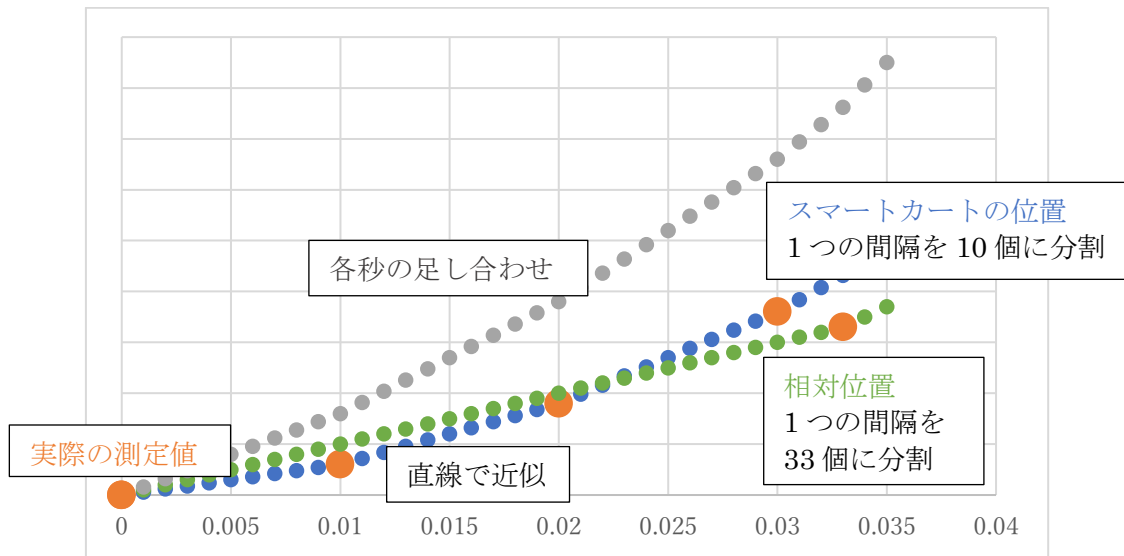
[鋼球 ゴム 3cm 3.MOV](#)

上記の方法で測定するメリットは以下のとおりである。

- 1 カメラで撮影した映像から、物体の回転の様子を観察でき、滑りの有無や回転角等を読み取れる。
- 2 映像解析によって物体の位置を測定する際、カメラを物体とともに運動させることで、物体が高速で移動しても、物体の像がぶれにくい。また、物体の位置を読み取る際、目盛りに対して垂直に近い向きから読み取りやすい。(なるべく物体とスマートカートの位置が離れないようにしたのはこのためでもある。)
- 3 映像解析によって物体の位置を測定する際、斜面に固定した物差しではなく、カメラとともに運動する物差しを用いることで、カメラが高速で運動しても、目盛りがぶれにくい。
- 4 位置センサを用いた測定では、センサの性能上斜面を転がる球の運動を、斜面の上から下まですべて記録することはできなかったが、上記の方法であれば長い距離を物体が移動する間、記録を続けられる。

また以下には、スマートカートの変位と相対変位を足し合わせる際に注意した 2 点と、それぞれの対処方法を示した。

- 1 2つのデータ間で時刻が共有されていない  
→ 斜面上方に印をつけた。これによって、スマートカートが動き出した時刻を、スマートカートの記録、カメラの記録両方で確認できるため、両データでその時刻を 0 s として共通の時間軸を得た。2つのデータは記録の時間間隔が異なるため、誤差は生じるが、最大で 1/30 s である。
- 2 2つのデータ間で記録の時間間隔が異なる  
→ スマートカートでは 1/100 s ごとに、「Kinovea」では 1/30 s ごとに変位を記録する。この際、隣り合う 2つの記録の間の時間(スマートカートでは 1/100 s 間、「Kinovea」では 1/30 s 間)は微小な間隔であるため、この間、時間と変位は比例すると近似した。そして、この近似の上で、スマートカートの記録においては一つのデータ間隔を 10 個に、「Kinovea」の記録においては一つのデータ間隔を 33 個に分割し、1/1000 s ごとの変位を近似的に算出した。その上で、各秒の変位を足し合わせ、物体そのものの変位を計算した。以下の表は近似の方法を模式的に表している。



斜面の傾斜角  $\varphi$  については、

$$\tan\varphi = (6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}, (9.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}, \\ (12.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}, (15.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$$

つまり

$$\sin\varphi = (6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}, (8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}, \\ (11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}, (14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$$

となる4段階の傾斜について実験した。各傾斜について、上記の4種類の物体を転がし、運動を解析した。各条件について、実験は5回繰り返した。

#### B-4 実験の仮説

硬質ゴムの斜面では、斜面と物体の間に滑りが生じず、A-2における式 a-8 および式 a-9 が成立し、

$$x = \frac{1}{2}at^2, \quad a = \frac{g \sin\varphi}{1 + \frac{I}{mR^2}} \quad \text{となると考えられる。}$$

上の式と、A-4 に示した重力加速度、B-3 に示した各物体の質量・直径・慣性モーメントを用いて各傾斜について加速度の理論値を算出すると、以下ようになる。

物体	$\sin\varphi$	$a/\text{ms}^{-2}$
球 A	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.420 \pm 0.005$
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.627 \pm 0.005$
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.833 \pm 0.005$
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.04 \pm 0.005$
球 B	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.420 \pm 0.005$
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.627 \pm 0.005$
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.833 \pm 0.005$
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.04 \pm 0.005$
	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.420 \pm 0.005$

球 C	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.627 \pm 0.005$
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.833 \pm 0.005$
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.04 \pm 0.005$
円柱 D	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.392 \pm 0.005$
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.585 \pm 0.005$
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.777 \pm 0.005$
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.971 \pm 0.005$

誤差範囲については最大誤差を考えた。

## 1. 実験の結果

<物体の滑り>

物体と斜面間の滑りの大きさを評価するため、以下の量を定義する。

$$(\text{滑り率} [\%]) = \frac{(\text{物体の重心が } 0.800 \text{ m 動く間に回った周の長さ} [\text{m}]) - 0.800 \text{ m}}{0.800 \text{ m}} \times 100$$

以下には、各物体・各斜面での 5 回の測定における、滑り率の平均値を示した。

物体	$\sin\phi$	滑り率/%
球 A	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.098 \pm 0.002$
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.82 \pm 0.002$
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.21 \pm 0.002$
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.4 \pm 0.002$
球 B	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.95 \pm 0.002$
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.2 \pm 0.002$
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.92 \pm 0.002$
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.2 \pm 0.002$
球 C	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.28 \pm 0.002$
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.6 \pm 0.002$
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.87 \pm 0.002$
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.67 \pm 0.002$
円柱 D	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.087 \pm 0.002$
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.025 \pm 0.002$
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.047 \pm 0.002$
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.092 \pm 0.002$

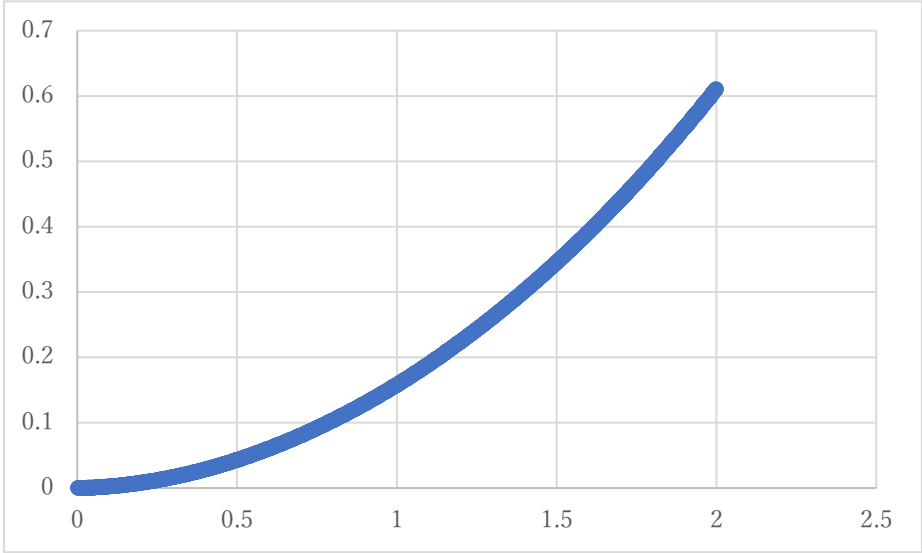
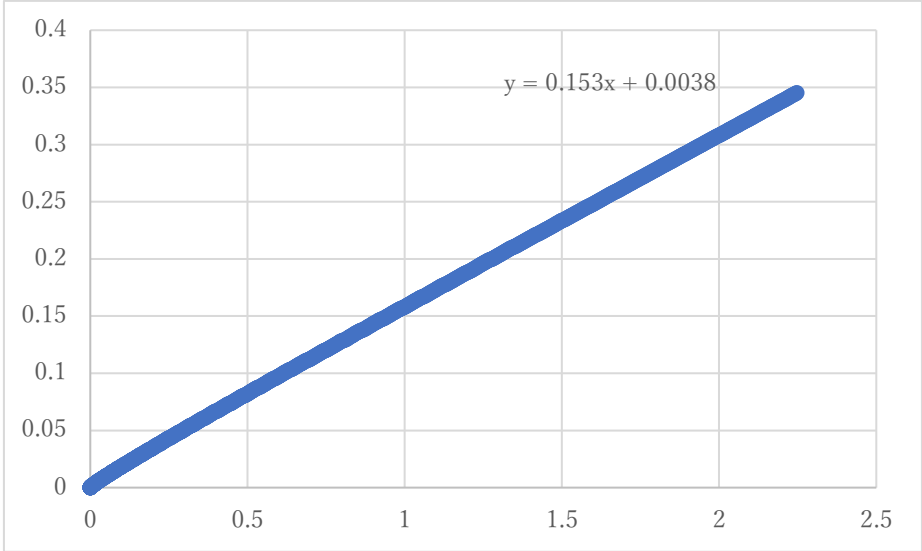
誤差範囲については最大誤差を考えた。

