レイトレーシング (光線追跡) ともつれた光の生成 10.0 点

答えとその解答例

Part A. 等方的な誘電体における光の伝搬（1.0 点）

A.1　0.4 点

答え：

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}$$

解答例：

$\vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B}=\omega\mu_0\vec{H}$，$\vec{k}\times\vec{H}=-\omega\vec{D}$，より，$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})=-\omega^2\mu_0\vec{D}$ を得る。与えられた等式

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

より，$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})=\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E})-k^2\vec{E}$ を得る。
$\vec{D}\cdot\vec{k}=0$，$\vec{D}=\epsilon\vec{E}$，より $\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})=-k^2\vec{E}$，となり，
$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})=-\omega^2\mu_0\vec{D}$ は，$-k^2\vec{E}=-\omega^2\mu_0\epsilon\vec{E}$，となる。
ここで位相速度は $\dfrac{\mathrm{d}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}{\mathrm{d}t}$ より求められるので，$\vec{v}_p=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\omega}{k}\hat{k}$，となる。明らかに　$\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}$ である。よって　$v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}$ である。

A.2　0.2 点

答え：

$$c\sqrt{\mu_0\epsilon}$$

解答例：

$v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}=\dfrac{c}{n}$，より $n=c\sqrt{\mu_0\epsilon}$。

A.3　0.4 点

答え：

$$\hat{k},\quad v_r = v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}$$

解答例：

光の速さを求めるために，まず，エネルギーの流れの方向はポインティングベクトル $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ で与えられ，これは $\vec{k}$ の方向と一致している。

電磁エネルギー密度は，$u_e = \dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$，および $u_m = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$，により $u = u_e + u_m$ である。

さて，$\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$ から，$\vec{D} = -\dfrac{1}{v_p}\hat{k}\times\vec{H}$ を得る。

したがって，$u_e = -\dfrac{1}{2v_p}\vec{E}\cdot\hat{k}\times\vec{H} = \dfrac{1}{2v_p}\hat{k}\cdot\vec{E}\times\vec{H}$。

また，同様に $\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$，から $u_m = \dfrac{1}{2v_p}\vec{B}\cdot\hat{k}\times\vec{E} = \dfrac{1}{2v_p}\hat{k}\cdot\vec{E}\times\vec{H}$ を得る。

故に $u = \dfrac{1}{v_p}\hat{k}\cdot\vec{E}\times\vec{B}$ となる。

以上より，$v_r = \dfrac{S}{u} = v_p = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}$ を得る。

Part B. 一軸性誘電体媒体中の光の伝搬（4.8 点)

B.1　1.5 点

答え：

$n = n_0$，$\hat{B} = \pm\hat{k}\times\hat{y} = \pm(-\cos\theta, 0, \sin\theta)$，$\hat{D} = \pm\hat{y}$

または,

$n = \dfrac{n_0 n_e}{\sqrt{n_0^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}}$，$\hat{B} = \pm\hat{y}$，$\hat{D} = \pm\hat{y}\times\hat{k} = \pm(\cos\theta, 0, -\sin\theta)$。

$\theta = 0$ に対して，屈折率に 1 つだけ許される値がある。

解答例：

$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} = \omega\mu_0\vec{H}$，$\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$，より,

$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}) = -\omega^2\mu_0\vec{D}$，を得る。各成分を書きだし，$\omega = \dfrac{c}{n}k$ を用いると

$$
\begin{aligned}
-\cos^2\theta E_x + \cos\theta\sin\theta E_z &= -\frac{n_0^2}{n^2}E_x \\
-\cos^2\theta E_y - \sin^2\theta E_y &= -\frac{n_0^2}{n^2}E_y \\
-\sin^2\theta E_z + \cos\theta\sin\theta E_x &= -\frac{n_e^2}{n^2}E_z
\end{aligned}
$$

少し整理すると

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{n_0^2}{n^2}\right)E_y &= 0 \\
\left(\frac{n_0^2}{n^2}-\cos^2\theta\right)E_x + \cos\theta\sin\theta E_z &= 0 \\
\cos\theta\sin\theta E_x + \left(\frac{n_e^2}{n^2}-\sin^2\theta\right)E_z &= 0
\end{aligned}
$$

行列式を 0 として

$$
\left(1-\frac{n_0^2}{n^2}\right)\left[\left(\frac{n_0^2}{n^2}-\cos^2\theta\right)\left(\frac{n_e^2}{n^2}-\sin^2\theta\right)-\cos^2\theta\sin^2\theta\right]=0
$$

