物理チャレンジ2007　第１問　解答と解説

Ⅰ

問１.

[解説]

気体の体積をV，粒子数をNとすれば，気体分子１個に割り当てられた体積は，$\dfrac{N}{V}$である。気体１モルの粒子数は$N = N_A$ =6.02×10²³，標準状態での体積は
$V = 2.24\times10^{-2}\mathrm{m}^3$だから，
$\dfrac{N}{V}$＝$2.24\times10^{-2}/6.02\times10^{23}=3.72\times10^{-26}\,\mathrm{m}^3$.

[解答]

$3.72\times10^{-26}\,\mathrm{m}^3$.

問２.

[解説]

半径rの剛体球の体積は，$4\pi r^3/3$であるから，　$r=1.0\times10^{-10}$m とすると，
$4\pi r^3/3=4.19\times10^{-30}\mathrm{m}^3$，これで問 1 の答えを割れば　$\dfrac{3.72\times10^{-26}}{4.19\times10^{-30}}=8.88\times10^3$ となり，分子１個に割り当てられた体積は、分子の実際の大きさの約１万倍にある。この比が１より十分大きいことが，気体が近似的に理想気体として扱えるための必要条件である。

[解答]

8.88×10^3.

Ⅱ

問 3.

[解説]

速さvの分子が固定された壁に当って弾性衝突をしてはねかえされると, 分子の運動量は，mvから$-mv$に変るので, $2mv$だけ変化する。これが分子が壁との衝突に際して壁に加える力積である。したがって、i番目の分子が１回の衝突で壁に加える力積は$2mv_i$、この分子が壁の間を往復する時間は $\dfrac{2L}{v_i}$だから、単位時間に$\dfrac{v_i}{2L}$回同じ壁と衝突する。単位時間あたりに壁に加える力積が壁に及ぼす力の平均値だから，この分子が壁におよぼす平均の力は、

$$f_i = 2mv_i \times \frac{v_i}{2L} = \frac{mv_i^2}{L}$$

である。

これをすべての分子について加え合わせた力Fは,

$$F = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_i^2}{L}$$

となる。

[解答]

$$f_i = 2mv_i \times \frac{v_i}{2L} = \frac{mv_i^2}{L},$$

$$F = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_i^2}{L}.$$

問 4.

気体の圧力は，$p = \frac{F}{S}$ で，$V = LS$ であるから、

$$p = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N}\frac{mv_i^2}{L} = \sum_{i=1}^{N}\frac{mv_i^2}{V},$$

いま,$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 = \langle v^2 \rangle$ は、分子の速さの二乗をすべての粒子について足し合せ，粒子数で割ったものだから，分子の速さの二乗平均であり，これは分子 1 個当りの量だから粒子数にはよらない。よって，

$$p = \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle \qquad ①$$

であり、$p \propto \frac{N}{V}$ となる。

問 5.

気体分子 1 個あたりの平均運動エネルギーは $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{mv_i^2}{2} = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2}$ であるから、問 4 の①式より，

$$p = 2\frac{N}{V}\frac{m\langle v^2 \rangle}{2} \propto \frac{NT}{V},$$

となり、$\frac{pV}{T}$ =一定　が成り立つ。

Ⅲ

問 6.

[解説]

気体分子 1 個あたりの平均運動エネルギーは,　この場合は 3 次元なので,

$$e = \frac{m\left(\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle\right)}{2}$$

と書かれるが，題意により，$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ だから

$$e = \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle$$

となる。ここで x 方向だけの運動の結果を使うと，①式で$< v^2 >= 3 < v_x^2 >$として、

$$e = \frac{3}{2N}\sum_{i=1}^{N} m v_i^2 = \frac{3pV}{2N},$$

となる。ここで、1mol の気体を考え，理想気体の状態方程式 $pV = RT$ を用いると、

$$e = \frac{3pV}{2N} = \frac{3RT}{2N_A} = \frac{3k_BT}{2}$$

となる。

[解答]

$e = \dfrac{3k_BT}{2}$.

問７.

[解説]

断面の半径が $2r$ で、長さ l の円筒の体積は，$\pi(2r)^2 l$ である。この中に、平均として１個の分子があるのだから，

$$N\pi(2r)^2 l = V \quad , \quad \text{したがって、} l = \frac{V}{N}\frac{1}{4\pi r^2}.$$

[解答]

$l = \dfrac{V}{N}\dfrac{1}{4\pi r^2}$.