<物体の重心位置>

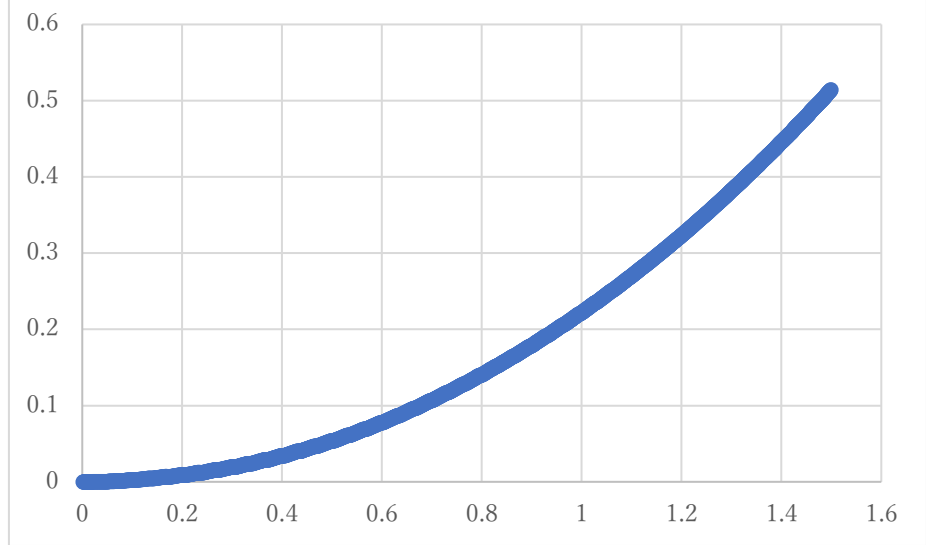
以下に示したのは、各傾斜・各物体における変位  $x$  と時間  $t$  の関係を示した  $x-t$  グラフおよび  $x$  と  $t^2$  の関係を示した  $x-t^2$  グラフである。なお、同条件での実験はそれぞれ

れ 5 回行ったが、以下のグラフにおける  $x$  は各秒において 5 回の測定の平均をとったものである。データ(数値)は巻末に示した。

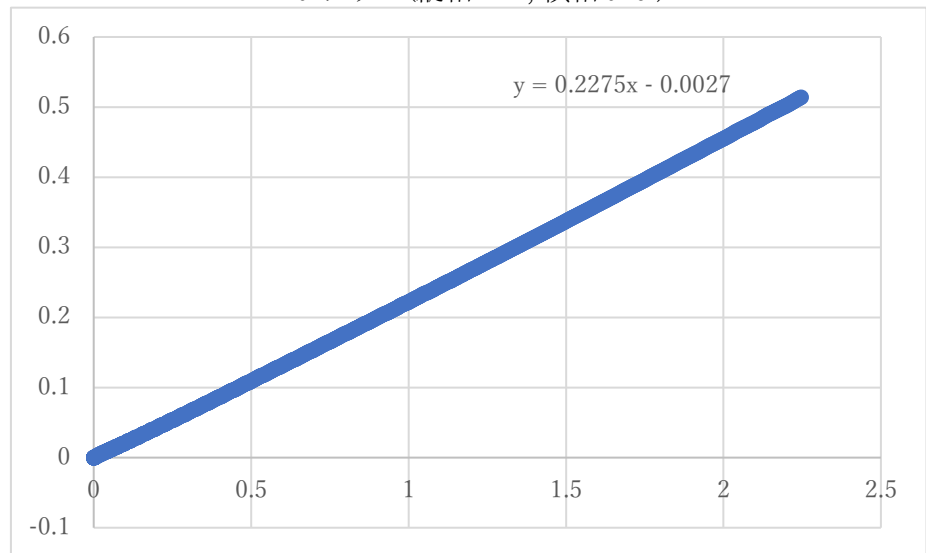
- 球 A

$\sin\phi$	グラフ
$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	<p style="text-align: center;"><math>x-t</math> グラフ(縦軸 <math>x/m</math>, 横軸 <math>t/s</math>)</p> 
	<p style="text-align: center;"><math>x-t^2</math> グラフ(縦軸 <math>x/m</math>, 横軸 <math>t^2/s^2</math>)</p> 
$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	<p style="text-align: center;"><math>x-t</math> グラフ(縦軸 <math>x/m</math>, 横軸 <math>t/s</math>)</p>



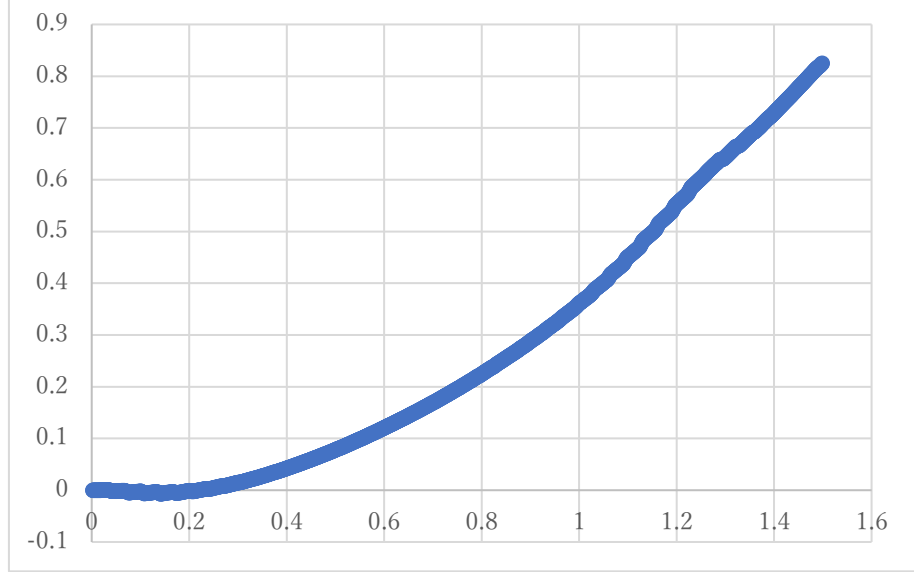


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )

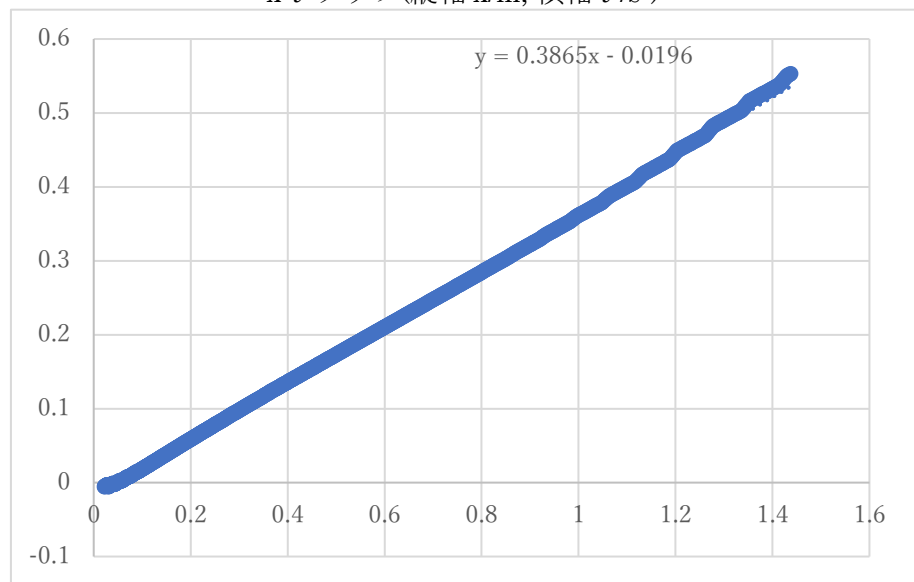


$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(11.9 \pm 0.05)$   
 $\times 10^{-2}$

