

第17回全国物理コンテスト 物理チャレンジ2021

第1チャレンジ 実験課題レポート

レポート表題

等速円運動を利用した運動方程式の検証

第1チャレンジ番号 : 2121007

氏名 : 窪田 煌志

学校名または

学校のある

卒業校名 : 岐阜県立大垣北高等学校

都道府県名 : 岐阜県

学年 : 高等学校1年生 (中等教育学校4年生、高等専門学校1年生)

実験をした

主な場所 : 自宅・友人宅・寮など (私的な場所)

補足

(その他の場合) :

共同実験者1 氏名

第1チャレンジ番号

共同実験者2 氏名

第1チャレンジ番号

実験課題に取り組んだ感想

今回で物理チャレンジへの参加は5回目になります。今までは、実験で父や共同実験者に頼ることが多かったです。しかしこの実験では手法を考えて、実験装置を作り、測定をするまで、ほとんどを自分で行うことができました。終わった時、充実感のあるものでした。

方法を考え始めた時期

3月

実験を始めた時期

5月

実験に取り組んだ期間

約 35 日間

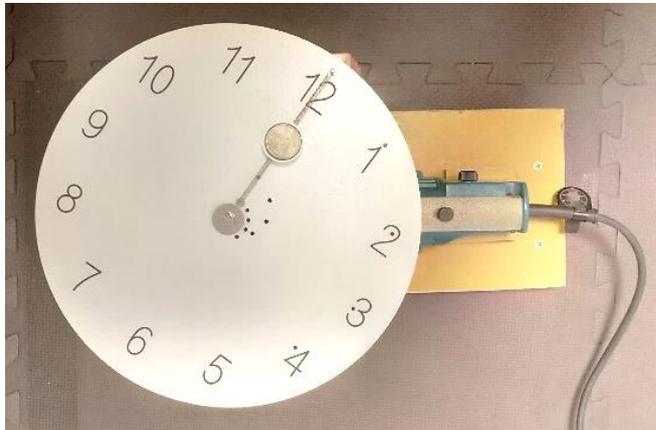
# 等速円運動を利用した運動方程式の検証

## (1) 要約

力学の基本法則である運動方程式  $ma = F$  を自分の手で、実験的に導き出してみたいと思った。実験の手法を工夫し、結果的に力  $F$  を 4%、加速度  $a$  を 1% の相対誤差で検証することができた。

実験にはおもりを円盤とともに回転させる、等速円運動を採用した。等速円運動には、おもりに働く向心力と向心加速度の両方を同時に長時間一定に保ち続けられることや、それらの数値を大きくとれることなど、実験を行う上で便利な特徴があったからである。

下の写真のように、おもりはばね 2 本で挟むようにして円盤に固定する。実験ではまず、円盤が回転したときのおもりの位置の変化を測定し、ばねがおもりに加える向心力を導き出す。また、円運動の回転半径と角速度を測定し、向心加速度を導き出す。回転中のおもりの位置の変化の測定にはレーザーを、円盤の角速度の測定にはストロボを用いた。



以下の2種類の実験を行った。

実験 1: おもりに働く向心力  $F$  を一定に保ち、おもりの質量  $m$  を変化させたときの向心加速度  $a$  の変化を測定する実験。

実験 2: おもりの質量  $m$  を一定に保ち、おもりに働く向心力  $F$  を変化させたときの向心加速度  $a$  の変化を測定する実験。

## (2) 実験の目的

力学の基本法則である運動方程式  $ma = F$  を自分の手で、実験的に導き出してみたいと思った。実験の手法を考案する上で気を付けたことは、以下の3点である。

- ① 物体に働く力(=  $F$ ) と 加速度(=  $a$ ) を同時に、長時間一定に保ち続けること。
- ②  $F$ ,  $a$  の数値を出来るだけ大きくすること。
- ③  $F$  として重力を用いないこと。

①は安定した実験を行うためには、必須の条件である。②に気を付けると、 $F$ ,  $a$  の値に対する相対誤差を小さくすることができる。最も大切なのは③である。これはもし  $F$  として重力を使ってしまうと、物体の質量を変化させても  $a$  が変化しなくなるからである。

この3点を満たす運動として、僕は等速円運動が最適だと考えた。おもりを円盤と共に回転させ、そのとき、おもりに働く向心力  $F$  と向心加速度  $a$  をそれぞれ測定する。そして、それらの間に運動方程式が成り立つのかを調べることにした。