問８.

[解説]

理想気体の状態方程式 $pV = \dfrac{N}{N_A}RT$ より

$$pV = Nk_BT, \text{したがって，} \frac{N}{V} = \frac{p}{k_BT}.$$

これより、

$$l = \frac{V}{N}\frac{1}{4\pi r^2} = \frac{k_BT}{p}\frac{1}{4\pi r^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。これに数値を入れて計算すると，

$$l = 3.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}.$$

[解答]

$l = 3.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

問９.

[解説]

$e(\pm l)=e(0)\pm l\left.\dfrac{\Delta e(x)}{\Delta x}\right|_{x=0}$ (複合同順)を,　$Q_{\pm}\ =\ fe(\mu\, l)$(複合同順)に代入して

$$Q_{+}\ =\ fe(-l)=\alpha\frac{N}{V}v\left[e(0)-l\left.\frac{\Delta e(x)}{\Delta x}\right|_{x=0}\right]$$

$$Q_{-}\ =\ fe(+l)=\alpha\frac{N}{V}v\left[e(0)+l\left.\frac{\Delta e(x)}{\Delta x}\right|_{x=0}\right]$$

したがって

$$Q=Q_{+}-Q_{-}=-2\alpha\frac{N}{V}vl\left.\frac{\Delta e(x)}{\Delta x}\right|_{x=0}.$$

ここで、問６の結果 $e=\dfrac{3k_BT}{2}$ を使うと、

$$\left.\frac{\Delta e(x)}{\Delta x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\Delta e}{\Delta T}\right|_{x=0}\left.\frac{\Delta T}{\Delta x}\right|_{x=0}=\frac{3}{2}k_B\left.\frac{\Delta T}{\Delta x}\right|_{x=0}$$

となり、$Q=3\alpha k_B\dfrac{N}{V}vl\left.\dfrac{\Delta T}{\Delta x}\right|_{x=0}$ となるから，$Q=k\dfrac{\Delta T}{\Delta x}$ に代入して，

$$k=3\alpha k_B\frac{N}{V}lv \qquad ③$$

となる。さらに，$\dfrac{N}{V}l=\dfrac{1}{4\pi r^2}$，および $\dfrac{mv^2}{2}=e=\dfrac{3}{2}k_BT,$　すなわち $v=\sqrt{\dfrac{3k_BT}{m}}$ を用いると，

$$k=\frac{3\alpha k_B}{4\pi r^2}\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$$

と書かれる。これに，T =273K，$m=\dfrac{4.0\times10^{-3}}{6.02\times10^{23}}=6.7\times10^{-27}\,\mathrm{k\,G}$，$\alpha$=1を代入して計算すると，

$$k=0.44\mathrm{W/m\cdot K}.$$

[解答]

表式：$k=\dfrac{3\alpha k_B}{4\pi r^2}\sqrt{\dfrac{3k_BT}{m}}$

数値：$k=0.44\mathrm{W/m\cdot K}$

問１0.

[解説]

問９の結果より、熱伝導率は温度Tのみにより、一定温度のもとでは、圧力によらない。これは,

平均自由行程を使った表式③において，$\frac{N}{V}l$ が、密度 $\frac{N}{V}$，したがって圧力によらないからである。一方、問８の結果より、平均自由行程は、一定温度のもとでも圧力が減ると圧力に反比例して長くなる。

［ヒント］ より，平均自由行程が２重壁間の間隔 $d = 1.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ より大きくなると、l が d に固定され，$\frac{N}{V}l$ に比例する熱伝導率は、密度 $\frac{N}{V}$（したがって圧力 p）に比例して減少する。

問８の②式より，１ 気圧 $p_0 = 1.0\times10^{5}\,\mathrm{Pa}$ のとき $l = 3.0\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ より、一定温度のもとで $l = d = 1.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ となる圧力は,

$$p = \frac{l}{d}p_0 = 3.0\mathrm{Pa}$$

と求められる。これより，圧力を.3.0Pa 以下に下げれば、l は壁間の間隔に固定されることが分る。したがって、圧力をこれよりさらに $\frac{1}{100}$ 倍程度に小さくすれば、熱伝導率も $\frac{1}{100}$ 倍程度に減らすことができる。

以上の考察より,熱流量を $\frac{1}{100}$ 程度に減らすには、気体の圧力を

$$3.3\times10^{-3}\,\mathrm{Pa}$$

程度に減少させる必要がある。

[解答]

$3.3\times10^{-3}\,\mathrm{Pa}$.

