

APhO 2022 実験試験の解答例

Q-2 音響ブラックボックス

A1 :

0.2 点

$$x(t) = vst \cos(\beta) + R \cos(\omega t + \phi) + Xc \quad (1)$$

$$y(t) = vst \sin(\beta) + R \sin(\omega t + \phi) + Yc \quad (2)$$

A.2 :

1.2 点

下図は、データ点間隔 0.02 s で得られたグラフである。

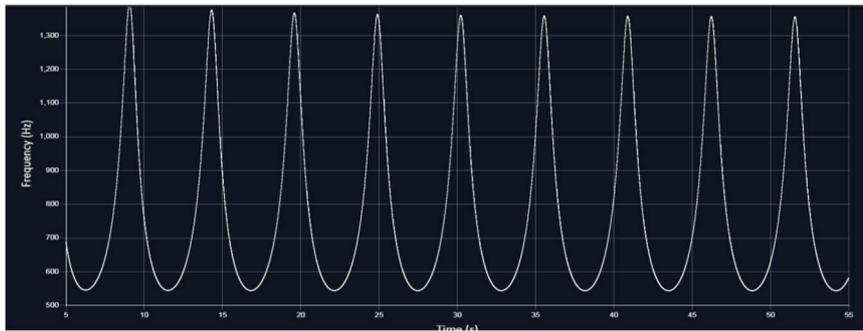


図 1 : 測定結果の表示の一例

表 1

測定番号	$t / s$	$f_{\min}$
1	6.26	545.36
2	11.52	544.4
3	16.82	544.03
4	22.14	543.85
5	27.46	543.75
6	32.8	543.69
7	38.14	543.65
8	43.5	543.62
9	48.84	543.59
10	54.18	543.58

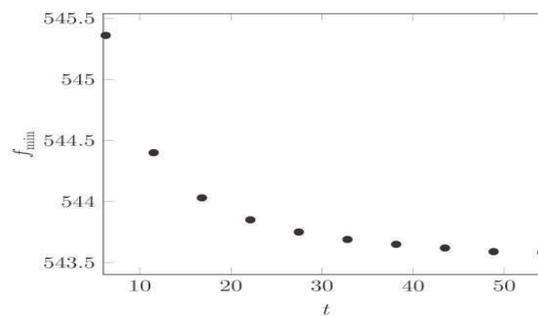


図 2 :  $f_{\min}$  の  $t$  への依存性

**A.3 :**

1.2 点

検出器と音源がそれぞれ速度  $v_D$  と  $v_s$  で移動している一般的なケースを考えてみる。また、線源と検出器を結ぶ線は、問題文の図 1 で定義されているように、 $x$  軸と角  $\alpha$  をなしている。

$\alpha$  は時間の関数であることに注意。音源と検出器を結ぶベクトルを  $\hat{n}$  とする。このとき線源が検出器に接近している場合、検出器で検出される周波数は以下である。

$$f(t) = f_0 \{c - v_D \cdot \hat{n}(t)\} / \{c - v_s \cdot \hat{n}(t)\} \quad (3)$$

$$= f_0 [c - v_D \cos(\gamma - \alpha(t))] / \{c - [(v_s + R\omega) \cdot \hat{n}(t)]\} \quad (4)$$

$$= f_0 [c - v_D \cos(\gamma - \alpha(t))] / \{c - [(v_s \cos(\beta - \alpha(t)) + R\omega \cos(\omega t + \phi + \pi/2 - \alpha))]\} \quad (5)$$

$$= f_0 [c - v_D \cos(\gamma - \alpha)] / \{c - [(v_s \cos(\beta - \alpha(t)) - R\omega \sin(\omega t + \phi - \alpha(t))]\} \quad (6)$$

同様に、検出器から遠ざかっていく音源に対しては、

$$f(t) = f_0 [c - v_D \cos(\gamma - \alpha)] / \{c + [(v_s \cos(\beta - \alpha(t)) - R\omega \sin(\omega t + \phi - \alpha(t))]\} \quad (7)$$

漸近極限 ( $t \rightarrow \infty$ ) における最小周波数の式は、

$$f_{\min} = f_0 c / [c + (v_s + R\omega)] \quad (8)$$

**A.4 :**

1.4 点

音源の初期位置： 検出器を  $x$  軸 ( $x_1, 0^\circ$ ) に、次に  $y$  軸に配置する (例えば  $y_1, 90^\circ$ )。スクリーン上のグラフから、最初の信号が検出器に到達するまでの時間を書き留める。これらの時間をそれぞれ  $\Delta t_{x1}, \Delta t_{y1}$  とする。

