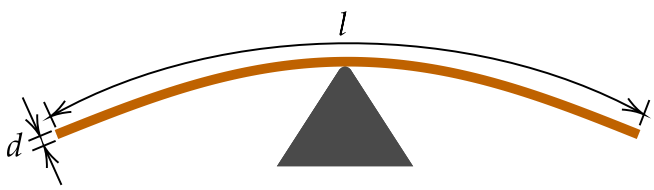
スケーリング則 (8 点)

スケーリング則は、2 つの物理量が有意な区間で互いにスケールアップする関数関係を記述するものである。この関数関係はべき乗則になることもあるが、他の可能性もある。厳密な表現を得ることが困難であっても、スケーリング則を導き出せることがよくある。

Part A. スパゲッティ（2.0 点）

A.1 直径 d の一本のスパゲッティの棒が中点を支えられて水平に置かれている。$d=1$ mm のとき、棒は長さが $l=50$ cm を超えると、自身の重さのために折れてしまう。棒の直径が $d'=1$ cm の場合、自身の重さで折れる直前の最長の長さ l' はいくらか? 2.0pt



Part B. 砂の城 (2.0 点)

B.1 粗粒砂の平均的な粒の体積は細粒砂の 10 倍である。最適な含水量の湿った細粒砂と最適な含水量の湿った粗粒砂（つまり、それらを用いて作る建造物が最大強度を得られる含水量の砂）を使って、全く同じ形と大きさの円柱を 2 つ作る。それぞれの円柱を平行な 2 枚の板で挟み、強度を測定する。粗粒砂の円柱は、板を押す力が$F_c=10$ N に達すると破壊される。細粒砂でできた円柱を破壊するのに必要な力 F_f はいくらか？重力の影響は無視してよい。 2.0pt

Part C. 恒星間旅行 (2.0 点)

C.1 恒星間探検旅行の宇宙船は、一定の大きさの固有加速度 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ で航行する。すなわち、この加速度は宇宙船が瞬間的に静止している慣性座標系における加速度である。乗客はあと 50 年と見積もられる寿命以内に地球に帰還しなければならない。宇宙船の地球からの最大到達距離は d であるが、加速度を $g' = 15\,\mathrm{m/s^2}$ にするとより遠い距離 d' に到達することができる。比 d'/d はいくらか？ 2.0pt

ヒント 1．相対論的速度加算の公式を用いてもよいが、他のアプローチもある。

ヒント 2．次のように定義された双曲線関数を扱う必要があるかもしれない：
$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, $\tanh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

ヒント 3. やり方にもよるが，次の積分公式を用いても良い：$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{atanh} x + C$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{asinh} x + C$, $\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$, ここで、$\operatorname{asinh} x$ と $\operatorname{atanh} x$ は対応する双曲線関数の逆関数である。

Part D. ザット・シンキング・フィーリング（あの沈むような感覚）(2.0 点)

D.1 半径 r_0 の均質な木の球が水に浮いている。摩擦の影響を無視すれば、微小振動の角振動数は ω_0 であるが、粘性摩擦があるため、鉛直方向に変位させたあとの減衰振動の角振動数は実際には $0.99\,\omega_0$ となる。水に浮かぶ木の球が変位したときに微小振動をする最小の半径 r_{min} はいくらか？ 2.0pt

ヒント．流体から物体に働く粘性抵抗は、その物体の流体に対する速度と、流体の粘性率 η に比例する。粘性率の単位は $\mathrm{kg/(m \cdot s)}$ である。