Ⅳ

[解説]

以下の問題では，分子間の相互作用が重要な役割を果す実在気体を対象にしているので，<u>理想気体の状態方程式やボイル・シャルルの法則は使えない</u>。

実在気体に関する以下の問題を考えるに当っては，次の点に注意する必要がある。

① 内部エネルギーは温度のみならず体積にも依存する。

② したがって，気体が外部に仕事をした場合，内部エネルギーは減少するが，温度まで減少するとは限らない。

③ しかし，理想気体と同じように，気体の圧力は，一定体積のもとでは温度の増加と共に増大し，また一定温度のもとでは体積の増加と共に減少する。

問１１.

一定体積のもとで温度が上昇すると，気体の圧力も上昇する。したがって、断熱膨張で温度が上がると、等温変化のときよりも圧力は高く

$$p_A(V) > p_B(V)$$

となり，また，断熱圧縮では，その逆になる。

問１２．

このサイクルでは，断熱膨張のときに外部に仕事をし，等温圧縮のときに外部から仕事をされている。断熱膨張のときの方が，等温圧縮のときよりも、同じ体積では，圧力が大きいので，全体として，外部に正の仕事をしたことになる．

問１３．

気体の圧力を縦軸に、体積を横軸にとって，一定温度のもとでの $p-V$ 曲線を描くと，p は体積 V の増加と共に単調に減少し、また，同じ体積のもとでは温度 T の高い方が圧力は大きいから，一定圧力のもとでは，温度の増加と共に体積は増大する。つまり、一定圧力のもとで温度を 1℃上昇させると，気体の体積は増大する(その増分を ΔV とする)。したがって，一定圧力のもとで温度を上昇させる過程は，体積を一定に保ったまま熱を供給して温度を上昇させる過程と，断熱膨張により体積を ΔV 増加させる過程の二つの過程に分解するこができる。まず，体積を一定に保ったまま熱を供給して温度を 1℃上昇させるには，Q_V の熱量の供給が必要である。その上で断熱膨張により体積を ΔV 増加させると，題意により温度は上昇しない。この過程で温度が下がるとすると，その分さらに体積を同じに保って温度を上昇させる必要がある。熱力学第 2 法則により $Q_V > 0$ だから、それには余分の熱量を供給しなければならない。したがって、

$$Q_P \geq Q_V$$

となる。

別解

もし $Q_V > Q_P$ とする。まず体積を V に保って Q_P の熱を与える。このときのの温度上昇は 1℃より小さい。この操作で圧力が上昇するから，断熱膨張によって体積を増大させることで，もとの圧力にもどすことができる。この結果、最終的な温度上昇が 1℃になるはずであるが、これは断熱膨張により温度が上昇したことになり，熱力学の第 2 法則に反する。

したがって $Q_P \geq Q_V$ でなければならない。

物理チャレンジ2007　第2問　解答と解説

この問題は電子の状態を表すのに，量子力学が重要であることを理解することを目的としている。その際に，量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式を解くことをしないで、量子力学の基本的考え方である物質の波動性について考える。電子の波動が空間の一意的な関数であるためには、電子の周期的軌道の長さが波長の整数倍であることがが必要である。これによって、状態が量子化される。さらに、波長が変動する場合に量子化条件を拡張する。これは、座標と運動量からなる平面において、プランク定数に相当する面積の領域が一つの量子状態に相当する。それ以上の細かい運動には踏み込めない、というのが「不確定性の原理」である。最後に，金属クラスターにおける自由電子の状態を考える際に，金属クラスターを球形の空間と考え，その中での周期軌道を電子の量子状態に対応させて、いくつかの量子状態の重ね合わせの状態が示す物理現象を議論する。

問 1. 半径 r の円周は $2\pi r$ であり、これが波長 λ の整数倍であるという条件から $2\pi r = n\lambda$ である。よって $\lambda_n = \dfrac{2\pi r}{n}$ となる。