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (c\Delta t_{x1})^2 \quad (9)$$

$$x^2 + (y - y_1)^2 = (c\Delta t_{y1})^2 \quad (10)$$

上記の 2 つの方程式を解くと、音源の座標が求まる。シミュレーションの結果、 $x_1 = 500$  m の場合と  $y_1 = 500$  m 場合では、 $\Delta t_{x1} = 1.5344$  s と  $\Delta t_{y1} = 1.2727$  s である。上の連立方程式からは 2 つの解がありうる。検出器を 3 番目の場所に設置し、正しいペアを選択することができる。答えは、

$$x_a = 419.99 \text{ m}, \quad y_a = 499.99 \text{ m}$$

**A.5 :**

2.1 点

音源が遠い距離から検出器に近づき (例えば左側から)、検出器を横切り、その後遠い距離へと (右側に) 離れて行く位置に検出器があるとする。このとき漸近極限 (左端と右端、 $\beta \approx \alpha$ ) では、2 組の周波数が検出器によって測定されることになる。  $v_D = 0$  と設定する。左端では

$$f_{\max} = f_0 c / [c - (v_s + \omega R)] \quad (11)$$

$$f_{\min} = f_0 c / [c - (v_s - \omega R)] \quad (12)$$

右端では

$$f_{\max} = f_0 c / [c + (v_s - \omega R)] \quad (13)$$

$$f_{\min} = f_0 c / [c + (v_s + \omega R)] \quad (14)$$

式 (11) と 式(12) によって

$$(f_{\max} + f_{\min}) / (f_{\max} - f_{\min}) = (c - v_s) / \omega R \quad (15)$$

式(13) と 式(14) によって

$$(f_{\max} + f_{\min}) / (f_{\max} - f_{\min}) = (c + v_s) / \omega R \quad (16)$$

また、 $t = 0$  では、音源と検出器の間に有限の距離がある。これによって、信号の遅延を引き起こす。 $\Delta t$ を2つのピーク ( $f_{\max}$ ) 間の時間間隔とする。この場合に、

$$\Delta t = 2\pi(1 + v_s / c) / \omega \quad (17)$$

式(15-17)を合わせて解くと、 $v_s$ 、 $\omega$ 、 $R$ の値を得ることができる。このように検出器を座標( $x_D$ ,  $y_D$ )に固定し、音源が検出器に遠い距離から接近し、交差した後、遠ざかることを想定する。なお、スクリーン上のグラフの極値がほぼ一定になる領域で漸近的な振る舞いを確認することができる。また、検出器の原点からの距離が、 $\beta \approx \alpha$  満たすような場合、グラフが急激に変化することが予想される。距離を 8000m に固定し、 $\theta$  の値 (検出器位置の  $x$  軸からの角度) をいろいろ変えて試してみる。