となる。これより，明らかに一般の θ に対して，n に対する解が 2 つ存在する。

(1) $n = n_0$

この場合は，$E_x = E_z = 0$ である。$\vec{E}$ は y 軸に平行である。$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$ および $\vec{k}\times(\mu_0\vec{B}) = -\omega\vec{D}$ より $\vec{B}$ と $\vec{D}$ の方向は $\hat{B} = \pm\hat{k}\times\hat{y} = \pm(-\cos\theta, 0, \sin\theta)$ および $\hat{D} = -\hat{k}\times\hat{B} = \pm(0,1,0) = \pm\hat{y}$ となる。

(2)

$$
\left(\frac{n_0^2}{n^2}-\cos^2\theta\right)\left(\frac{n_e^2}{n^2}-\sin^2\theta\right)-\cos^2\theta\sin^2\theta = 0
$$

これより

$$
n = \frac{n_0 n_e}{\sqrt{n_0^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}}
$$

が得られる。明らかに，$\theta = 0$, $n = n_0$ では屈折率は 1 つのみである。これは光軸の方向である。

この場合，$E_y = 0$ で，故に $\vec{E}$ は xz 面内にある。

従って $\vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B}$ は $\hat{B}=\pm\hat{y}$ を意味する。

また，$\vec{k}\times(\mu_0\vec{B})=-\omega\vec{D}$ は $\hat{D}=\pm\hat{y}\times\hat{k}$ を意味する。

B.2　0.8 点

答え：

(1) $n=n_0$ のとき，$\hat{E}=\pm\hat{y}$ で正常光線である。

$\tan\alpha=0$。

(2)

$$n=\frac{n_0 n_e}{\sqrt{n_0^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta}}$$

のとき，

$$\hat{E}=\pm\frac{1}{\sqrt{n_0^4\sin^2\theta+n_e^4\cos^2\theta}}(-n_e^2\cos\theta,0,n_0^2\sin\theta)$$

で異常光線である。

$$\tan\alpha=\frac{(n_0^2-n_e^2)\tan\theta}{n_e^2+n_0^2\tan^2\theta}$$

解答例：

(1) $n=n_0$ に対しては $\hat{E}$ と $\hat{D}$ は y 軸に対して平行である。これは正常光線であり，$\tan\alpha=0$ である。

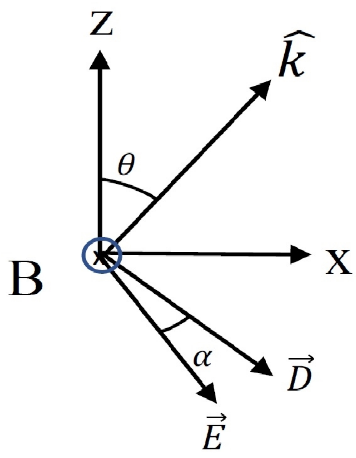
(2)

$$n=\frac{n_0 n_e}{\sqrt{n_0^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta}}$$

に対して $n\neq n_0$ で，$E_y=0$ である。

n を E_x と E_z の式に代入すれば，

$$\frac{n_0^2}{n_e^2}\sin\theta E_x+\cos\theta E_z=0$$



$\vec{D} \perp \hat{k}$

電場は xz 面にあって

$$\hat{E} = \pm \frac{1}{\sqrt{n_0^4 \sin^2\theta + n_e^4 \cos^2\theta}} (-n_e^2 \cos\theta, 0, n_0^2 \sin\theta)$$

（$\vec{B}$ は $\mp y$ 方向を向いている。）故に $\vec{E}$ は $\vec{k}$ に垂直ではなく，$\vec{D}$ と $\vec{k}$ とともに xz 面内にある。これは異常光線である。

$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$ は $\hat{k}$ に垂直である。故に $\hat{D} = \pm(-\cos\theta, 0, \sin\theta)$。$\vec{B} = \hat{y}$ として与えられた θ に対する $\vec{E}$ と $\vec{D}$ の相対方向は $n_e < n_0$ のときについて図のように示される。

$\vec{E}$ と $\vec{D}$ のそれぞれの x 軸に対する相対角度を θ_1 と θ_2 とする。すると $\tan\theta_2 = -\tan\theta$ および $\tan\theta_1 = -\frac{n_0^2}{n_e^2}\tan\theta$ である。故に

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{(n_0^2 - n_e^2)\tan\theta}{n_e^2 + n_0^2 \tan^2\theta}$$

$\vec{E}$ と $\vec{D}$ の相対的な方向が逆転した $\tan\alpha < 0$ をのぞいて $n_e > n_0$ のばあいも同じ結果が保たれる。

B.3 0.6 点

答え：

$n = n_0$ のとき，$\hat{E} = \pm\hat{y}$ で正常光線である。

$n = \dfrac{n_0 n_e}{\sqrt{n_0^2 \sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}}$ のとき，

$$\hat{E} = \pm \frac{1}{\sqrt{n_0^4 \sin^2\theta + n_e^4 \cos^2\theta}} \frac{-n_e^2 \cos\theta \hat{k} + (n_0^2 \sin^2\theta - n_e^2\cos^2\theta)\hat{z}}{\sin\theta}$$