実験は2種類行い、その両方で運動方程式が成り立つことを確かめた。

実験1: おもりに働く向心力  $F$  を一定に保ち、おもりの質量  $m$  を変化させたときの向心加速度  $a$  を測定する実験。

実験2: おもりの質量  $m$  を一定に保ち、おもりに働く向心力  $F$  を変化させたときの向心加速度  $a$  を測定する実験。

## (3) 実験手法

### § 3.1 実験で使用したもの

実験では以下のものを使用した。

- おもり(ペットボトルキャップの中に500円玉を入れて作った。写真1)
- ばね2本(ばね2本の合成ばね定数は  $35.08 \pm 0.55$  N/m { § 5.1 参照}, 質量は 0.37 g。写真1)
- 円盤(時計の文字盤を使った。写真2)
- レーザー(非常に細い一本の光を出すことができる。写真3)
- ドリル(回転数を自由に調節でき、一定の速度で回転させることができる。写真4)
- デジタルノギス(最小目盛りは 0.01mm, 長さが正確に求められる。)
- ストロボ(スマホのアプリで、一定の時間間隔で発光する。1分毎の発光回数を自由に調節できる。)
- 重量計(最小目盛りは 0.01 g, 重量が正確に求められる。)



写真 1

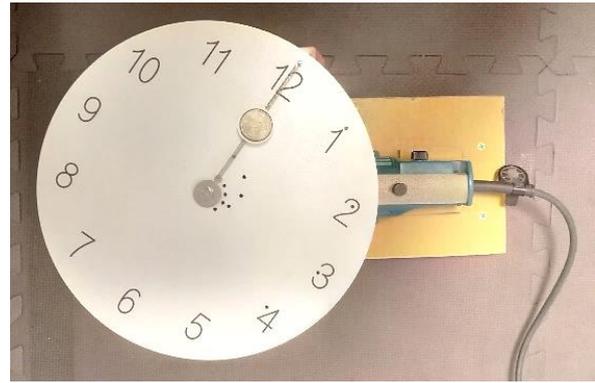


写真 2



写真 3



写真 4

### § 3.2 実験装置

円盤は時計の針を取り除き、そこにネジを入れて、ドリルと固定した。ドリルのレバーを押すと、ドリルの先端が回転し、固定された円盤も回転する。写真5のように、おもりに2本のばねを接続して、ばねの另一端を円盤の中心付近と円周付近に固定する。はじめ、おもりがつり合いの位置にあるとき、2本のばねはそれぞれ自然長から3cm程度伸びた状態になっている。次に、高速で回転するおもりの位置を正確に測定するために、レーザーを適当な位置に固定する。円盤を回転させると、おもりの回転半径が少しずつ大きくなる。写真6のように、おもりの端にレーザーが当たって赤く光るため、おもりの回転半径を非接触で求めることができる。



写真 5



写真 6

### § 3.3 測定方法

次の手順で測定をした。

- ①. 図1のように、おもりがつり合いの位置にあるとき、回転中心からおもりの中心までの距離( $= r_0$ ) を測定する。また、回転中心からキャップの端までの距離( $= r_1$ ) を測定する。
- ②. 重量計でおもりの質量( $= m$ ) を測定する。
- ③. レーザーの光を出して、円盤を回転させる。ばねが伸び、おもりが動いて、レーザーの通り道を遮るようになると、キャップの端が赤く光る。回転が速いと、写真6のように赤い線のように見えるので、ちょうどキャップの端が赤く光り始めるように回転数を調節する。

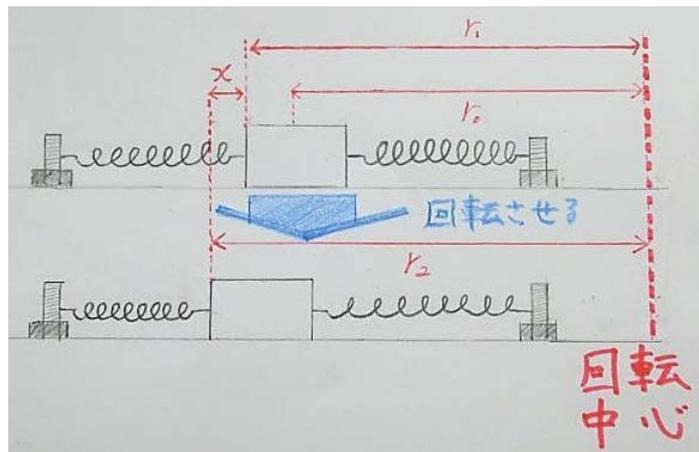


図1

- ④. ③.のとき、同時にストロボの発光間隔を調整する。発光の周期と円盤の回転の周期が一致すると、キャップが止まって見えるので、そのときの角速度( $= \omega$ ) を記録する。
- ⑤. 円盤の回転を止め、回転中心からレーザー光までの距離( $= r_2$ ) をノギスで測る。ノギスも伸ばしていくと、レーザーの通り道を遮って赤く光るようになるので、回転していたときのおもりの位置をこのように測定できる。