問 2. 原子核の回りの電子の運動を円運動と考え，その遠心力とクーロン力の釣り合いによって定常的な円運動が決まっているとすると，$m\dfrac{v^2}{r} = k_0\dfrac{e^2}{r^2}$ が導かれる。よって、$rmv^2 = k_0e^2$ が得られる。ここで、運動量の量子化条件 $mv = \dfrac{h}{\lambda}$ を用いると

$$v_n = \frac{h}{m\lambda_n} = \frac{h}{m}\frac{n}{2\pi r} = \frac{h}{2\pi}\frac{n}{mr}$$

となる。これより、 $rm\left(\dfrac{h}{2\pi}\dfrac{n}{mr}\right)^2 = k_0e^2$ が得られる。これより、r も量子化されて

$$r_n = \frac{n^2}{mk_0e^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2$$

となる。

問 3. 全エネルギーの式 $E = \dfrac{mv^2}{2} - k_0\dfrac{e^2}{r}$ に**問 2** で得られた $m\dfrac{v^2}{r} = k_0\dfrac{e^2}{r^2}$ を代入すると、$E = -\dfrac{k_0}{2}\dfrac{e^2}{r}$ が得られる。よって、軌道半径が $r_n = \dfrac{n^2}{mk_0e^2}\left(\dfrac{h}{2\pi}\right)^2$ のときには、エネルギーも量子化されて、

$$E_n = -\frac{k_0e^2}{2}\frac{mk_0e^2}{n^2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = -\frac{m\left(k_0e^2\right)^2}{2}\frac{1}{n^2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$$

が得られる。

問 4. 往復する距離は $2L$ であるから，題意より $2L = n\lambda$ である。一方，運動量は $mv_n = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{nh}{2L}$ となる。よって速度は $v_n = \dfrac{nh}{2mL}$ となる。

問 5. 前問の速度に対応する運動エネルギーは $E_n = \dfrac{mv_n^2}{2} = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{nh}{2mL}\right)^2 = \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{nh}{2L}\right)^2$ と

なる。

問 6.　エネルギー E_N を L の関数と見なして微分をする。

$$F_n = -\frac{dE_n}{dL} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2}\right)^2\left(-2L^{-3}\right) = \frac{1}{mL}\left(\frac{nh}{2L}\right)^2$$

一方 $\dfrac{nh}{2L} = mv_n$ であるから、$F_nL = mv_n^2$ が得られる。

問 7.　相平面で $(0, mv) \to (L, mv) \to (L, -mv) \to (0, -mv) \to (0, mv)$ の順に直線となる長方形の軌道である。

問 8.　面積は $L \times 2mv = 2mvL$ である。

問 9.　この面積がプランク定数の整数倍である、という条件から $2mvL = nh$ である。これは**問** 4 で求めた波長の条件と一致する。

問 10.　エネルギーの式 $E = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2}$ より、x_{max} は $v = 0$ のときに実現する。よって、$E = \dfrac{kx_{max}^2}{2}$ より、$x_{max} = \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$ となる。

問 11.　$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくと、$t = 0$ で $x(t)$ が最大値 $x_{max} = \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$ をとるためには

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\cos(\omega t)$$

となる。速度はこの時間微分で与えられ、

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{2E}{k}}\omega\sin(\omega t)$$

となる。運動量で表せば,

$$mv(t) = m\dot{x}(t) = -m\sqrt{\frac{2E}{k}}\omega\sin(\omega t) = -m\sqrt{\frac{2E}{k}}\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\omega t) = -\sqrt{2mE}\sin(\omega t)$$

問 12. 原点を中心として、運動量軸の径が $\sqrt{2mE}$、位置座標軸の径が $\sqrt{\dfrac{2E}{k}}$ の長円となる。

問 13.　短径 a および長径 b の長円の面積は πab で与えられるから、長円で囲まれる相平面の面積 S は

$$S = \pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{k}} = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi E}{\omega}$$

である。これがプランク定数の整数倍となる、という条件から $\dfrac{2\pi E_n}{\omega} = nh$ すなわち、

$$E_n = nh\omega 2\pi \equiv n\hbar\omega$$

となる。ここで、$\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$ である。これは調和振動子に対する厳密な量子力学の結果