で異常光線である。

解答例：
この問題においては軸対称性があり，z 軸と $\hat{k}$ との平面内で $\vec{k} = k_z\hat{z} + k_\perp \hat{k}_\perp$ および $\vec{E} = E_z\hat{z} + E_\perp \hat{k}_\perp$ と書くことができる。ここで $\hat{k}_\perp$ は $\hat{z}$ に垂直方向を表している。すなわち $k_z = k\cos\theta$，$k_\perp = k\sin\theta$，$E_z = E\cos\theta$，$E_\perp = E\sin\theta$ である。これは

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}) = -\omega^2\mu_0\vec{D}$$

の成分を書き下せば E_x を $E_\perp$ で置き換えれば同じ関係式を得る。ゆえにすべての解は $\hat{x}$ を $\hat{k}_\perp$ で置き換えれば同じである。$\hat{k}_\perp \sin\theta = \hat{k} - \cos\theta\hat{z}$ なので

$$n = \frac{n_0 n_e}{\sqrt{n_0^2 \sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}}$$

のとき答えの結果を得る。

B.4　0.8 点

答え：

(1) $n = n_0$，$\tan\alpha_r = 0$，$v_r = \dfrac{c}{n_0}$，$\hat{S} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$

(2)

$$\begin{aligned} n &= \frac{n_0 n_e}{\sqrt{n_0^2 \sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}} \\ \tan\alpha_r &= \frac{(n_0^2 - n_e^2)\tan\theta}{n_e^2 + n_0^2\tan^2\theta} \\ v_r &= \frac{c}{n_0 n_e}\sqrt{\frac{n_0^4\sin^2\theta + n_e^4\cos^2\theta}{n_0^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}} \end{aligned}$$

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{n_0^4 \sin^2\theta + n_e^4 \cos^2\theta}}(n_0^2 \sin\theta, 0, n_e^2 \cos\theta)$$

(3) $n_s = \sqrt{(\hat{S}\cdot\hat{x})^2 n_e^2 + (\hat{S}\cdot\hat{z})^2 n_0^2}$

解答例：

エネルギー流の方向はポインティングベクトル $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ である。電磁波のエネルギー密度を u，速さを v_r とする。すなわち $v_r = \frac{S}{u}$ である。ここに $u = u_e + u_m$，$u_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$，$u_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ である。以下，2 つの場合がある。

(1) $n = n_0$ の場合，$\vec{E} = (0, E, 0)$，$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$，$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\mu_0\vec{H}$，$\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$。

$\hat{k}$，$\vec{E}$，$\vec{H}$ は互いに垂直である。故に $\vec{S}$ は $\hat{k}$ に平行で $\hat{S} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$，$\tan\alpha_r = 0$ である。

$\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$ より，$\vec{D} = -\frac{1}{v_p}\hat{k}\times\vec{H}$ を得る。故に $u_e = -\frac{1}{2v_p}\vec{E}\cdot\hat{k}\times\vec{H} = \frac{1}{2v_p}\hat{k}\cdot\vec{E}\times\vec{H}$。同様に $u_m = \frac{1}{2v_p}\vec{H}\cdot\hat{k}\times\vec{E} = \frac{1}{2v_p}\hat{k}\cdot\vec{E}\times\vec{H}$。故に $\frac{1}{v_p}\hat{k}\cdot\vec{E}\times\vec{H}$。

故に $\hat{S} = \hat{k}$，また $u = \frac{S}{v_p}$ である。

よって $v_r = \frac{S}{u} = v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_0}$。

(2) $n = \frac{n_0 n_e}{\sqrt{n_0^2 \sin^2\theta + n_e^2 \cos^2\theta}}$ の場合，$\vec{B} = (0, B, 0)$（y 方向が負の場合も同様）ととることができ，$\vec{D}$, $\vec{E}$, $\hat{k}$ は xz 面にあり，$\vec{D}$ は $\hat{k}$ に垂直である。故に $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ と $\hat{k}$ の間の角度は $\vec{D}$ と $\vec{E}$ の間の角と等しい：$\alpha = \alpha_r$。

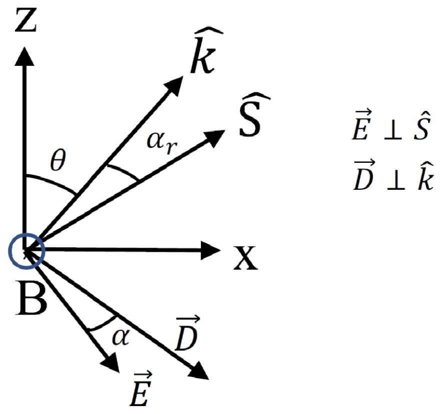
これは$n_e < n_0$ の場合に図のように示される。（$n_e > n_0$ に対してはα, α_r は両者負で $\vec{E}$, $\vec{D}$ の相対方向を逆転させ $\hat{S}$, $\hat{k}$ を入れ替える。）