## (4) 実験結果

### § 4.1 実験データ

#### 実験 1

おもりの質量  $m$  を一定に保つため、キャップに入れる 500 円玉の枚数を 2 枚にして実験をした。キャップと 500 円玉 2 枚を合わせたおもりの質量は  $m = 17.48 \text{ g}$  であった。角速度  $\omega$  を 5 段階で変化させたときの、それぞれの回転半径  $r$  を測定した。

表 1: 質量を一定 ( $m = 17.48 \text{ g}$ ) に保った実験 1 の測定データ

測定番号	1	2	3	4	5	6
角速度[rad/s]	13.0	14.1	16.5	18.3	19.7	20.9
回転半径[mm]	86.69	88.54	92.29	94.95	97.53	99.29
変位[mm]	6.31	8.16	11.91	14.57	17.15	18.91
力の大きさ[N]	0.221	0.286	0.418	0.511	0.602	0.663
加速度 [ $\text{m/s}^2$ ]	14.7	17.7	25.2	31.9	38.0	43.2

## 実験 2

おもりに働く向心力を一定に保つため、おもりの変位  $x$  を一定にして実験した。 $x = 12.2 \text{ mm}$  である。また、 $r = 97.8 \text{ mm}$  とし、このときの向心力の大きさは  $F = 0.497 \text{ N}$  となる。

おもりの質量  $m$  を変化させたときの、角速度  $\omega$  を測定した。おもりの質量を変えるために、キャップに入れる 500 円玉の枚数を 2 枚から 5 枚に 4 段階で変化させた。

表 2: 力を一定 ( $F = 0.497 \text{ N}$ ) に保った実験 2 の測定データ

測定番号	1	2	3	4
おもりの質量[g]	9.72	16.74	23.77	30.80
おもりの質量の逆数 [ $1/\text{kg}$ ]	102.88	59.74	42.07	32.47
加速度 [ $\text{m/s}^2$ ]	53.8	32.2	22.4	16.8
角速度[rad/s]	23.6	18.2	15.2	13.1

## § 4.2 グラフ

実験 1: 図 2 に横軸に  $F[\text{N}]$ , 縦軸に  $a[\text{m/s}^2]$  をとって, § 4.1 の表 1 をグラフにまとめ直した。各データを赤点で, 最小二乗法を用いた近似直線を青線で, 傾き  $1/m (= 1000/17.48)[1/\text{kg}]$  の直線を赤点線で表している。軸の取り方から, 青線で表される最小二乗法を用いた近似直線の傾きが  $1/m[1/\text{kg}]$  になれば(つまり, 赤点線と青線が重なれば), 運動方程式が成り立つと言える。正確な誤差計算は § 5.1 で行うが, すでにかなり良い一致を見せていると言えるだろう。

