静電レンズ (10 点)

全電荷 q で一様に帯電した半径 R の導体リングを考える．リングは太さ $2a \ll R$ の中空トロイド (ドーナツのような真ん中に穴が空いた回転曲面) とする．この太さは Part A，B，C，E では無視して良い．図 1 のように，xy 平面はリング面と一致するようにとり，z 軸はリングと垂直になるようにとる．Part A 及び B において，必要ならば以下の近似式 (テイラー展開) を用いて良い．

$$(1+x)^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \text{ when } |x| \ll 1.$$

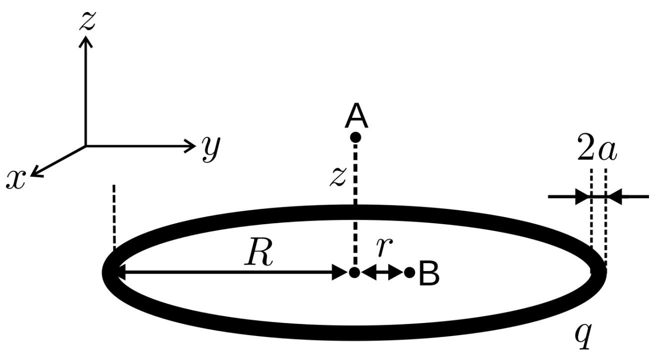

図 1. 半径 R の帯電した導体リング

Part A. リングの軸上の電位 (1 点)

A.1	リングの中心から z 離れた中心軸上の点 (図 1 での点 A) での電位 $\Phi(z)$ を計算せよ．	0.3pt
A.2	$z \ll R$ を仮定して，電位 $\Phi(z)$ を z のベキについて (0 でない) 最低次数まで計算せよ．	0.4pt
A.3	質量 m，電荷 $-e$ の電子が点 A に置かれている (図 1 参照，$z \ll R$)．電子にはたらく力を求めよ．また，力の表式から振動解を持つための q の符号を決定せよ．ただし，動く電子はリング上の電荷に影響を与えないものとする．	0.2pt
A.4	そのような調和振動の角振動数 ω を求めよ．	0.1pt

Part B. リング面上の電位 (1.7 点)

この Part では，$r \ll R$ を満たすリング面 $z=0$ 上の点 (図 1 の点 B) での電位 $\Phi(r)$ を解析する．r のベキについて最低次数まで取ると，電位は $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ で与えられる．

B.1	β の表式を求めよ．必要ならば上で与えたテイラー展開の近似式を用いて良い．	1.5pt

B.2	電子が点 B に置かれている (図 1，$r \ll R$)．電子にはたらく力を求めよ．また，力の表式から振動解を持つためのq の符号を決定せよ．ただし，動く電子はリング上の電荷に影響を与えないものとする．	0.2pt

Part C. 理想的な静電レンズの焦点距離：瞬間的に帯電する場合 (2.3 点)

電子を集めるためのデバイス—静電レンズを構築することを考える．以下のような構成を考えよう．リングは図 2 のように z 軸に垂直に置かれている．我々は必要に応じて非相対論的な速さの電子群を放出できる電子源を持っている．これらの電子の運動エネルギーは $E = mv^2/2$(v は電子の速さ) であり，正確に調整された運動量で電子源を飛び出す．システムは次のようにプログラムされている：ほとんどの時間においてリングは電気的に中性であるが，電子たちがリングが置かれている平面から距離 $d/2$ ($d \ll R$) 以内に (図 2 での影付きの部分，以後“active region(活性領域)”と呼ぶ) あるときに限り，リングは電荷 q で帯電する．Part C では，リングが帯電及び電気的中性に戻るプロセスは一瞬であり，電場が“空間を満たす”のにかかる時間も同様に一瞬であると仮定する．また，磁場の影響を無視し，電子の z 軸成分の速度は一定であると仮定する．さらに，動く電子群がリング上の電荷に影響を与えることはないとする．