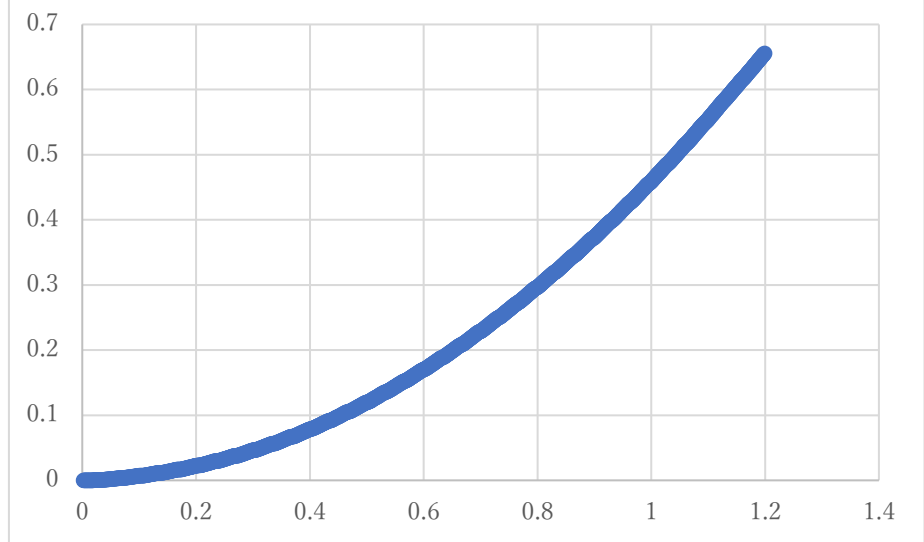


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )

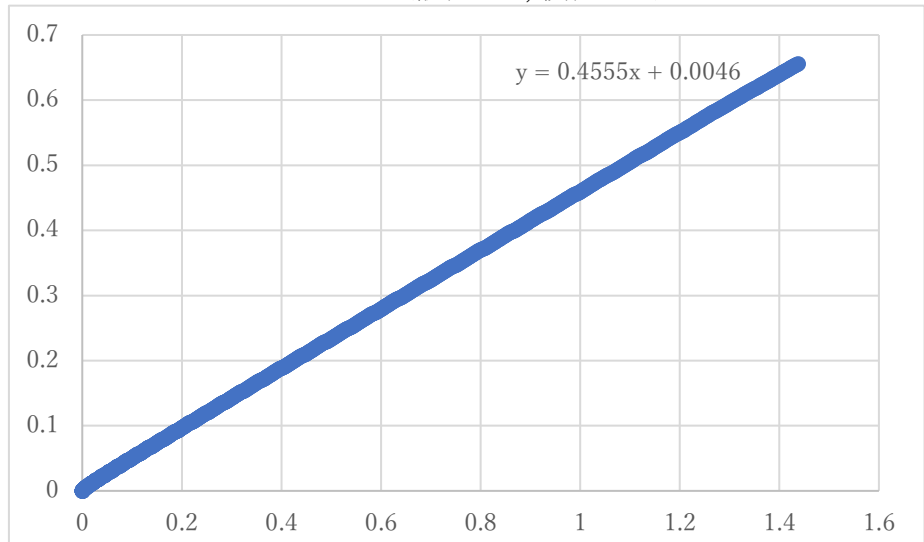


$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$

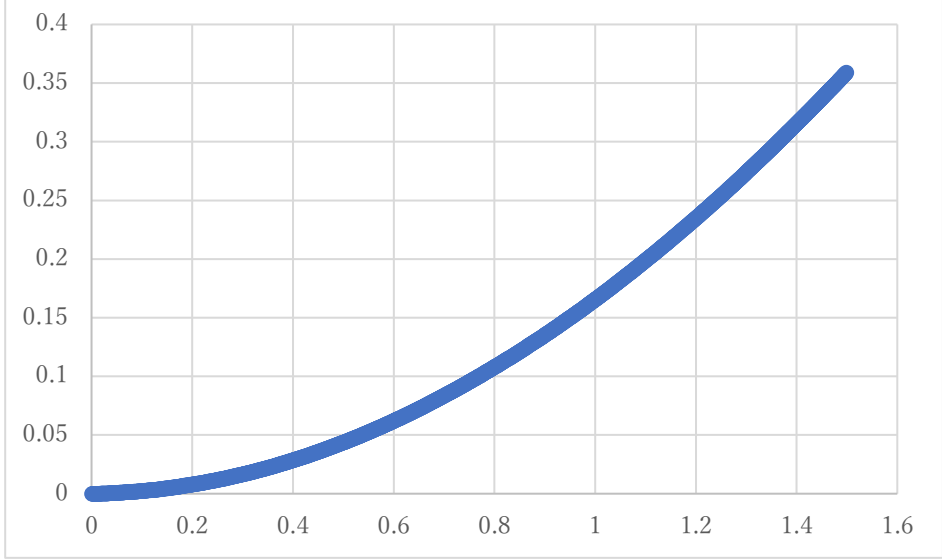


$x-t^2$  グラフ (縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )

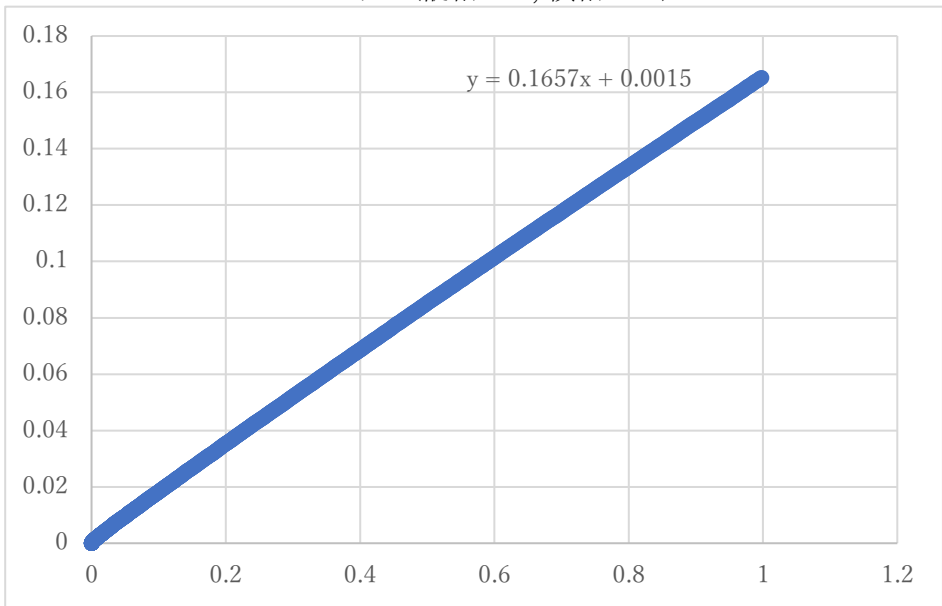


- 球 B

$\sin\phi$	グラフ
$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$x-t$ グラフ (縦軸 $x/m$ , 横軸 $t/s$ )

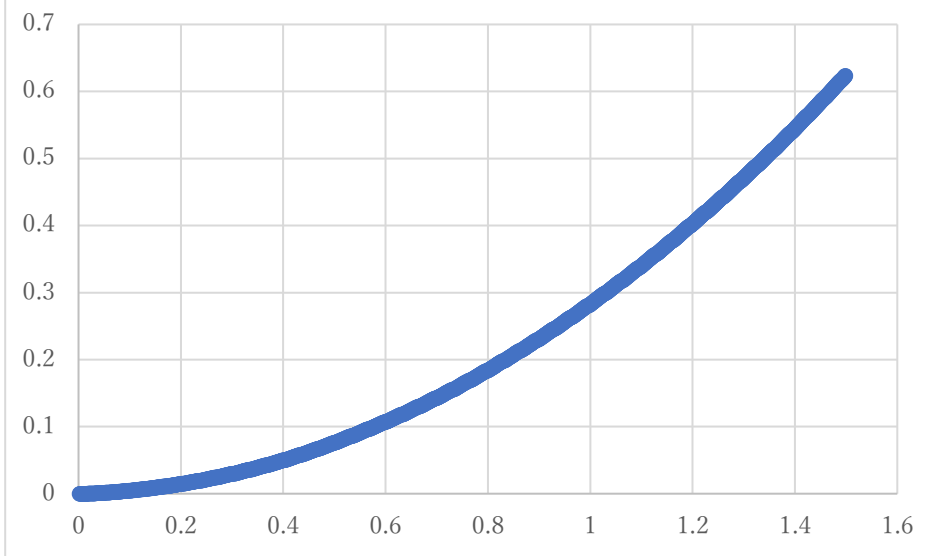


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )

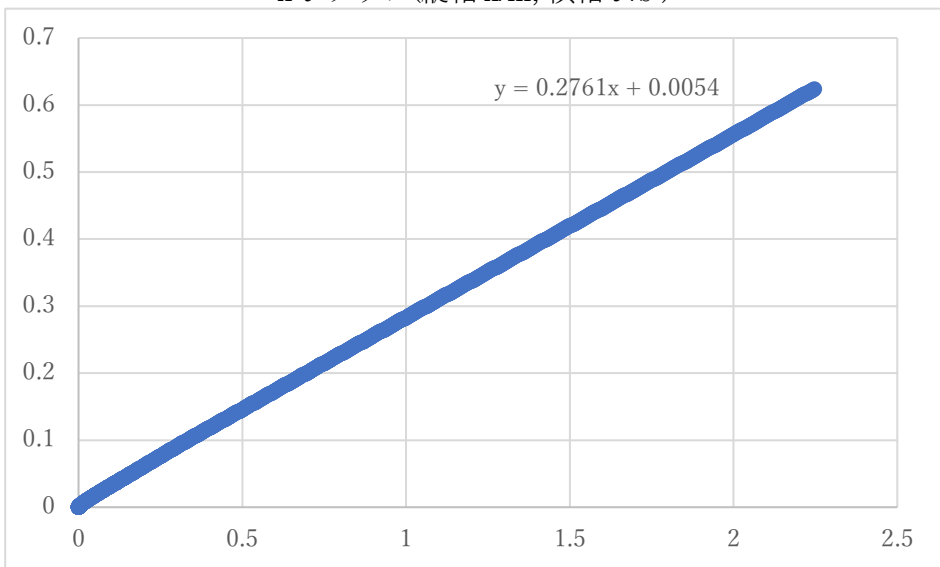


$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(8.96 \pm 0.05)$   
 $\times 10^{-2}$

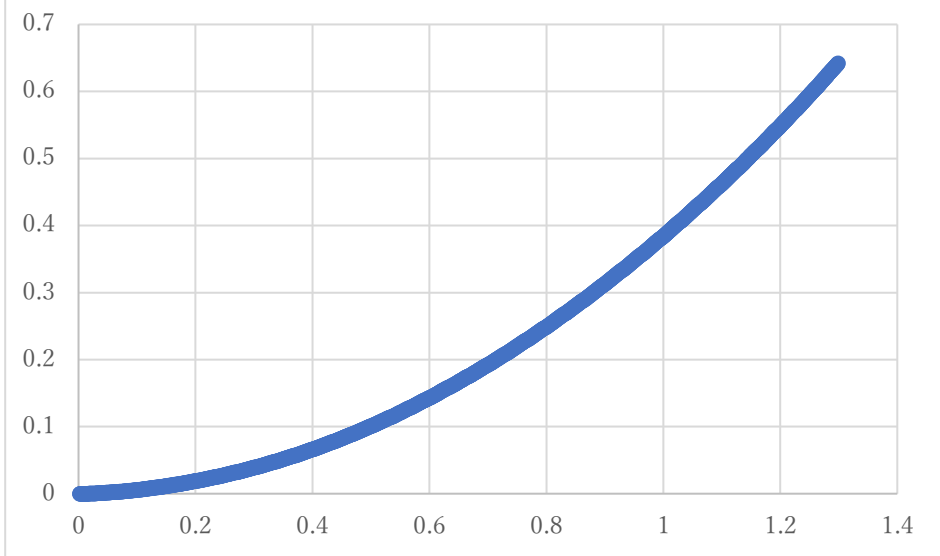


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )

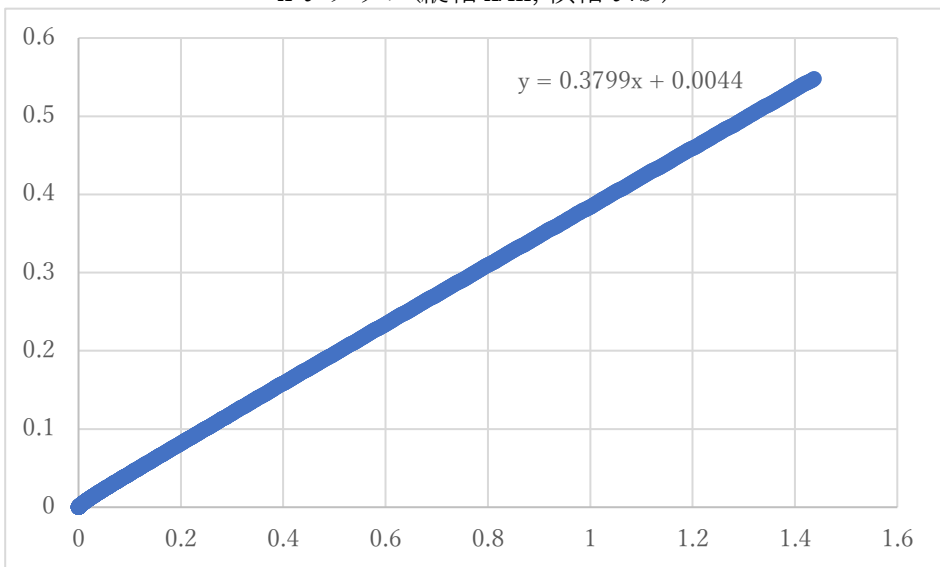


$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(11.9 \pm 0.05)$   
 $\times 10^{-2}$

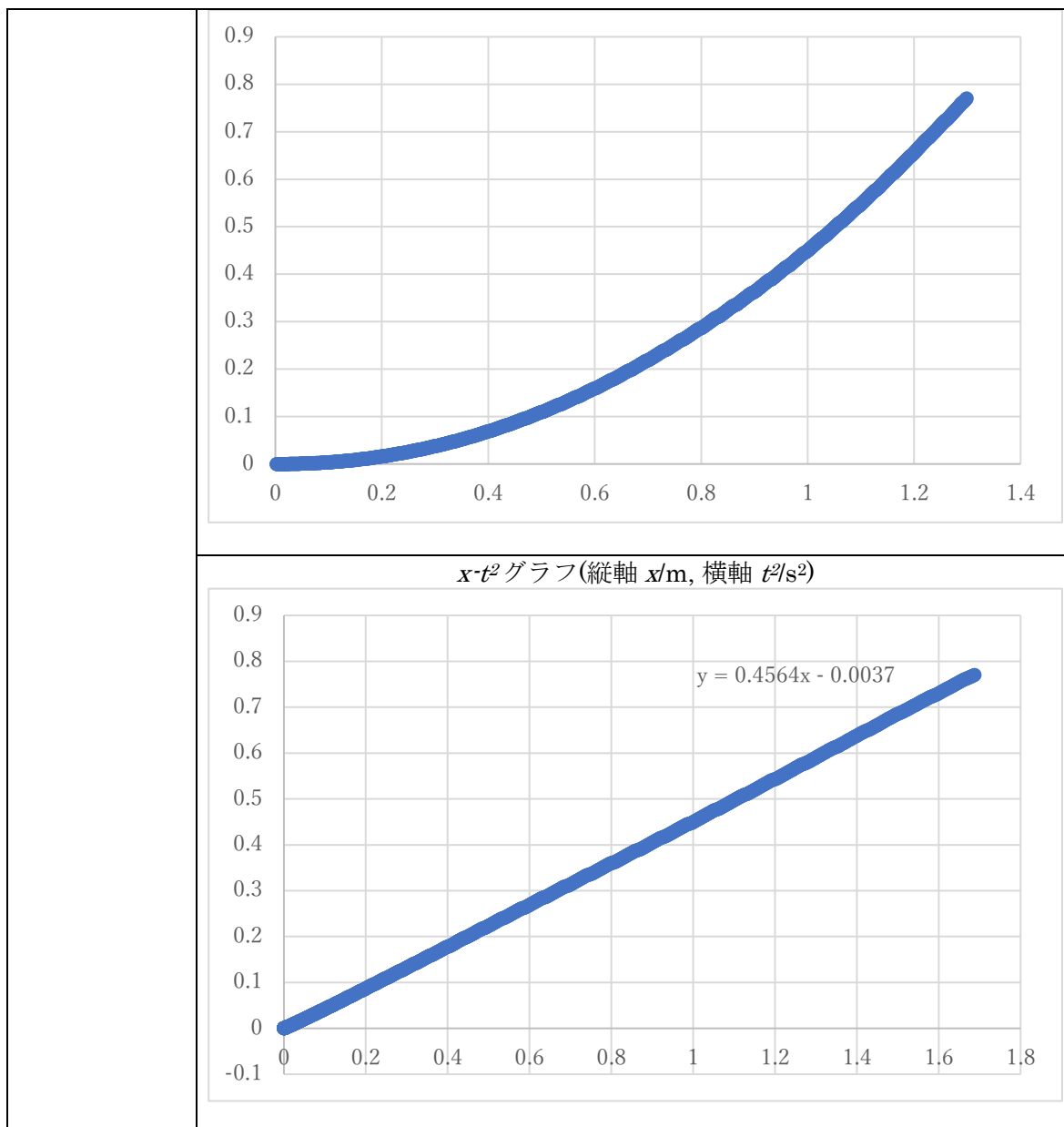


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )



$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

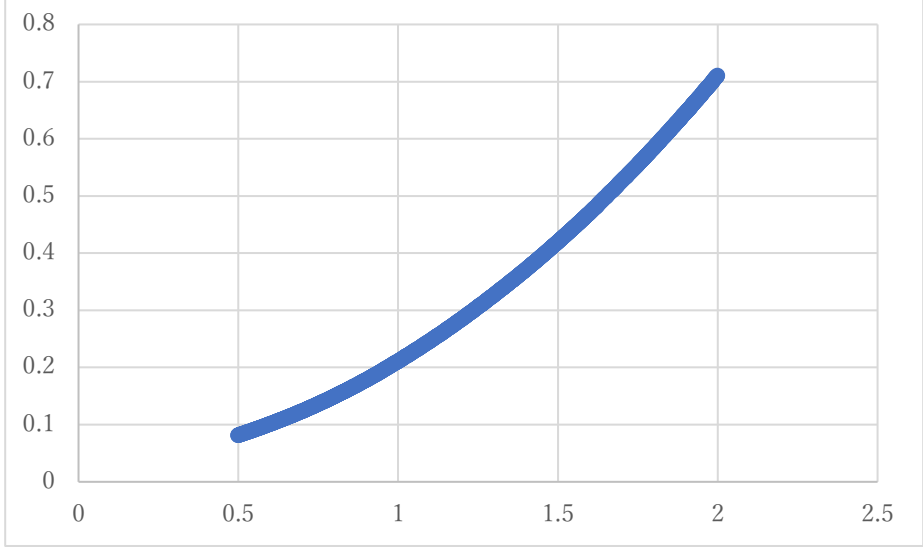
$(14.8 \pm 0.05)$   
 $\times 10^{-2}$



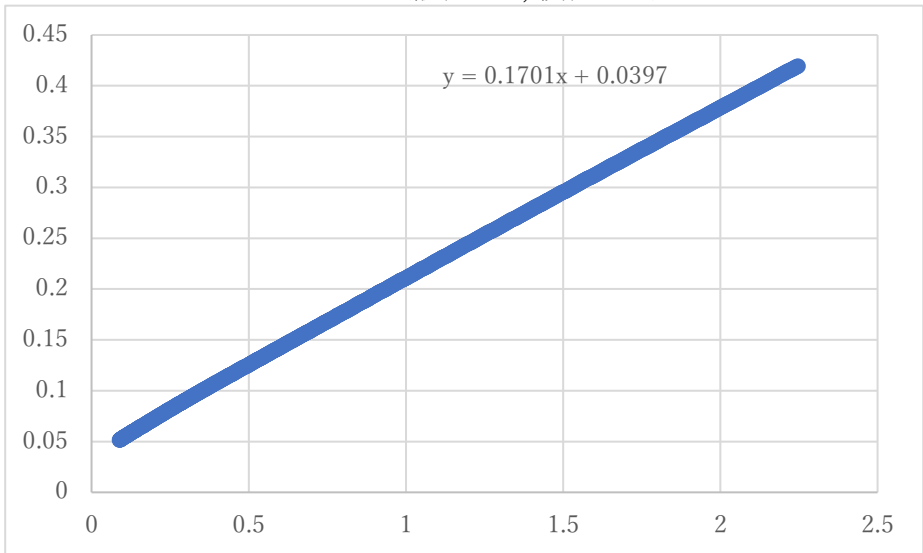
● 球 C

映像解析にて、斜面の上方ではアクリル球に手が映り込むなどし、位置を正確に測れなかった。そのため球 C のグラフについては、 $t$  が小さい範囲を除いてある。

$\sin\varphi$	グラフ
$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$x-t$ グラフ(縦軸 $x/m$ , 横軸 $t/s$ )



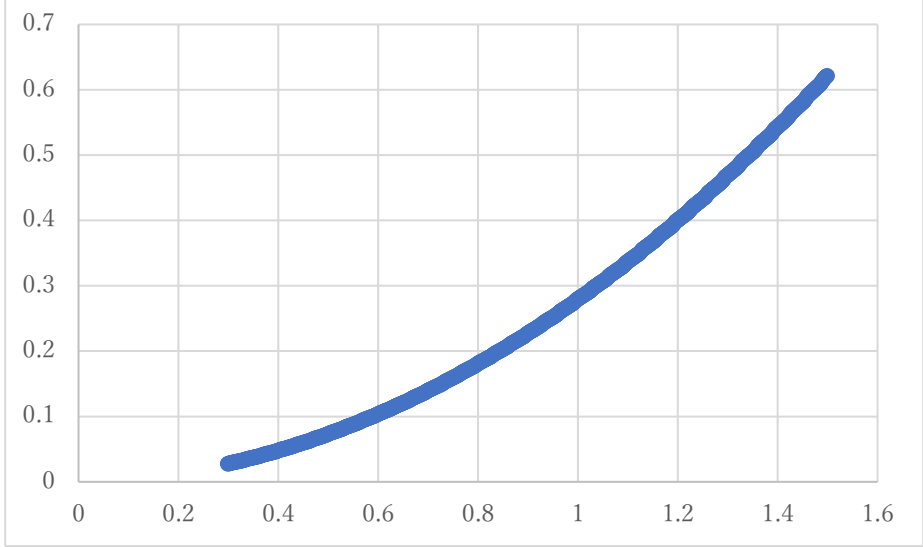
$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )



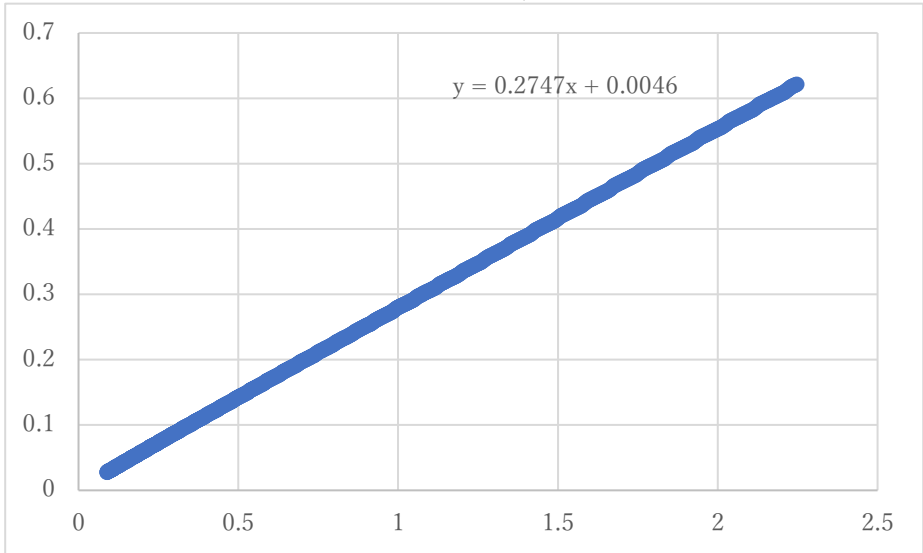
$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$



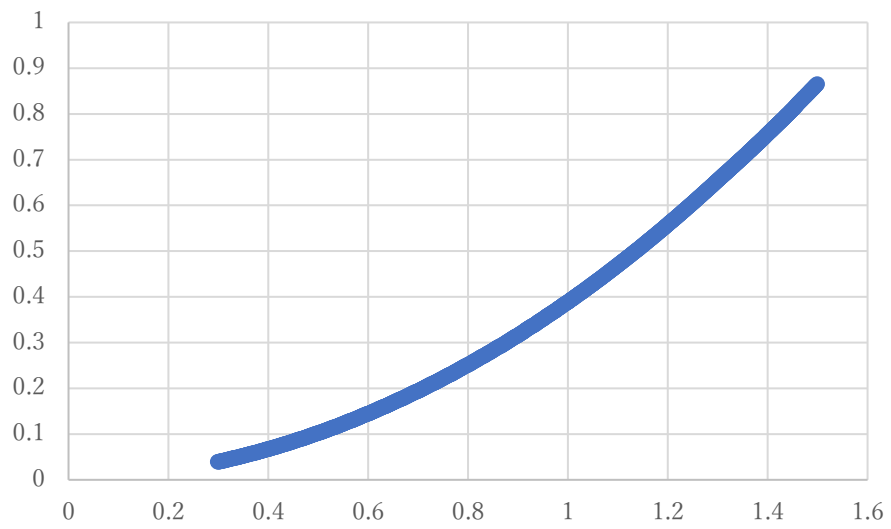


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )