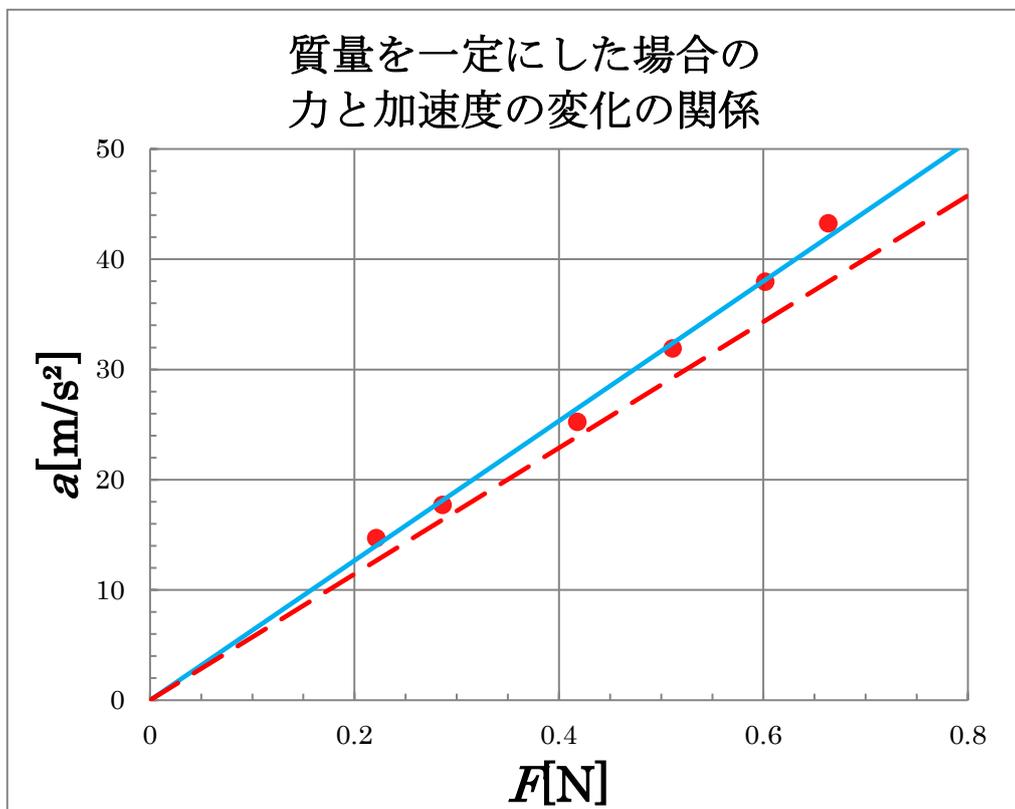


図 2: 実験 1 の測定結果

実験 2: 図 3 に, 横軸に  $1/m$  [1/kg], 縦軸に  $a$  [m/s<sup>2</sup>] をとって, § 4.1 の表 2 をグラフにまとめ直した。各データを赤点で, 最小二乗法を用いた近似直線を青線で, 傾き  $F(= 0.497)$  [N] の直線を赤点線で表している。軸の取り方から, 青線で表される最小二乗法を用いた近似直線の傾きが  $F$  [N] になれば(つまり, 青線が赤点線と重なれば), 運動方程式が成り立つと言える。正確な誤差計算は § 5.2 で行うが, これもすでにかなり良い一致を見せていると言えるだろう。(横軸を  $m$  [kg] ではなく,  $1/m$  [1/kg] としたのは, 比例のグラフの方が見やすく, 比較しやすいからである。)