以上より，$\tan\alpha_r = \tan\alpha = \frac{(n_0^2 - n_e^2)\tan\theta}{n_e^2 + n_0^2 \tan^2\theta}$。

また，$u = \frac{1}{v_p}\hat{k}\cdot\vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{v_p}|\vec{E}\times\vec{H}|\cos\alpha$ 故に $v_r = \frac{S}{u} = \frac{v_p}{\cos\alpha}$ を得る。

位相速度 v_p と光速度との関係は $v_p = v_r\cos\alpha$ である。

$\tan\alpha$ より $\cos\alpha = \frac{n_0^2 \sin^2\theta + n_e^2 \cos^2\theta}{\sqrt{n_0^4 \sin^2\theta + n_e^4 \cos^2\theta}}$ である。



故に

$$v_r = \frac{c}{n\cos\alpha} = \frac{c}{n_0 n_e}\sqrt{\frac{n_0^4\sin^2\theta + n_e^4\cos^2\theta}{n_0^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}}$$

また，$\hat{S} = (\sin(\theta+\alpha), \cos(\theta+\alpha))$ より，

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{(n_0^2 - n_e^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{n_0^4\sin^2\theta + n_e^4\cos^2\theta}} \\ \cos\alpha &= \frac{n_e^2\cos^2\theta + n_0^2\sin^2\theta}{\sqrt{n_e^4\cos^2\theta + n_0^4\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

また，

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{n_0^4\sin^2\theta + n_e^4\cos^2\theta}}(n_0^2\sin\theta, 0, n_e^2\cos\theta)。$$

(3)

$$n_s^2 = \left(\frac{c}{v_r}\right)^2 = n_0^2 n_e^2 \frac{n_e^2\cos^2\theta + n_0^2\sin^2\theta}{n_e^4\cos^2\theta + n_0^4\sin^2\theta} = \frac{n_0^4\sin^2\theta n_e^2 + n_e^4\cos^2\theta n_0^2}{n_e^4\cos^2\theta + n_0^4\sin^2\theta}$$

より

$$n_s = (\hat{S}\cdot\hat{x})^2 n_e^2 + (\hat{S}\cdot\hat{z})^2 n_0^2$$

B.5 1.1 点

答え：

$$\begin{aligned}\bar{A} &= P_1(n^2\sin^2\theta_1 - P_1) \\ \bar{B} &= -2P_3(n^2\sin^2\theta_1 - P_1) \\ \bar{C} &= P_2 n^2\sin^2\theta_1 - P_3^2\end{aligned}$$

$$\phi = 0, \ \tan\theta_2 = \frac{n n_e \sin\theta_1}{n_0\sqrt{n_0^2 - n^2\sin^2\theta_1}}$$

$$\phi = \pi/2, \ \tan\theta_2 = \frac{n n_0 \sin\theta_1}{n_e\sqrt{n_e^2 - n^2\sin^2\theta_1}}$$

解答例：

A 点と B 点の z 軸に対する距離を d とし，光線が通過する界面の点を原点 O とする。A 点と B 点の座標はそれぞれ $(h_1, 0, d-z)$ 及び$(h_2, 0, z)$ である。$\overline{\mathrm{AO}} \equiv d_1 = \sqrt{h_1^2 + (d-z)^2}$，$\overline{\mathrm{BO}} \equiv d_2 = \sqrt{h_2^2 + z^2}$ である。A から B への伝播時間は光線の速さ v_r によって $(d_1 n_{s1} + d_2 n_{s2})/c$ で決まる。ここに n_{si} は媒質 i の光学定数である。これはフェルマーの原理に従えば，$\varDelta \equiv d_1 n_{s1} + d_2 n_{s2}$ で定義される光路長を極小化する必要がある。これより，$n_{s2}^2 = (\hat{\mathrm{b}}\cdot\hat{x}_2)^2 n_e^2 + (\hat{\mathrm{b}}\cdot\hat{z}_2)^2 n_0^2$ を得る。但し $\hat{\mathrm{b}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の単位ベクトルである。

等方媒質の光学定数は単純な屈折率であり，$n_{s1} = n$ である。次の

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{b}}\cdot\hat{x}_2 &= \cos(\phi - \theta_2) = \frac{h_2}{d_2}\cos\phi + \frac{z}{d_2}\sin\phi \\
\hat{\mathrm{b}}\cdot\hat{z}_2 &= \cos(\frac{\pi}{2} + \phi - \theta_2) = \sin(\theta_2 - \phi) = \frac{z}{d_2}\cos\phi - \frac{h_2}{d_2}\sin\phi
\end{aligned}$$