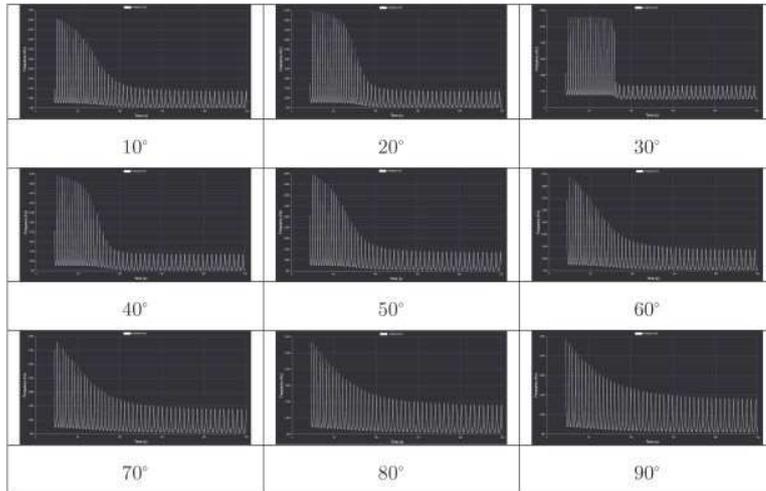


図3： 種々の  $\theta$  (10度—90度) での観測データの写真

$\theta = 30^\circ$  では、グラフの左端と右端が漸近的な挙動を示し、ピーク周波数は顕著な変化を示さない。この領域では、グラフの左側のピーク周波数の値が、グラフの右側のピーク周波数の値よりも高いことに注目してほしい。これは、グラフの右側で音源が検出器から遠ざかっていることを示している。検出器は過渡領域のどこかに配置されている。より正確な値を得るために、データポイントの間隔を小さくして (例えば 0.001)、左端の領域でグラフを拡大すると、 $f_{\max}$  と  $f_{\min}$  の数値がより正確になる。その値は、 $f_{\min} = 788.24$  Hz、 $f_{\max} = 5569.59$  Hz である。これを式(15)に代入すると、

$$(f_{\max} + f_{\min}) / (f_{\max} - f_{\min}) = 1.33 = (c - v_s) / \omega R \quad (18)$$

右端の領域では

$f_{\min} = 543.96$  Hz、 $f_{\max} = 1353.45$  Hz である。これを式(16)に代入すると、

$$(f_{\max} + f_{\min}) / (f_{\max} - f_{\min}) = 2.34 = (c + v_s) / \omega R \quad (19)$$

式(18,19)から、 $v_s = 91.1$  m/s、 $\omega R = 179.66$  m/s が得られる。また、漸近的な場合における任意の2つのピークについて場合

$$\Delta t = 148.84 - 143.48 = 5.36 = 2\pi(1 + v_s / c) / \omega \quad (20)$$

$v_s = 91.1 \text{ m/s}$  の値を用いて、 $\omega = 1.49 \text{ rad s}^{-1}$  とする。 $\omega R = 179.66 \text{ m/s}$  から、 $R = 120.57 \text{ m}$  となる。 $f_0$  を得るには、式(8)の右端に  $f_{min} = 5327.82 \text{ Hz}$  を挿入して  $f_0$  を解けばよい。

(訳者注：5327.82 Hz ではなくて、543.96 Hz が正解、式(8)ではなくて、式(14)が適切である。他にも数個所に、数式番号の誤りがあったが、訂正してある。)

これにより、 $f_0$  は、990.26 Hz となる。

表 2 (解答) :	$f_0$ (Hz)	$\omega$ ( $\text{s}^{-1}$ )	$R$ (m)	$v_s$ (m/s)
	990.26 Hz	$1.49 \text{ s}^{-1}$	120.57 m	91.1 m/s

**A.6 :**

2.0 点

$\beta$  の決定： 下図は模式図であり、S は非常に遠い距離の音源である。P と Q は、二つの異なる瞬間での検出器の位置を表す。

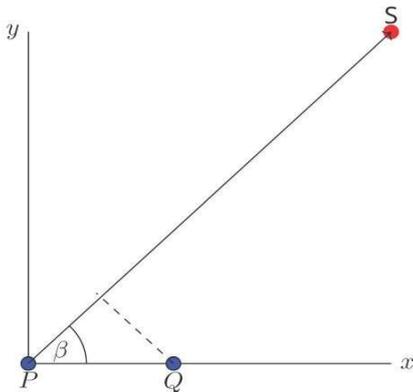


図 4： S と PQ の位置関係の模式図

距離が遠い場合、音信号が P の検出器に到達するまでの時間： $t_0 = 1009.61 \text{ s}$ 、音信号が Q 検出器に到達するまでの時間を  $t_1 = 1007.85 \text{ s}$  とする。

P と Q の間の距離は 660 m で、音信号がそれぞれの検出器に到達するまでの時間はそれぞれ 1009.61 s と 1007.85 s である。時間差の式は次のように与えられる。

$$t_0 - t_1 = (PQ) \cos(\beta) / c \tag{21}$$

$$\cos(\beta) = (t_0 - t_1)c / (PQ) \tag{22}$$

$\beta = 28.36^\circ$  となる。

A.6 (続く)

$\beta$  の決定の別解:

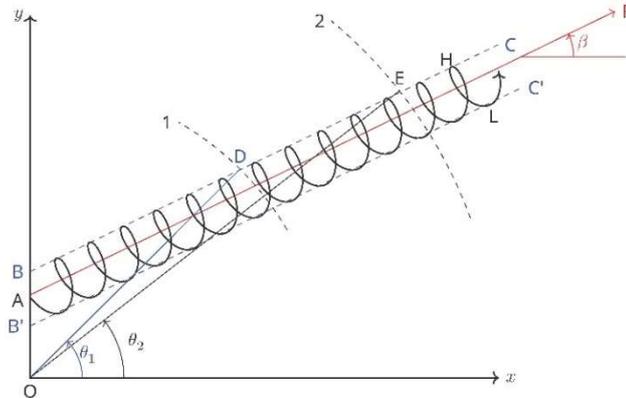


図 5: 音源の進行方向を見出すための計測の模式図

赤線 AF は音源の軌道円の速度  $v_s$  の方向を表す。 $v_s$  が  $x$  軸となす角度  $\beta$  を求める。

検出器によって検出される周波数の値は、2つの側面によって決まる。音信号を発生しながら描くサイクロイド (円弧) と検出器自身の位置に依存する。

信号源の軌道の 1 サイクル中の点 H と点 L は、それぞれ音源の速度が最大と最小になる位置を示している。これは、 $v_s$  が回転の接線速度成分と平行または反平行であるためである。

音源が円弧上を  $n$  回ると、円形の弦 1 上の異なる角度位置の検出器では、その位置に対応する異なる値の  $f_{max}$  を検出する。 $x$ -軸 ( $0^\circ$ ) に近い角度位置から始まり、 $(\theta_1)$  の点 D に至るまで  $f_{max}$  は増加し続ける。実際、AF に平行な線分 BC 上のどの位置でも、すべての  $f_{max}$  のうち最大のものを検出する。同様に、検出器が AF に平行な線分  $B'C'$  上の任意の位置にある場合、検出器は周波数の最小値を検出する。シミュレーションでは、検出器の  $x, y$  座標を変えて、角度を変えることと同様のことができる。その際、速度はゼロのまま保っておく。

検出器の位置を円形の弦 2 に変えて、この想定を繰り返してみる。円弧を横切るように走査してみる。角度  $\theta_2$  は、検出器が最大値  $f_{max}$  を検出することに対応する。

角度位置  $\theta_1$  と  $\theta_2$  が決まれば、点 D と E の座標を使い、セグメント DE の角度を計算することができる。これが角度  $\beta$  である。もし点 D と E の座標をそれぞれ  $(x_1, y_1)$  と  $(x_2, y_2)$  とすると、

$$\beta = \arctan [(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)] \quad (23)$$

このプロセスを下表と次のページのグラフに示す。まず、検出器を原点から 8000m 離れた場所に設置し、対応する角度位置の座標を  $0^\circ - 90^\circ$  に順次変えて行く。任意の一定周期 (この場合は 10 回目) の  $f_{max}$  を記録する。 $f_{max}$  vs  $\theta$  のプロットからわかるように、 $\theta_1$  は  $25^\circ$  から  $35^\circ$  の間であることがわかる。

表 3 :

$\theta$	$f_{\min}$	$f_{\max}$
5	676.08	2670.30
10	722.99	3620.51
20	763.49	4957.28
30	781.46	5478.86
40	753.98	4032.21
50	711.98	3007.44
60	677.39	2486.46
70	651.25	2185.81
80	630.99	1987.99
90	614.68	1845.65

$\theta_1$ をより正確に決定するために、より小さなステップで測定を行う。以下に、 $25^\circ - 35^\circ$  の変動の様相を表とグラフ（前の測定結果もふくむ）に示す。

表 4 :

$\theta$	$f_{\min}$	$f_{\max}$
25	777.95	5538.23
26	779.67	5589.40
26.9	780.80	5609.15
27	780.90	5609.74
27.3	781.18	5609.546
27.5	781.33	5607.78
28	781.62	5597.66
29	781.81	5553.37
30	781.46	5478.86
31	780.58	5377.65
32	779.17	5254.35

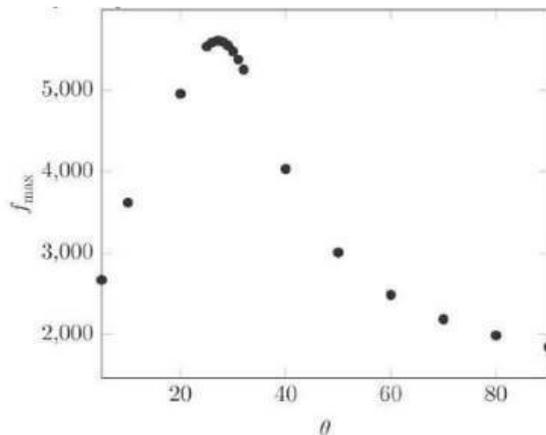


図 5 : 周波数の極大値の  $\theta$  への依存性

表とグラフから、 $\theta_1 = 27^\circ$ であることは明らかである。これを別の距離 16000 m について繰り返す。その表とグラフを以下に示す。