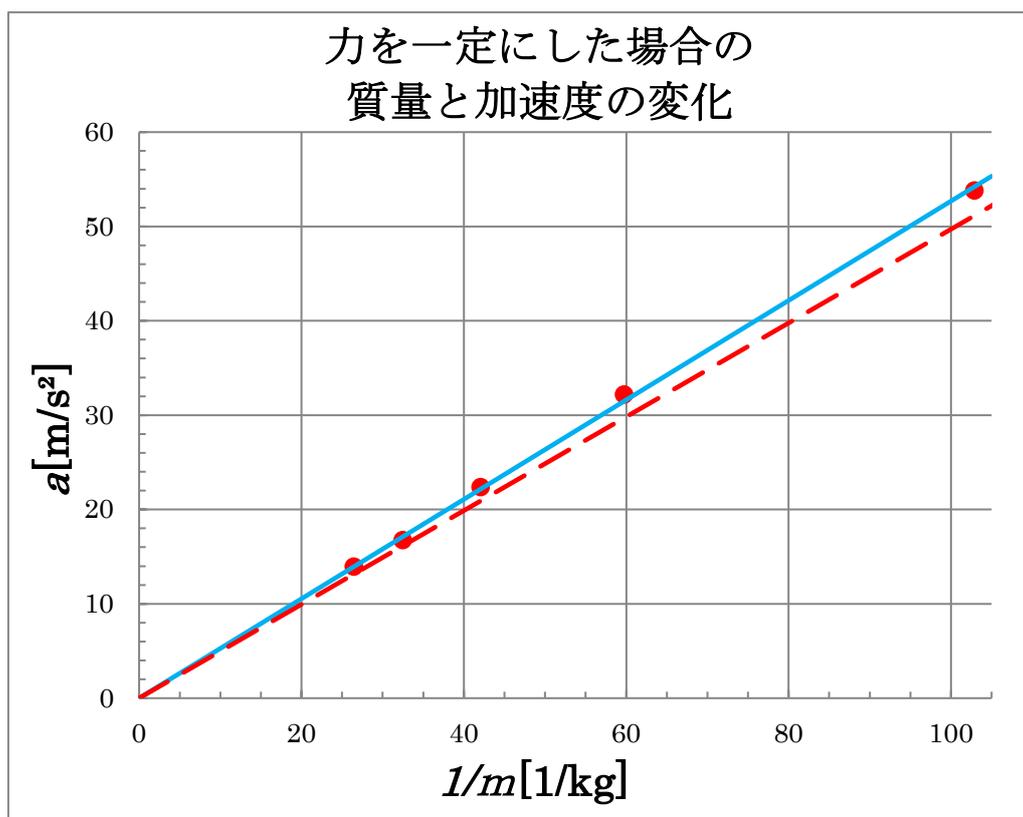


図 3: 実験 2 の測定結果

## (5) 考察

### § 5.1 ばね定数の測定

実験を終えて誤差評価を行ってみると、§ 5.2(次節)の計算で分かるようにばね定数  $k$  の測定誤差から生じる、力  $F$  の伝播誤差がとても大きくなることが分かった。そこで改めて、以下のように、ばね定数の複数回測定を行った。そして、それらの不確かさを統計的な手法を用いて求めることで、一回だけの測定の誤差よりも、より正確にばね定数を測定した。



写真 7

ばね定数の測定は上の写真 7 のように、円盤を垂直に立て、そこにおもりをつけて行った。この実験ではおもりの質量  $m$ [kg] を変えたときの、おもりの位置の変化  $x$ [m] を 10 回測定する。

おもりはペットボトルキャップに 500 円玉を 1 枚、または 4 枚入れて作った。まず、500 円玉を 1 枚だけ入れておいて、おもりの位置をノギスで測定する。次に、500 円玉を 3 枚追加して、再びおもりの位置を測定する。おもりの変位  $x$ [m]、追加して入れた 3 枚の 500 円玉の質量  $m(= 27 \times 10^{-3})$ [kg]、重力加速度の大きさ  $g(= 9.797)$ [m/s<sup>2</sup>]を用いると、ばね定数は、 $k = \frac{mg}{x}$  と計算できる。

表 3 に、測定結果から得られたばね定数と、その平均値からの偏差、そして偏差の二乗を示しておく。

表 3: ばね定数の測定データ

測定番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ばね定数 [N/m]	33.67	31.60	37.06	34.40	35.40	36.15	35.83	37.39	35.34	34.00
偏差 [mm]	-1.42	-3.48	1.97	-0.69	0.32	1.06	0.75	2.31	0.26	-1.08
偏差の二乗 [mm <sup>2</sup> ]	2.01	12.13	3.89	0.47	0.10	1.13	0.56	5.33	0.07	1.18

測定回数を  $N$ [回]，測定番号  $i$  のばね定数を  $k_i$ [N/m]，平均値を  $\bar{k}$ [N/m] とすると，標準偏差  $\sigma$  と標準不確かさ  $\Delta k$ [N/m] は次のように計算できる。

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k})^2} = 1.73$$

$$\Delta k = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.55[\text{N/m}]$$

以上より，ばね定数は次のようになる。

$$k = \bar{k} \pm \Delta k = (35.08 \pm 0.55) [\text{N/m}]$$

## § 5.2 測定誤差による影響

本実験で実際に測定している量は，以下の 3 つである。

- ① 重量計を用いて測定した，おもりの質量
- ② ノギスを用いて測定した，おもりの位置
- ③ ストロボを用いて測定した，円盤の角速度

3 つの量の測定誤差は以下のように判断した。

- ① 質量の測定誤差： $\Delta M = 0.01 \text{ g}$

重量計の最小目盛りは  $0.01 \text{ g}$  で，再現性があり，付属の  $500 \text{ g}$  の分銅を乗せたときにもぴったり  $500 \text{ g}$  を表示する。

- ② 長さの測定誤差： $\Delta r = 0.5 \text{ mm}$

ノギスの最小目盛りは  $0.01 \text{ mm}$  であるが，回転中心からレーザー光までの距離を測定してみると，多少のばらつきが生じる。そのばらつきの程度は最大で  $0.5 \text{ mm}$  と考えられる。

- ③ 角速度の測定誤差： $\Delta \omega = 0.1 \text{ rad/s}$

スマホのアプリによるstroboの発光は 1 分間の発光回数で表示される。その発光回数が妥当であることはメトロノームで確認した。ドリルはレバーを押す強さによって，角速度を調節することができるが，特に低速の場合において一定に保つことがやや難しい。このような場合，stroboの発光時に毎回，おもりが全く同じ位置に見えるというわけではなく，多少ふらついて見えてしまう。よって，1 分間の発光回数は  $\pm 1$  回転程度のバラつきがあり得る。このため角速度の測定誤差を  $\Delta \omega = 2\pi \times \frac{1}{60} \cong 0.1 \text{ rad/s}$  とした。