より次を得る。

$$\varDelta = n\sqrt{h_1^2 + (d-z)^2} + \sqrt{(h_2\cos\phi + z\sin\phi)^2 n_e^2 + (-h_2\sin\phi + z\cos\phi)^2 n_0^2}$$

極小値は $\dfrac{\mathrm{d}\varDelta}{\mathrm{d}z} = 0$ により次式が得られる。

$$n\frac{z-d}{\sqrt{h_1^2 + (d-z)^2}} + \frac{h_2\sin\phi\cos\phi(n_e^2 - n_0^2) + z(n_e^2\sin^2\phi + n_0^2\cos^2\phi)}{\sqrt{(h_2\cos\phi + z\sin\phi)^2 n_e^2 + (-h_2\sin\phi + z\cos\phi)^2 n_0^2}} = 0$$

$\dfrac{z-d}{\sqrt{h_1^2 + (d-z)^2}} = \sin\theta_1$ であることなどから，

$$n^2\sin^2\theta_1 = \frac{(P_3 - P_1\tan\theta_2)^2}{P_1\tan^2\theta_2 - 2P_3\tan\theta_2 + P_2}$$

を得る。ただし，

$$\begin{aligned}
P_1 &= n_0^2\cos^2\phi + n_e^2\sin^2\phi \\
P_2 &= n_0^2\sin^2\phi + n_e^2\cos^2\phi \\
P_3 &= (n_0^2 - n_e^2)\sin\phi\cos\phi
\end{aligned}$$

以上から

$$P_1(n^2\sin^2\theta_1 - P_1)\tan^2\theta_2 - 2P_3(n^2\sin^2\theta_1 - P_1)\tan\theta_1 + P_2n^2\sin^2\theta_1 - P_3^2 = 0$$

となる。これより

$$\begin{aligned}\bar{A} &= P_1(n^2\sin^2\theta_1 - P_1)\\ \bar{B} &= -2P_3(n^2\sin^2\theta_1 - P_1)\\ \bar{C} &= P_2n^2\sin^2\theta_1 - P_3^2\end{aligned}$$

$\phi = 0$ に対しては，$P_3 = 0$，$P_1 = n_0^2$，$P_2 = n_e^2$。
$n_0^2(n^2\sin^2\theta_1 - n_0^2)\tan^2\theta_2 + n_e^2n^2\sin^2\theta_1 = 0$ より，

$$\tan\theta_2 = \frac{nn_e\sin\theta_1}{n_0\sqrt{n_0^2 - n^2\sin^2\theta_1}}$$

$\phi = \pi/2$ に対しては，$P_3 = 0$，$P_1 = n_e^2$，$P_2 = n_0^2$。
$n_e^2(n^2\sin^2\theta_1 - n_e^2)\tan^2\theta_2 + n_0^2n^2\sin^2\theta_1 = 0$ より

$$\tan\theta_2 = \frac{nn_0\sin\theta_1}{n_e\sqrt{n_e^2 - n^2\sin^2\theta_1}}$$

Part C. 光のもつれ（エンタングルメント）(4.2 点)

C.1　0.8 点

答え：

(1) $\omega = \omega_1 \pm \omega_2$，$\vec{k} = \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$

(2) $\hbar\omega = \hbar\omega_1 \pm \hbar\omega_2$，光子のエネルギー保存
$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}_1 \pm \hbar\vec{k}_2$，光子の運動量保存

(3) 光子の分裂：エネルギー保存に対して $\omega = \omega_1 + \omega_2$，
運動量保存に対して $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$

解答例：
角振動数 ω，波数ベクトル $\vec{k}$ の光波に対してはその電場は $\vec{A}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ のように与えられる。これはまた，$\dfrac{\vec{A}}{2}(e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}+e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})})$ と書き直すことができる。この式を

$$P_i^{NL} = \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$$

に代入し，指数の等式を整理すると

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 + \omega_2, \qquad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad \text{または} \\ \omega &= \omega_1 - \omega_2, \qquad \vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \end{aligned}$$

となる。ただし，振動数は正である。この関係は光子のエネルギー $\hbar\omega$ と運動量 $\hbar\vec{k}$ から明らかである。$\omega = \omega_1 + \omega_2$，$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ は $(\omega, \vec{k})$ の光子が消滅して 2 つの光子 $(\omega_1, \vec{k}_1)$ と $(\omega_2, \vec{k}_2)$ に分裂した。一方 $\omega = \omega_1 - \omega_2$，$\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ は $(\omega_1, \vec{k}_1)$ の光子が消滅して 2 つの光子 $(\omega, \vec{k})$ と $(\omega_2, \vec{k}_2)$ に分裂した。