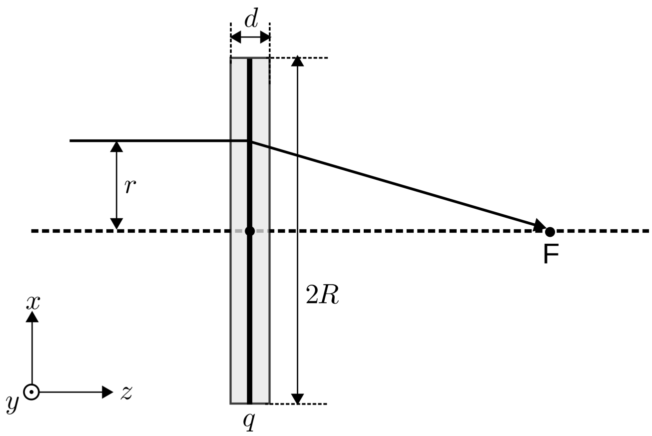

図 2. 静電レンズの模式図

C.1	このレンズの焦点距離f を求めよ．ただし，$f \gg d$ を仮定して良い．問題 B.1 での定数 β や他に定めた諸物理量を用いて答えること．また，“active region(活性領域)”に到達する前の電子群は z 軸に平行で近軸である (z 軸からの最大距離が $r \ll R$ である) と仮定して良い．q の符号はレンズが電子を集めるように適切に選べ．	1.3pt

実際には，電子源はリングの中心から距離 $b > f$ だけ離れた z 軸上に置かれている．“active region(活性領域)”に到達する前の電子群はもはや z 軸に平行ではなく，z 軸に対して角度 $\gamma \ll 1$ rad の範囲で 1 つの点源から放出されているとする．このとき，電子群はリングの中心から距離 c 離れた点に集まる．

C.2	c を求めよ．問題 B.1 での定数β や他に定めた諸物理量を用いて答えること．	0.8pt

C.3 薄い光学レンズについてのレンズの公式, 0.2pt

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{f}$$

は静電レンズに対しても成り立つか？ 明示的に $1/b+1/c$ を計算することで示せ.

Part D. コンデンサとしてのリング (3 点)

これまで考察してきたレンズは理想化されたモデルであり，リングが瞬間的に帯電すると仮定していた．リングが有限の静電容量C を持つコンデンサであるため，これは実際には成り立たない．この Part では，このコンデンサとしての性質を解析する．必要ならば以下の積分公式を用いよ．

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=-\ln\left|\frac{\cos x+1}{\sin x}\right|+\mathrm{const}$$

and

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+\mathrm{const}.$$

D.1 リングの静電容量C を求めよ．ただし，リングは有限の太さ $2a$ を持っているとし，$a \ll R$ に注意せよ． 2.0pt

電子群が“active region(活性領域)”にたどり着いたとき，リングは電圧 V_0 を持つ電源に接続される (図 3)．電子群が“active region(活性領域)”を離れた瞬間，リングは接地される．接触抵抗は R_0 であり，リング自身の抵抗は無視できるとする．

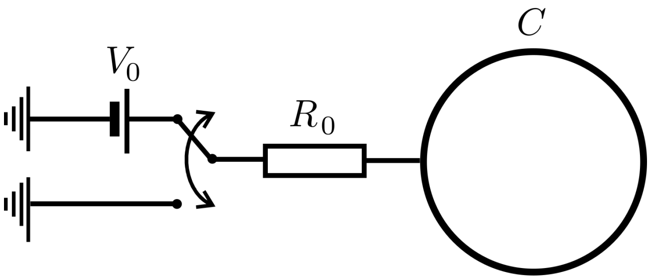

図 3. 静電レンズの帯電

D.2 時間の関数としてのリングの電荷 $q(t)$ を求め，その時間依存性の概略をグラフに示せ．ただし，電子群がリング面上にある瞬間を $t=0$ と定めることにする．また，電荷の絶対値が最大となるときにリングに蓄えられている電荷 q_0 を求めよ．リングの静電容量をC とせよ (つまり D1 で求めた具体的な表式は使わなくて良い)．
注意：図 3 に示した電源の符号はあくまで図示のためのものである．符号は静電レンズが電子を集める働きをするように決定される． 1.0pt

Part E. より実際に近いレンズの焦点距離：帯電が瞬間的でない場合 (2 点)

この Part ではより現実的な静電レンズの効果を考える．ここでは再びリングの太さ $2a$ は無視し，“active region(活性領域)”に到達する前の電子群は z 軸に平行に入射すると仮定する．しかし，リングの帯電や放電はもはや瞬間的には起きない．

E.1	このレンズの焦点距離 f を求めよ．ただし，$f/v \gg R_0C$ ではあるが d/v と R_0C は同じオーダーの大きさであると仮定せよ．Part B での定数β や他に定めた諸物理量を用いて答えること．	1.7pt

E.2	前問でのf の表式は，Part C で得られた結果についてq を q_{eff} で置き換えたものと同じ形であることに気づくであろう．q_{eff} の表式を問題文中の文字を用いて求めよ．	0.3pt