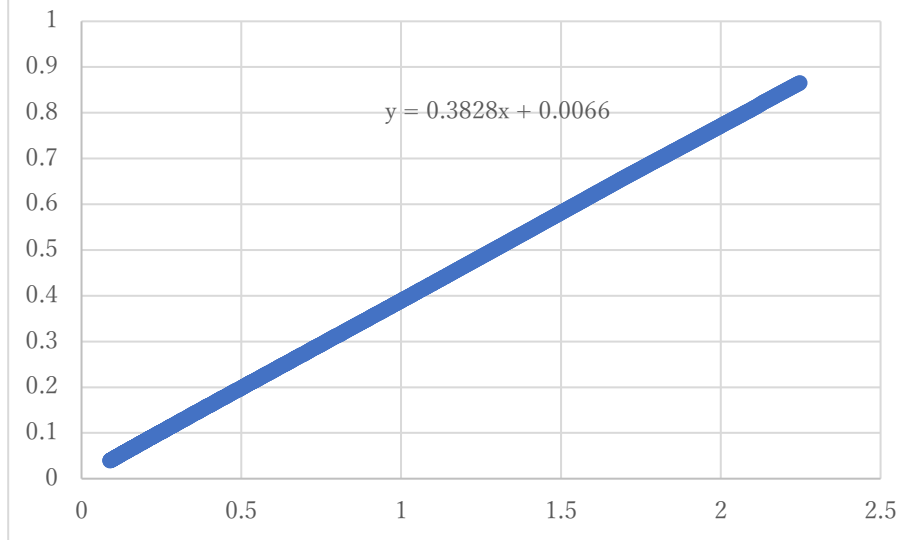


$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$

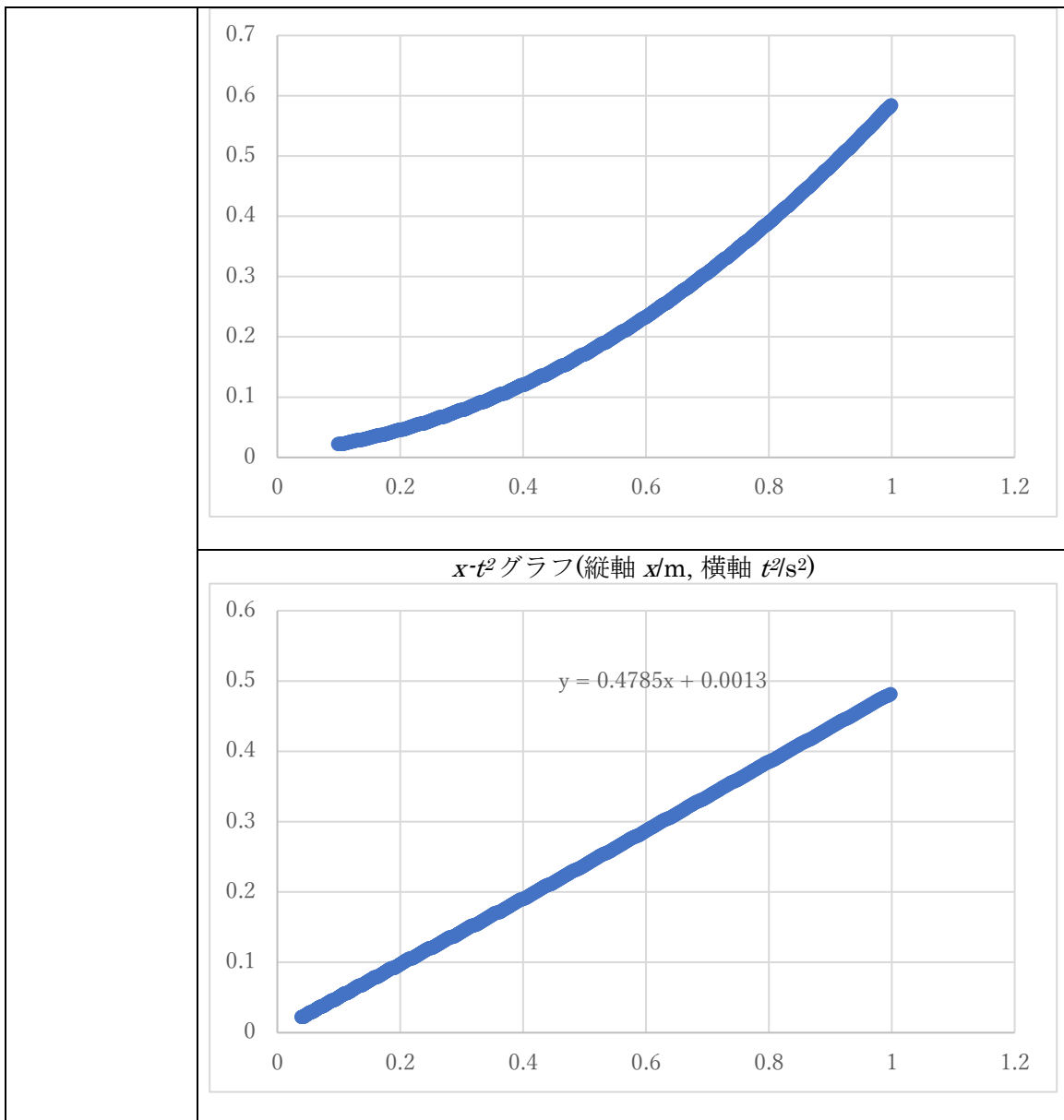


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )



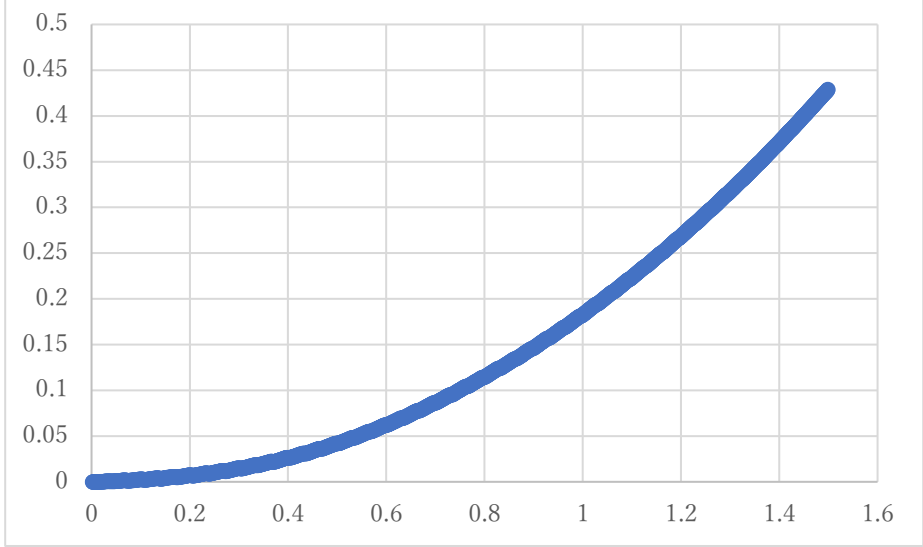
$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$

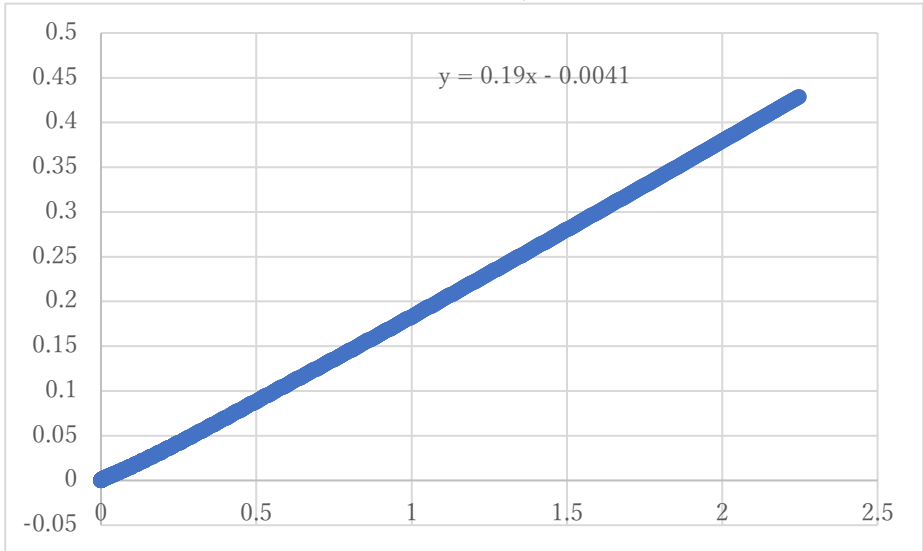


● 円柱 D

$\sin\varphi$	グラフ
$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$x-t$ グラフ(縦軸 $x/m$ , 横軸 $t/s$ )