C.2　0.8 点

答え：

o → **o** ＋ **o**，　　**e** → **e** ＋ **e**

解答例：
同一直線上で位相の整合条件は

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad \frac{n_i(\omega)\omega}{c} = \frac{n_j(\omega_1)\omega_1}{c} + \frac{n_k(\omega_2)\omega_2}{c}$$

である。ここに i, j, k は **o** か **e** かである。$\omega_1 \geq \omega_2$ であると仮定すると，ω_1 は $\omega_1 = \omega - \omega_2$ として解くことができ，次を得る。

$$n_i(\omega) - n_j(\omega_1) = \frac{\omega_2}{\omega}\{n_k(\omega_2) - n_j(\omega_1)\}$$

これは，もし，$i = j = k$ で $n_i(\omega) - n_j(\omega_1) \geq 0$，かつ $n_k(\omega_2) - n_j(\omega_1) \leq 0$ であれば，$\omega \geq \omega_1 \geq \omega_2$，であることから，上記の方程式は満たされないことは明かである。
他の場合に関しては n_0 と n_e には関係が無いので，位相の整合条件は満たされている。故に，$\omega = \omega_1 \pm \omega_2$，$\vec{k} = \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$ は不可能である。故に **o** → **o** ＋ **o**，**e** → **e** ＋ **e** のみ不可能である。

C.3　1.3 点

答え：

(1)

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{K_0\{1-N_e(\Omega_e,\theta)\cot\theta\}+K_e}{2K_eK_0} \\
N &= -\frac{N_e}{2M} \\
L &= -(\Omega-\Omega_e)\left(\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_e}\right)+\frac{N_e^2}{4M}
\end{aligned}
$$

(2) 円錐の軸と z' の間の角度 $\tan^{-1}\left(\frac{N}{K_0}\right)$ は

$$
\frac{N}{K_0} = -\frac{2K_eN_e}{K_0\{1-N_e(\Omega_e,\theta)\cot\theta\}+K_e}
$$

(3) 円錐の角度 $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{L/M}}{K_0}\right)$ は

$$
\frac{\sqrt{L/M}}{K_0} = -\frac{\Omega-\Omega_e}{MK_0}\left(\frac{1}{u_o}-\frac{1}{u_e}\right)+\frac{N_e^2}{4M^2K_0}
$$

解答例：

位相の整合性を満たすために角周波数 ω_1 と ω_2 を $\omega_1=\Omega_e+\nu$ と $\omega_2=\Omega_0+\nu'$ として，新たな ν と ν' で展開する。

$\Omega_e+\Omega_0=\Omega_p$ より $\omega_1+\omega_2=\omega$ ，$\nu=-\nu'$ である。

同じように波数ベクトルに対しても $\vec{k}=\vec{k}_1+\vec{k}_2$ の条件は $k_z=k=K_p=k_{1z}+k_{2z}$ および $\vec{k}_{2\perp}=-\vec{k}_{1\perp}\equiv\vec{q}_\perp$ のように書くことが出来る。

通常光線 **o** に対しては $k_{2\perp}^2+k_{2z}^2=k_2^2$，$k_2=\frac{n_0(\omega_2)\omega_2}{c}$ である。これより $k_{2z}=\sqrt{k_2^2-k_{2\perp}^2}=k_2-\frac{k_{2\perp}^2}{2k_2}$ となる。k_2 の ω_2 依存性の ν に対する展開をすると

$$
k_2=\frac{n_0(\omega_2)\omega_2}{c}=\frac{n_0(\Omega_0)\Omega_0}{c}+\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}\omega_2}(\omega_2-\Omega_0)=K_0-\frac{\nu}{u_0}
$$

を得る。ここで u_0 は通常光線の速さである。故に2次までに関して

$$k_{2z} = K_0 - \frac{\nu}{u_0} - \frac{q_\perp^2}{2K_0}$$

を得る。同様に異常光線 $\mathbf{e}$ に対しては $k_{1\perp}^2 + k_{1z}^2 = k_1^2$，$k_1 = \dfrac{n_e(\omega_1,\theta_1)\omega_1}{c}$ である。これより $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_{1\perp}^2} = k_1 - \dfrac{k_{1\perp}^2}{2k_1}$ となる。k_1 の展開は，k_2 とはその角度依存性に関して異なる。$\vec{k}_1$ の球面角を θ_1 と ϕ_1 とする。これより

$$k_1 = \frac{n_e(\omega_1,\theta_1)\omega_1}{c} = \frac{n_e(\Omega_e,\theta)\Omega_e}{c} + \frac{\mathrm{d}k_1(\Omega_e,\theta)}{\mathrm{d}\Omega_e}(\omega_1 - \Omega_e) + \frac{\Omega_e}{c}\frac{\mathrm{d}n_e(\Omega_e,\theta)}{\mathrm{d}\theta}(\theta_1 - \theta) + \cdots$$