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

に対応する。

問 14.　三つの方向に振動は独立であり、x 方向の振動のエネルギーは $\dfrac{1}{2m}p_x^2 + \dfrac{k}{2}x^2$、$y$ 方向の振動のエネルギーは $\dfrac{1}{2m}p_y^2 + \dfrac{k}{2}y^2$、$z$ 方向のエネルギーは $\dfrac{1}{2m}p_z^2 + \dfrac{k}{2}z^2$ となる。全体はそれらの和であるから

$$E = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

となる。

問 15.　n_x をゼロあるいは正の整数とすると、x 方向の振動のエネルギーは $\dfrac{n_x h\omega}{2\pi}$、同様にして y 方向、z 方向のの振動のエネルギーはそれぞれ $\dfrac{n_y h\omega}{2\pi}$、$\dfrac{n_z h\omega}{2\pi}$ となる。よって全体では

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{h\omega}{2\pi}(n_x + n_y + n_z)$$

となる。

問 16.　$\ell_3 = 3\sqrt{3}R \simeq 5.2R$ 、$\ell_4 = 4\sqrt{2}R \simeq 5.6R$

問 17.　内接する正三角形に発生する定在波の波長 λ_{3n} は $\ell_3 = n\lambda_{3n}$ で与えられ、対応する速さは

$$u_n = \frac{h}{m\lambda_{3n}} = \frac{nh}{3\sqrt{3}mR}$$

となる。その観測頻度は周期 $\dfrac{h}{3\sqrt{3}mR}$ の波として現れる。同様にして、同様にして内接する正方形に対応する速さは

$$w_n = \frac{nh}{4\sqrt{2}mR}$$

であり、その観測頻度は周期 $\dfrac{h}{4\sqrt{2}mR}$ の波として現れる。量子力学的には，これらの波動の状態は干渉し、速さの観測頻度は、これらの波動を重ね合わせた「うなり」として観測される。

物理チャレンジ2007　第3問　解答と解説

[I]

問1

[解説]

右向きを正とすると，衝突前のA，Bの速度はそれぞれ，v，$-V$　であるから，衝突後のA，Bの速度をそれぞれ，v'，V'とすれば，弾性衝突だからはねかえり係数の関係式より，

$$1=-\frac{v'-V'}{v-(-V)}$$

である。また運動量保存の法則は

$$mv+M(-V)=mv'+MV'$$

と書ける。以上2式よりv'を求める。

$$v'=-\frac{M-m}{M+m}v+\frac{2M}{M+m}(-V)$$

ここで右辺の分母分子をMで割り，$\frac{m}{M}\to 0$とすることにより解を得る。

$$v'=-\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}v+\frac{2}{1+\frac{m}{M}}(-V)\quad\to\quad v'=-v-2V,\quad |v'|=v+2V$$

[解答]

$v'=-v-2V$，$|v'|=v+2V$

（別解）

[解説]

$M>>m$であるので，衝突後のBの速度はまったく変化しないと考えてよい。すると，はねかえり係数の関係式は以下の通り。

$$1=-\frac{v'-(-V)}{v-(-V)}\quad\to\quad v'=-v-2V,\quad |v'|=v+2V$$

[解答]

$v'=-v-2V$，$|v'|=v+2V$

問2

[解答]

(1) $\Delta p=\Delta p'$　　(2) 0　　(3) $\Delta K=(-V)\Delta p$

[解説]

(1)A の B に対する相対速度は次の通り。

衝突前：$v-(-V)$

衝突後：$v'-(-V)$

ただし $M>>m$ であるので，衝突後の B の速さは衝突前と変わらずに V であることを用いた。したがって，

$$\Delta p' = m(v'-(-V)) - m(v-(-V)) = mv' - mv = \Delta p$$

となり，$\Delta p = \Delta p'$ が成り立つ。

(2) $\Delta K'$ は A の B に対する相対速度による運動エネルギーの，衝突前後の変化である。

$$\Delta K' = \frac{1}{2}m(v'-(-V))^2 - \frac{1}{2}m(v-(-V))^2$$

一方，$M>>m$ であり，弾性衝突なので，

$$1 = -\frac{v'-(-V)}{v-(-V)} \quad \rightarrow \quad v'-(-V) = -(v-(-V))$$

したがって，$\Delta K' = 0$ である。

(3) $\Delta K' = \frac{1}{2}m(v'-(-V))^2 - \frac{1}{2}m(v-(-V))^2$ を展開する。

$$\Delta K' = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 - mv'(-V) + mv(-V) = \Delta K - (-V)\Delta p$$