これらの測定誤差から、向心加速度 $a = r \omega^2$  と向心力 $F = kx$  に伝播する相対誤差は、以下の式で計算することができる。

$$\frac{\Delta F}{F} = \left| \frac{\Delta r}{x} \right| + \left| \frac{\Delta k}{k} \right|$$
$$\frac{\Delta a}{a} = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| + 2 \left| \frac{\Delta \omega}{\omega} \right|$$

実験1、実験2のそれぞれの場合において相対誤差がどのくらいの値になるのかを具体的に調べてみる。まず実験1について、例えば測定番号6の  $\omega = 20.9[\text{rad/s}]$ ,  $r = 99.29[\text{mm}]$ ,  $x = 18.91[\text{mm}]$ ,  $k = 35.08[\text{N/m}]$ を用いると、

$$\frac{\Delta F}{F} = \left| \frac{\Delta r}{x} \right| + \left| \frac{\Delta k}{k} \right| \doteq 0.026 + 0.016 = 0.042 = 4.2\%$$
$$\frac{\Delta a}{a} = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| + 2 \left| \frac{\Delta \omega}{\omega} \right| \doteq 0.005 + 0.010 = 0.015 = 1.5\%$$

第1式を見ると、ばね定数から生じる相対誤差は小さく抑えられている。§5.1(前節)で統計処理をしてばね定数の測定誤差を小さくしたのは、これが理由である。結果的に実験1は大変良い精度で測定できている。

次に実験2について、例えば測定番号1の  $r = 97.03[\text{mm}]$ ,  $x = 14.17[\text{mm}]$ ,  $\omega = 23.6[\text{rad/s}]$ を用いると、

$$\frac{\Delta a}{a} \doteq 0.0051 + 0.0088 = 0.014 = 1.4\%$$

なお、質量の逆数の相対誤差は、0.1% である。実験2も大変良い精度で測定できている。

### § 5.3 誤差を考慮したグラフ

§ 4.2 で提示した実験結果のグラフに、測定結果を考慮してエラーバーを付けて再度示す。

図5(次ページ)では、傾き  $F$  の直線(赤点線)を 2 本描いている。その2本の赤点線は、ばね定数  $k = 35.08 \pm 0.55 \text{ mm}$  とおもりの変位  $x = 12.2 \pm 0.5 \text{ mm}$  の測定誤差を考慮して