ここに $\dfrac{n_e(\Omega_e,\theta)\Omega_e}{c} = K_e$，また，$\dfrac{\mathrm{d}k_1(\Omega_e,\theta)}{\mathrm{d}\Omega_e}$ は異常光線の速さ u_e に対して $1/u_e$ であり

$$\frac{\mathrm{d}k_1(\Omega_e,\theta)}{\mathrm{d}\Omega_e} = \frac{n_e(\Omega_e,\theta)}{c} + \frac{\Omega_e}{c}\frac{\mathrm{d}n_e(\Omega_e,\theta)}{\mathrm{d}\Omega_e}$$

と得られる。さらに，

$$\frac{\mathrm{d}n_e(\Omega_e,\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{n_e n_o(n_e^2 - n_0^2)\sin\theta\cos\theta}{(n_0^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta)^{3/2}} = n_e(\Omega_e,\theta)N_e(\Omega_e,\theta)$$

であることから

$$N_e(\Omega_e,\theta) = \frac{(n_e^2 - n_0^2)\sin\theta\cos\theta}{n_0^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}$$

を得る。$n_e < n_0$ に対して $N_e(\Omega_e,\theta) < 0$ であることに注意しよう。
$\delta\theta = \theta_1 - \theta$ を求めるために，任意の $\vec{k}_\alpha$ に対して

$$\hat{k}_\alpha \cdot \widehat{\mathrm{OA}} = \cos\theta_\alpha = \cos\theta\cos\psi_\alpha + \sin\theta\sin\psi_\alpha\cos\phi_\alpha$$

を得る（問題の図2(a)参照）。
$\sin\psi_1 = |\vec{k}_{\perp,1}|/|\vec{k}_1| = q_\perp/k_1 \ll 1$ であり，　また，　$\cos\psi_1 = \sqrt{1-\sin^2\psi_1}$ $= 1 - (1/2)\sin^2\psi_1 + \cdots$ の2次までで，k_1 を K_e で置き換え

$$\hat{k}_1 \cdot \widehat{\mathrm{OA}} = \cos\theta_1 = \cos\theta\left(1 - \frac{1}{2}\frac{q_\perp^2}{K_e^2} + \cdots\right) + \sin\theta\left(\frac{q_\perp}{K_e} + \cdots\right)\cos\phi_1$$

を得る。

一方，$\cos\theta_1 = \cos\theta + \dfrac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}(\theta_1-\theta) + \cdots = \cos\theta - \sin\theta(\theta_1-\theta) + \cdots$ であり，これと $\hat{k}_1\cdot\widehat{\mathrm{OA}}$ の方程式と比べて

$$\theta_1 - \theta = \frac{1}{2}\frac{q_\perp^2}{K_e^2}\cot\theta - \frac{q_\perp}{K_e}\cos\phi_1 + \cdots = \frac{1}{2}\frac{q_\perp^2}{K_e^2}\cot\theta + \frac{q_{x'}}{K_e} + \cdots$$

以上をすべて合わせて

$$k_{1z} = K_e + \frac{1}{u_e}(\Omega-\Omega_e) + N_e(\Omega_e,\theta)q_{x'} + \frac{1}{2}\frac{q_\perp^2}{K_e}[N_e(\Omega_e,\theta)\cot\theta - 1] + \cdots$$

となることが分かる。この式を k_{1z} と $K_p = k_{1z} + k_{2z}$ と合わせると

$$(\Omega-\Omega_e)\left(\frac{1}{u_e}-\frac{1}{u_0}\right) + N_e(\Omega_e,\theta)q_{x'} + q_\perp^2\left\{\frac{K_0[N_e(\Omega_e,\theta)\cot\theta-1]-K_e}{2K_eK_0}\right\} = 0$$

を得る。$n_e < n_0$ より $N_e(\Omega_e,\theta) < 0$ である。これより

$$M\left(q_{x'} - \frac{N_e}{2M}\right)^2 + Mq_{y'}^2 = -(\Omega-\Omega_e)\left(\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_e}\right) + \frac{N_e^2}{4M}$$

と書きかえることが出来る。ここに

$$M = -\frac{K_0[N_e(\Omega_e,\theta)\cot\theta-1]-K_e}{2K_eK_0} > 0$$

である。

故に $N = -N_e/2M > 0$ $(N_e < 0)$，および，

$$L = -(\Omega-\Omega_e)\left(\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_e}\right) + \frac{N_e^2}{4M}$$

である。明らかに $\vec{k}_2$ で形成される円錐の軸は $\vec{q}_\perp$ で特徴づけられる。円錐の軸と z' の間の角度は $\tan^{-1}(N/k_{1z})$ であり，これは

$$N/k_{1z} \approx \frac{N}{K_0} = -\frac{2K_eN_e}{K_0\{1-N_e(\Omega_e,\theta)\cot\theta\}+K_e}$$