よって，

$$\Delta K = \Delta K' + (-V)\Delta p$$

$\Delta K' = 0$ であるから，$\Delta K = (-V)\Delta p$

問３

[解説]

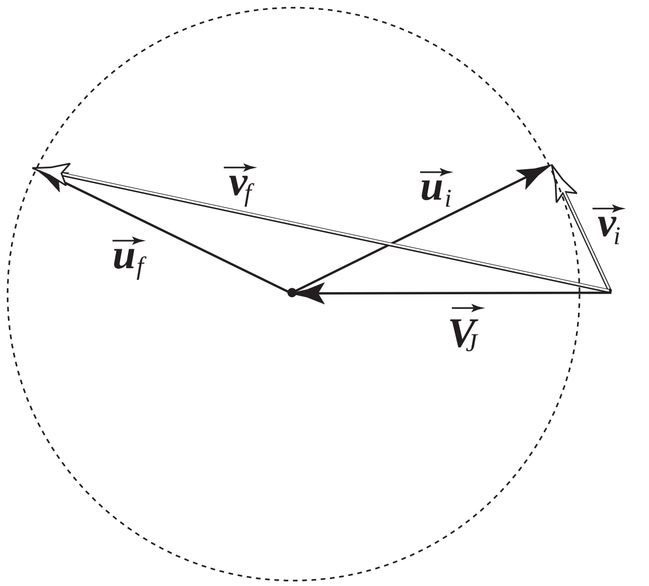
木星の質量は探査機の質量と比べて圧倒的に大きいので，探査機接近前と遠ざかった後とで木星の速度 $\vec{V}_J$ は変わらないとしてよい。探査機の質量を m とすれば，木星に固定した座標系に対するエネルギー保存の法則により，

$$\frac{1}{2}m\left|\vec{u}_i\right|^2 = \frac{1}{2}m\left|\vec{u}_f\right|^2$$

が成り立つ。ただし，$\vec{u}_i$，$\vec{u}_f$ は木星から十分遠方にあるときの速度ベクトルなので，探査機の木星からの万有引力による位置エネルギーは０であるとした。

したがって，$\left|\vec{u}_i\right| = \left|\vec{u}_f\right|$ の関係が成り立つことに注意して作図すると，図のようになる。

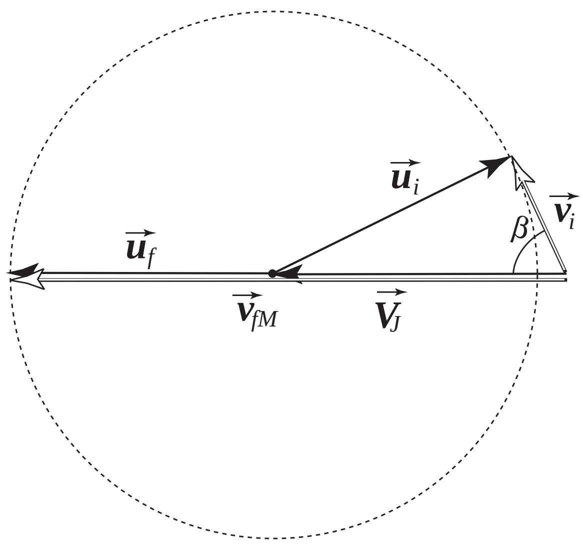
[解答]



問４

[解説]