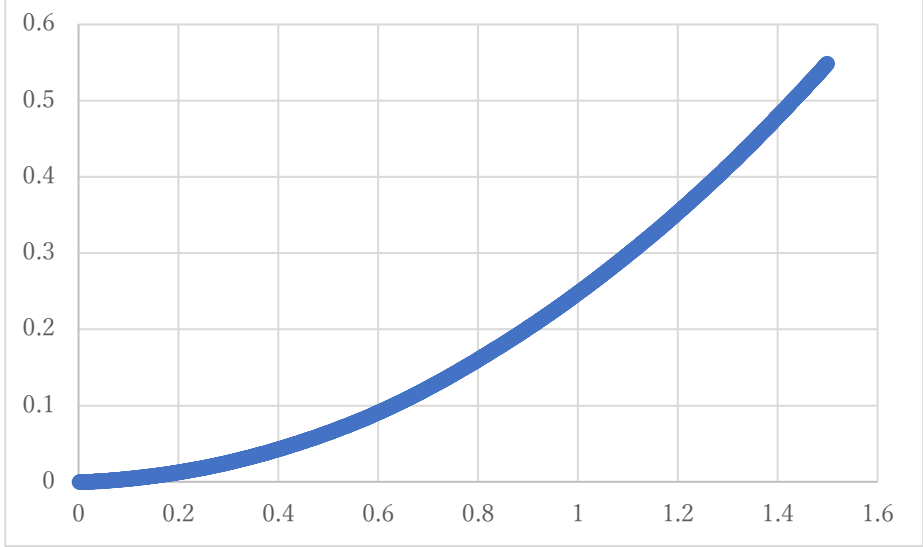


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )

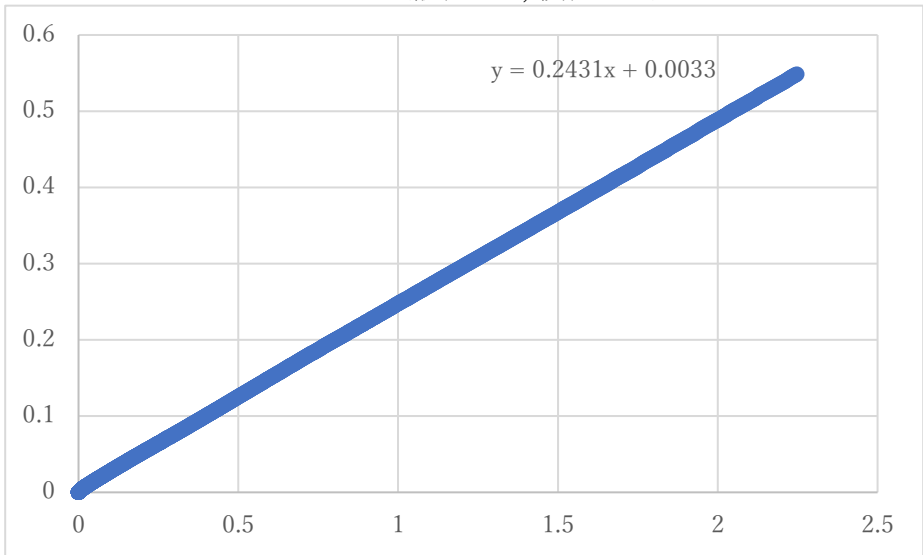


$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(8.96 \pm 0.05)$   
 $\times 10^{-2}$

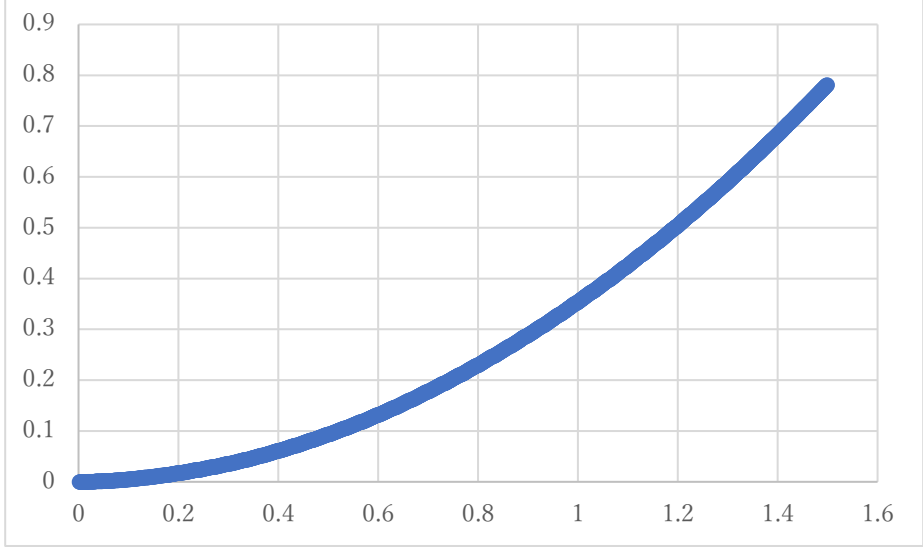


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )

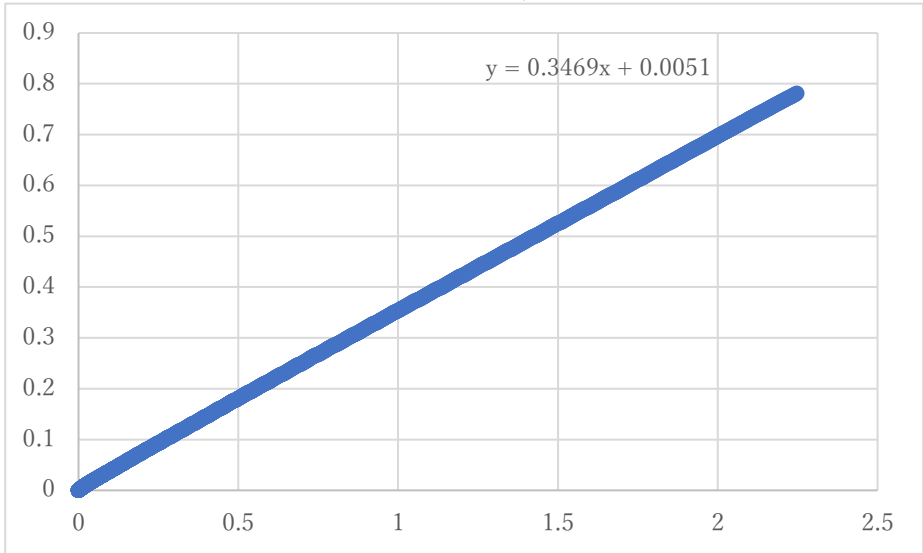


$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$

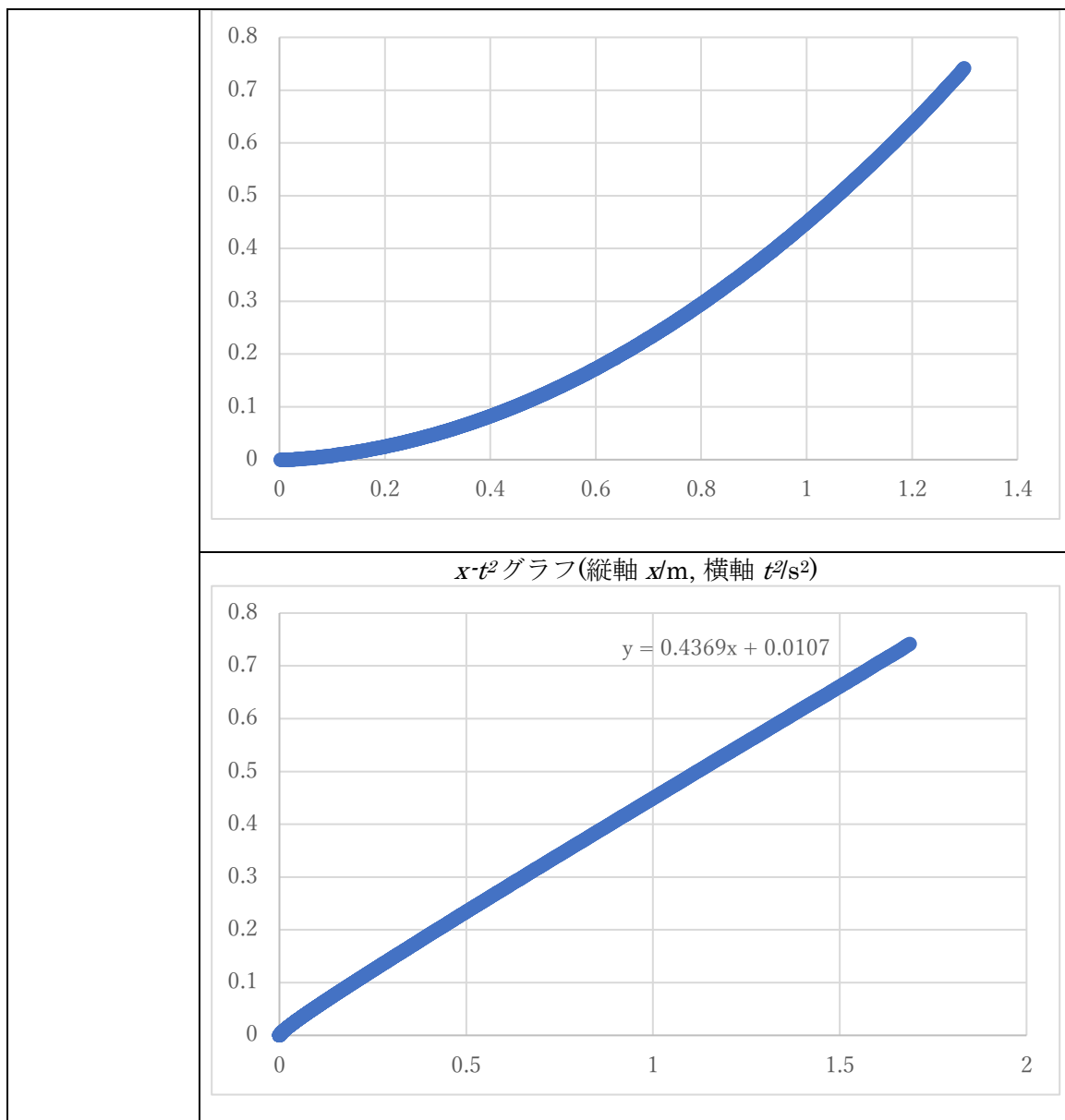


$x-t^2$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t^2/s^2$ )



$x-t$  グラフ(縦軸  $x/m$ , 横軸  $t/s$ )

$(14.8 \pm 0.05)$   
 $\times 10^{-2}$



以下には、 $x-t^2$  グラフにおける近似曲線の傾きから算出した、球の加速度(5回の測定での平均)を示した。標準誤差は、各条件における5回の測定について、それぞれ加速度を求め、そこから算出した。なお、標準誤差の誤差は、試行回数  $n$  としたとき、 $1/\sqrt{(2n-1)}$  と表され、試行回数5回の場合は  $\frac{1}{\sqrt{9}} \cong 33\%$  となる。よって、標準誤差の有効数字は一桁とする。また、測定値の分布は正規分布に従うとして、95%信頼区間を算出した。

物体	$\sin\phi$	$a/ms^{-2}$	標準誤差 $\sigma/ms^{-2}$	95%信頼区間/ $ms^{-2}$
球 A	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.306	0.005	0.305~ 0.307
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.455	0.006	0.454~ 0.456

	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.773	0.004	0.772~ 0.773
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.911	0.006	0.910~ 0.912
球 B	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.331	0.007	0.330~ 0.332
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.552	0.006	0.551~ 0.553
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.760	0.004	0.759~ 0.761
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.913	0.005	0.912~ 0.914
球 C	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.340	0.004	0.339~ 0.341
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.549	0.004	0.548~ 0.550
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.766	0.004	0.765~ 0.767
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.957	0.006	0.956~ 0.958
円柱 D	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.380	0.004	0.379~ 0.381
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.486	0.004	0.485~ 0.487
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.694	0.005	0.695~ 0.696
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	0.874	0.005	0.873~ 0.875

## 2. 実験の考察

### (1) 物体と斜面の間の滑りの有無

滑り率をみるとわかるように、本実験では滑り率がすべて 2 を下回り、滑りはほとんどなかったといえる。このことは、「斜面と物体間の滑りは無視できるとする」という仮定を十分に満足する。

### (2) 重心の運動の特徴

$x-t^2$  グラフはいずれの傾斜においてもほぼ直線となり、変位は時間の 2 乗に比例したとわかる。つまり、球は等加速度運動をしたとわかる。

### (3) 加速度の理論値との比較

加速度の理論値と測定値を以下に示した。また、A-6 で定義した「ずれ」も示した。



物体	$\sin\phi$	理論値 $a/\text{ms}^{-2}$	測定値 $a/\text{ms}^{-2}$	ずれ
球 A	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.420 \pm 0.005$	$0.306 \pm 0.008$	-27.1
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.627 \pm 0.005$	$0.455 \pm 0.01$	-27.4
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.833 \pm 0.005$	$0.773 \pm 0.01$	-7.20
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.04 \pm 0.005$	$0.911 \pm 0.01$	-12.4
球 B	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.420 \pm 0.005$	$0.331 \pm 0.01$	-21.2
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.627 \pm 0.005$	$0.552 \pm 0.01$	-12.0
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.833 \pm 0.005$	$0.760 \pm 0.008$	-8.76
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.04 \pm 0.005$	$0.913 \pm 0.01$	-8.70
球 C	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.420 \pm 0.005$	$0.340 \pm 0.008$	-19.0
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.627 \pm 0.005$	$0.549 \pm 0.008$	-12.4
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.833 \pm 0.005$	$0.766 \pm 0.008$	-8.04
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$1.04 \pm 0.005$	$0.957 \pm 0.01$	-8.00
円柱 D	$(6.00 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.392 \pm 0.005$	$0.380 \pm 0.008$	-3.06
	$(8.96 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.585 \pm 0.005$	$0.486 \pm 0.008$	-17.0
	$(11.9 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.777 \pm 0.005$	$0.694 \pm 0.01$	-10.7
	$(14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$0.971 \pm 0.005$	$0.874 \pm 0.01$	-10.0

鋼球のデータとゆるい傾斜でのデータでは理論値とのずれが大きくなった。この理由は、これらの条件では物体が斜面に与える圧力が大きくなり、斜面に変形が生じることで、変形による抗力が生じたことが原因だと考えた。しかし、物体の加速度が一定になっていることを考えると、抗力は一定である必要があり、またこれは、摩擦力とは異なる種類の抗力でなくてはならない。(前述の理論によると、物体の加速度は摩擦力によらないため。)

この力の実態についてはあまりわからなかったため、今後明らかにしたい。

物体に働く重力の斜面に垂直な成分が小さくなる、質量が小さい物体(アルミ球やアクリル球)や、物体との接触面が大きくなり、物体が斜面に与える圧力が小さくなる円柱では、誤差が小さくなった。

また、傾斜角を大きくすると、物体に働く重力の、斜面に垂直な成分が小さくなり、誤差が小さくなったと考えられる。

特に実験において最も大きい角度である  $\sin\phi = (14.8 \pm 0.05) \times 10^{-2}$  となる角度では、誤差は小さくなった。

データ全体を見ると、ほとんどのずれが 20%以内に収まり、急傾斜の実験におけるずれの多くは 10%以内に収まった。このことから、前述の理論(並進の運動方程式及び)について、その妥当性が示されたと考える。

上記の結果を踏まえて、滑りが少なくかつ弾性のかなり小さい斜面を用いて実験したいと考えたが、そのような素材がなかなか見つからなかったこと、時間的に実験の遂行が難しかったことから、本レポートにおいてはこれ以上の正確性は追及できなかった。今後機会があれば、同様の実験装置の下で、より高い信憑性をもった理論の検証を試みたい。

### 3. 結論

上記の実験 A・B について、実験結果には理論との間に有意なずれが生じたが、物体と斜面の間に滑りが生じない場合、物体の重心の加速度について、

$$a = \frac{g \sin\phi}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

が成立するという理論については、ある程度の妥当性を検証することができた。

このことは、

$$\begin{aligned} ma &= F \\ I\alpha &= N \end{aligned}$$

と表される、並進の運動方程式及び回転の運動方程式の成立を示唆しているといえる。

### 4. 参考文献

- [1]国立天文台. “理科年表 平成 29 年”. 丸善出版. 2016-11-27. 1104p.
- [2]俣野博. 河野俊丈. ほか. “数学 B”. 東京書籍. 2018-2-10. 171p.
- [3]磯崎行雄. 江里口良. ほか. “地学”. 啓林館. 2016-12-10. 415p.
- [4]誤差の伝播法則  
<http://www.tagen.tohoku.ac.jp/labo/ishijima/gosa-02.html>
- [5]前野昌弘 “よくわかる初等力学” 東京書籍. 2020-6-10. 243p

### 5. 謝辞

本実験を行うにあたり指導していただいた、本校物理教諭の前田学先生にお礼申し上げます。

### 6. 共同実験者

石川県立金沢泉丘高等学校 2年 安田拓生  
石川県立金沢泉丘高等学校 2年 横川周慧