$$F = 0.497 \pm 0.008 \text{ N}$$

であることから、傾き  $0.489 \text{ N}$  と傾き  $0.505 \text{ N}$  の 2 本の直線を表している。

エラーバーを付けてみると、よりはっきりわかるが、本実験は測定誤差の範囲内で、運動方程式を正しく検証できたことが分かる

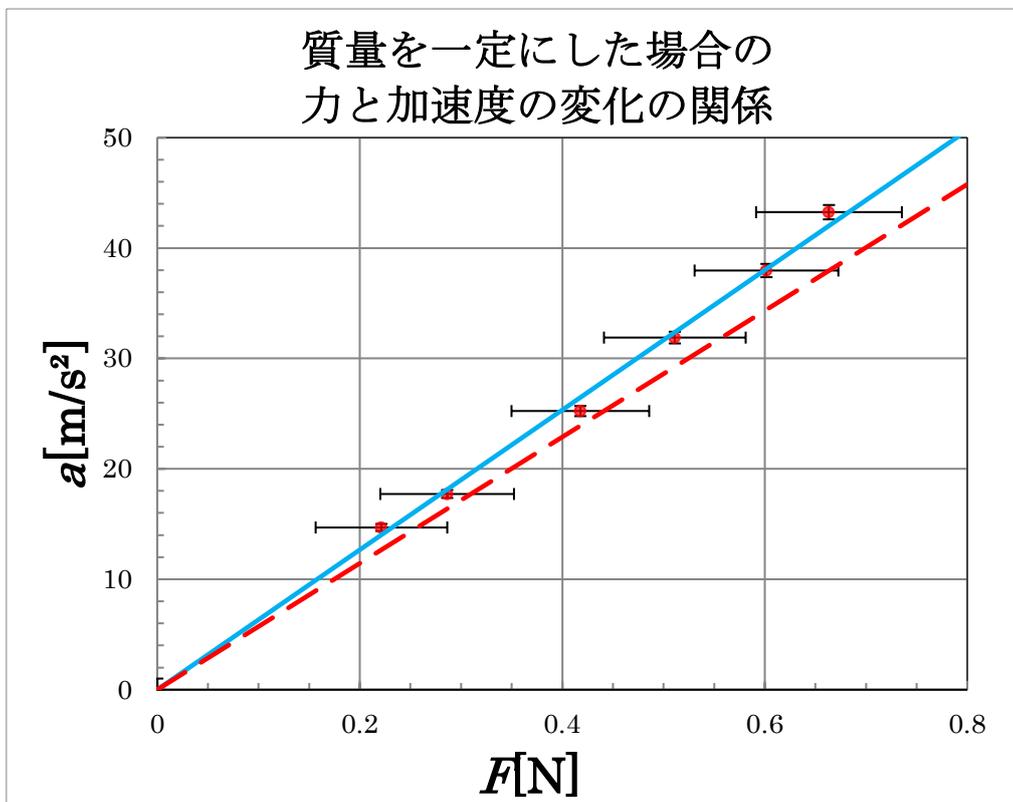


図4: 実験 1 の測定結果 (誤差評価あり)

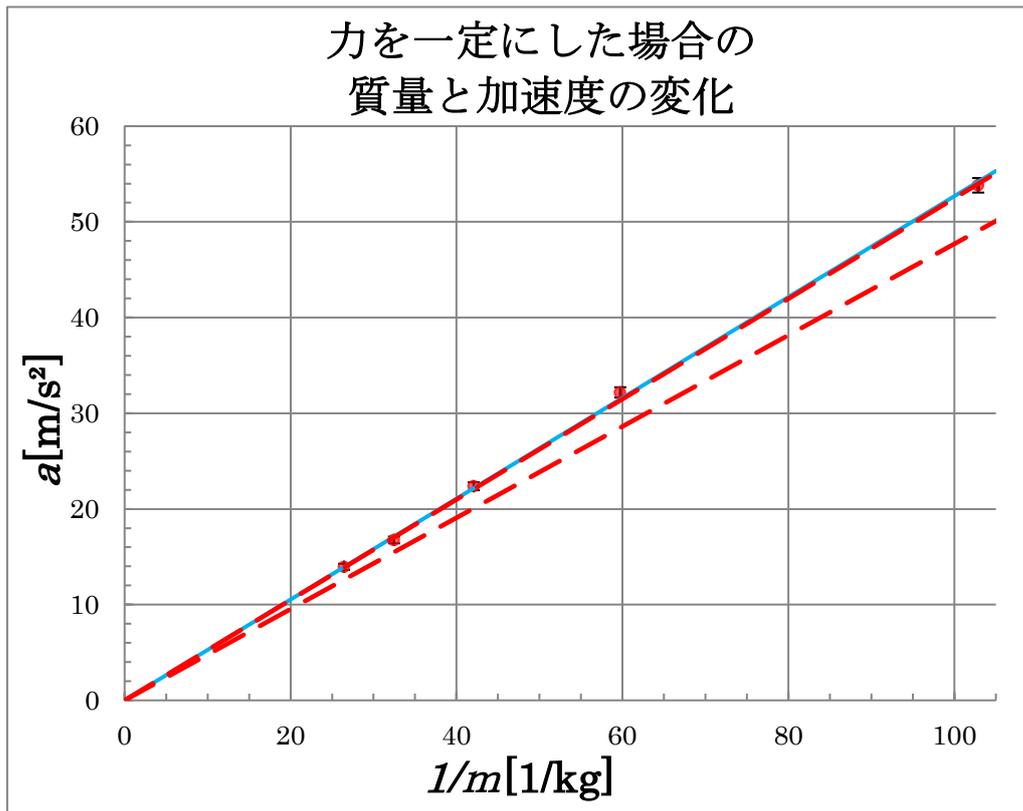


図5: 実験2の測定結果(誤差評価あり)

#### § 5.4 摩擦による影響

摩擦力によって、向心力にどれくらいの影響が生じるのか調べてみた。

まず、おもりと円盤の間の静止摩擦係数を調べるために、摩擦角の大きさを測定した。円盤の上におもりを乗せ、円盤をゆっくり傾けていたところ約  $9^\circ$  で滑り始めた。このことからおもりと円盤の間の静止摩擦係数  $\mu$  は約 0.16 であることがわかる。最大摩擦力の大きさは重力加速度の大きさを  $g$  として、 $\mu mg$  と表される。実験2の場合の、おもりの質量が、 $m = 17.48 \text{ g}$  を用いると最大摩擦力の値は  $0.026 \text{ N}$  となる。これは本実験において決して無視し得る値ではない。それに関わらず、§ 5.2 でも静止摩擦力を考慮に入れなかったのには理由がある。円盤はドリルによって回転している間、わずかながら上下に振動している(毎分数百回程度だろう)。この微小振動がおもりを上下に振動させ、おもりに働く垂直抗力を非常に小さくする瞬間がある。そのため、回転中もおもりは静止摩擦力がほとんど働かない位置へ移動していると考えられる。実際、回転中のおもりがちょうどレーザー光に当たっているときに、おもりを指で触れて少し移動させても、再び元の位置に戻ることが確認できる。