表 5 :

$\theta$	$f_{\min}$	$f_{\max}$
25	781.12	5589.093
26	781.47	5602.27
27	781.70	5609.05
27.4	781.76	5609.95
27.5	781.77	5610.01
28	781.81	5609.34
29	781.80	5603.16
30	781.66	5590.544
31	781.41	5571.60
32	781.04	5546.48

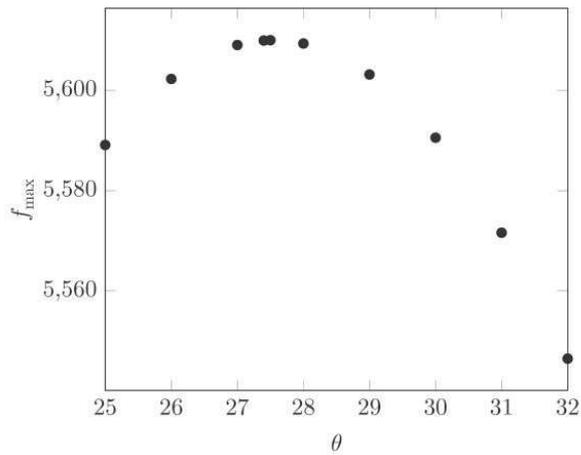


図 6 :  $\theta$  の詳細な変化に対する周波数の極大値の変化

これにより、 $\theta_2 = 27.5^\circ$  が得られる。 $x_1$ 、 $y_1$ 、 $x_2$ 、 $y_2$  の対応する値を取り、式 (23) を使用すると、

$$\beta = \arctan [(7468.77 - 3631.92) / (14192.17 - 7128.052194)] = 28.5^\circ \quad (24)$$

A.7 :

2.1 点

円軌道の中心の座標： このパートでは、検出器を  $y$ -軸上のある固定した位置に置いておく。音源と検出器の初期位置の模式図を下图に示す。

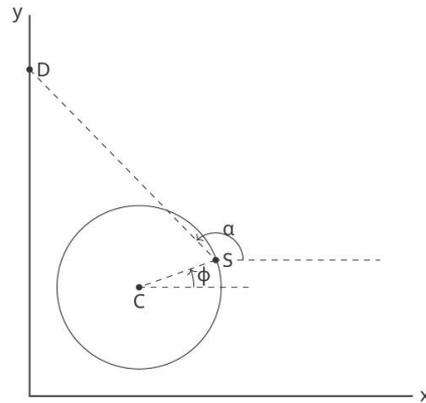


図 7 : 音源の軌道中心と検出器の模式図 (大きさは正確ではない)

音源から送られた最初の信号の検出された周波数を記録する。 $R$ と音源の初期座標は既にながわかってい  
る。 $t=0$ 、検出器を  $y$ -軸上の  $500\text{ m}$  の位置に置いた場合、最初の信号の検出周波数は、 $795.69\text{ Hz}$  とな  
る。音源の座標を  $419.99, 499.99\text{ m}$  とした場合、

$$\tan(180 - \alpha) = 0 / 419.99 \quad (25)$$

$$\alpha = 180^\circ \quad (26)$$

検出周波数と  $\alpha$  の値を式(6)に代入する、

$$795.69 = (990.26 \times 330) / [330 - 91.1 \times \cos(28.5 - 180) + 179.66 \times \sin(\phi - \alpha)] \quad (27)$$

$$\Rightarrow \phi \approx 0^\circ \quad (28)$$

これにより、音源の軌道中心の座標は  $(299.42, 499.99)\text{ m}$  となる。

(訳者注： A.4、A.5、A.6 の正解値 (概ね 4 桁以上が示されている) に関して、設定値、演算過程の  
内容を考慮すると、有効桁数は 3 桁程度が適切である。またどの表でも単位名が記入していないが、周  
波数  $f$  の単位は、 $\text{Hz}$  である。)