である。円錐の角度は

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{L/M}}{k_0} \approx \frac{\sqrt{L/M}}{K_0} = -\frac{\Omega-\Omega_e}{MK_0}\left(\frac{1}{u_o}-\frac{1}{u_e}\right) + \frac{N_e^2}{4M^2K_0}$$

である。

C.4　0.8 点

答え：

$$\begin{aligned} P(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\sin^2(\alpha+\beta) \\ P(\alpha,\beta_\perp) &= \frac{1}{2}\cos^2(\alpha+\beta) \\ P(\alpha_\perp,\beta) &= \frac{1}{2}\cos^2(\alpha+\beta) \\ P(\alpha_\perp,\beta_\perp) &= \frac{1}{2}\sin^2(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

解答例：

a 光子に対して偏光の方向の電場と偏光に垂直の電場をそれぞれ $|\alpha_x\rangle$ と $|\alpha_y\rangle$ で表すことにしよう。ここに α_x および α_y は適当な単位で計った電場の振幅を表すものとする。$\hat{x}'$ と $\hat{y}'$ 方向の電場（の状態）は

$$\begin{aligned} |\hat{x}'_a\rangle &= \cos\alpha|\alpha_x\rangle - \sin\alpha|\alpha_y\rangle \\ |\hat{y}'_a\rangle &= \sin\alpha|\alpha_x\rangle + \cos\alpha|\alpha_y\rangle \end{aligned}$$

同様に b 光子に対して

$$\begin{aligned} |\hat{x}'_b\rangle &= \cos\beta|\beta_x\rangle - \sin\beta|\beta_y\rangle \\ |\hat{y}'_b\rangle &= \sin\beta|\beta_x\rangle + \cos\beta|\beta_y\rangle \end{aligned}$$

である。これらから

$$\begin{aligned} |\hat{x}'_a\rangle|\hat{y}'_b\rangle &= (\cos\alpha|\alpha_x\rangle - \sin\alpha|\alpha_y\rangle)(\sin\beta|\beta_x\rangle + \cos\beta|\beta_y\rangle) \\ |\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle &= (\sin\alpha|\alpha_x\rangle + \cos\alpha|\alpha_y\rangle)(\cos\beta|\beta_x\rangle - \sin\beta|\beta_y\rangle) \end{aligned}$$

もつれた光子対に対しては

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}'_a\rangle)|\hat{y}'_b\rangle + |\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle) \\ = & \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)(|\alpha_x\rangle|\beta_x\rangle - |\alpha_y\rangle)|\beta_y\rangle) \\ & +(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(|\alpha_x\rangle|\beta_y\rangle - |\alpha_y\rangle)|\beta_x\rangle)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sin(\alpha+\beta)(|\alpha_x\rangle|\beta_x\rangle - |\alpha_y\rangle|\beta_y\rangle) \\
&\quad + \cos(\alpha+\beta)(|\alpha_x\rangle|\beta_y\rangle - |\alpha_y\rangle|\beta_x\rangle)\}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
P(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\sin^2(\alpha+\beta) \\
P(\alpha_\perp,\beta_\perp) &= \frac{1}{2}\sin^2(\alpha+\beta) \\
P(\alpha,\beta_\perp) &= \frac{1}{2}\cos^2(\alpha+\beta) \\
P(\alpha_\perp,\beta) &= \frac{1}{2}\cos^2(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

C.5 0.5 点

答え：

$$S = |\cos 2(\alpha-\beta) - \cos 2(\alpha-\beta')| + |\cos 2(\alpha'-\beta) + \cos 2(\alpha'-\beta')|$$

$S = 2\sqrt{2}$。

$S > 2$ は古典理論とは相容れない。

解答例：

まず気づくのは，

$$E(\alpha,\beta) = \frac{P(\alpha,\beta) + P(\alpha_\perp,\beta_\perp) - P(\alpha,\beta_\perp) - P(\alpha_\perp,\beta)}{P(\alpha,\beta) + P(\alpha_\perp,\beta_\perp) + P(\alpha,\beta_\perp) + P(\alpha_\perp,\beta)}$$

である。P の表式を用いれば

$$
\begin{aligned}
E(\alpha,\beta) &= \sin^2(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) \\
&= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 \\
&= -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 4\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta \\
&= \sin(2\alpha)\sin(2\beta) - \cos(2\alpha)\cos(2\beta) \\
&= -\cos 2(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

故に

$$S = |\cos 2(\alpha-\beta) - \cos 2(\alpha-\beta')| + |\cos 2(\alpha'-\beta) + \cos 2(\alpha'-\beta')|$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha' = 0, \quad \beta = -\frac{\pi}{8}, \quad \beta' = \frac{\pi}{8}$$

に対して S は

$$S = \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2} > 2$$

となる。以上から古典理論とは相容れない。