正直なところ、この実験手法が静止摩擦力の影響をほとんど受けないのは偶然で、はじめから狙っていた訳ではなかった。静止摩擦力の影響を考慮してみたときに、それが明らかに感覚とズレていて、はじめて気付いたのである。けれど、そのおかげでとても小さな誤差で実験できた。

## (6) 結果

2種類の実験を行い、実験的にしか証明できない運動方程式  $ma = F$  を高い精度で検証することができた。相対誤差は物体に働く力が4%、加速度が1%であった。

高い精度で実験できた理由には、まず、実験手法の工夫が挙げられる。等速円運動を採用したため、物体に働く力と加速度を同時に長時間一定に保ち続けられたことや、それらの数値を大きくとれたこと、である。また、測定方法の工夫もある。レーザーを用いて回転中のばねの伸びを非接触で正確に測定したことや、ストロボを用いて角速度を非接触で正確に測定したこと、である。偶然にも細かい振動により摩擦の影響が小さくなっていたことも精度を向上させた。

## (7) 参考資料

なし

## (8) 謝辞

実験の測定では同時に複数の作業が必要でした。そんなときに父に協力してもらいました。また、レポートの添削もしてもらいました。過去に物理チャレンジに参加したときより、レポート添削がずっと少なく、成長を感じることができました。

祖父にはドリルをはじめとする機械や工具を貸してもらい、それらを使い方も教えてもらいました。実験装置を組み立てるときのアドバイスももらい、大変参考になりました。

実験でうまくいかないこともありましたが、綺麗なデータが取れたときは嬉しかったです。ありがとうございました。

## (9) 補足事項

写真8のように、回転中心からペットボトルキャップの中心までの距離を  $r$  [m]とする。以後、ペットボトルキャップ入りのおもりを半径  $R$  [m]、単位面積あたりの質量を  $\sigma$  [kg/m<sup>2</sup>]とする、均一の円柱とみなす。

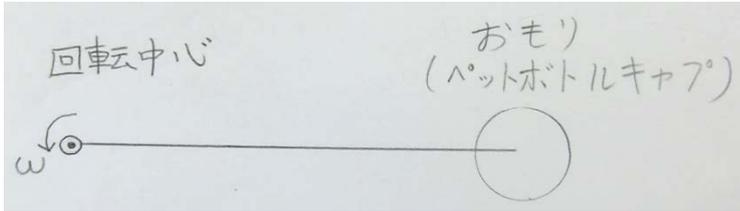


写真8

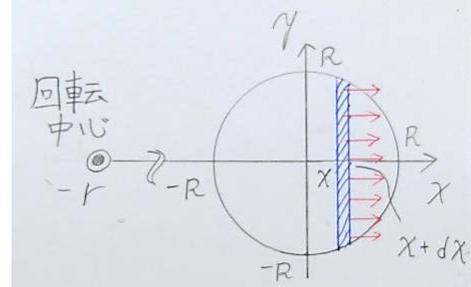


写真9

次に写真9のように、円柱の中心を原点  $O$  として  $x, y$  軸をとる。ここで、回転中心は  $x$  軸上にあるものとする。写真9の の部分に働く遠心力は、 $r$  が  $R$  に比べて十分に大きいとすれば、

$$\sigma \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx \cdot (r + x)\omega^2 \quad [\text{N}]$$

と表せる。したがって、遠心力の合力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{遠心力} &= \int_{-R}^R \sigma \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx \cdot (r + x)\omega^2 \\ &= 2\sigma r \omega^2 \underbrace{\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx}_{R^2 \cdot \frac{\pi}{2}} + 2\sigma \omega^2 \underbrace{\int_{-R}^R x\sqrt{R^2 - x^2} dx}_0 \\ &= \sigma \pi R^2 r \omega^2 \\ &= Mr \omega^2 \end{aligned}$$

(奇関数なので)

円柱の質量を  $M$  [kg]とした。

このように円柱に働く遠心力については、全質量が円柱の中心に集まった質点に遠心力が働くと考えてよい。