探査機が最大のv_fを得るには，図のように散乱されればよい。



その最大値をv_{fM}とすれば，

$$v_{fM} = u_f + V_J$$

である。$u_f = u_i$であり，

$$u_i^2 = v_i^2 + V_J^2 - 2v_iV_J\cos\beta$$

であるので，

$$v_{fM} = \sqrt{v_i^2 + V_J^2 - 2v_iV_J\cos\beta} + V_J$$

となる。

$\vec{v}_{fM}$の向きは$\vec{V}_J$の向きに等しい。

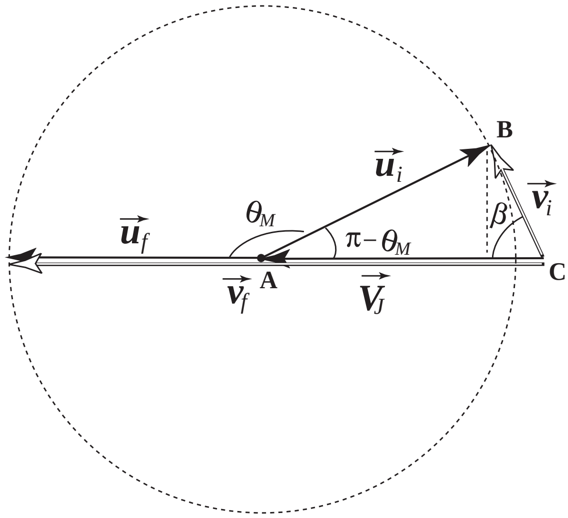
[解答]

$\sqrt{v_i^2 + V_J^2 - 2v_iV_J\cos\beta} + V_J$　，$\vec{V}_J$の向き

問５
[解説]

探査機が最大のv_fを得る散乱角θ_Mは図中の角度である。

三角形 ABC において，



$$V_J = u_i \cos(\pi - \theta_M) + v_i \cos\beta$$

である。

$$\cos(\pi - \theta_M) = -\cos\theta_M$$

であるから，

$$\cos\theta_M = \frac{v_i \cos\beta - V_J}{u_i}$$

を得る。実際には、この散乱角を得るために木星にどこまで接近する必要があるかが決まる。この接近距離が接近禁止範囲(当面は木星の半径と考えていい)に入らないことが必要。
[解答]

$$\cos\theta_M = \frac{v_i \cos\beta - V_J}{u_i}$$

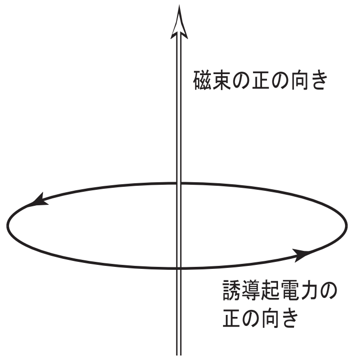
［Ⅱ］

問６
［解説］
①X 線は 0.001～１nm の電磁波である。X 線検査でおなじみだろう。1nm は 10^{-9}mである。②可視光線　ヒトの眼は波長 380～770nmの電磁波を知覚することができる。このとき，電磁波の磁場ではなく電場を知覚している。③ガンマ線はおもに放射性物質から出る電磁波で，波長が 0.01nm 未満である。材料の非破壊検査や医療に用いられる。④紫外線の波長は 0.1～380nm。　⑤赤外線の波長は 770nm～100μm。1μm は 10^{-6} mである。⑥マイクロ波はさらに波長によりサブミリ波，ミリ波，センチ波，極超短波に分類できる。マイクロ波の波長は 1mm～10cm の範囲にある。携帯電話，電子レンジにも使われている。
［解答］
③　①　④　②　⑤　⑥

問 7

［解説］

(1)電磁誘導の法則によれば, コイル１巻きあたりに生じる誘導起電力の大きさは，コイル面を垂直に貫く磁束の単位時間あたりの変化量である。磁束 $\varPhi$ が時間 $\varDelta t$ のあいだに $\varDelta\varPhi$ だけ変化したとすれば, 単位時間あたりの変化量は $\dfrac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t}$ である。一方，磁束の正の向きと, コイルに生じる誘導起電力の正の向きを, 右図のように定義すれば, $\varPhi$ が正の向きに $\varDelta\varPhi$ だけ増加すると, 図とは逆向きに誘導起電力が生じるので,



$$V = -\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

となる。

(2)磁束 $\varPhi$ は磁束密度 B と，磁束に対して垂直なコイル面の面積 S により

$$\varPhi = BS \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

と表される。ただし，面積 S 内では B は一様であるとしている。 $S = h\varDelta x$ であるから,

$$\varPhi = Bh\varDelta x$$

となる。

(3)磁束密度が B から $B + \varDelta B$ に, またコイルの面積が S から $S + \varDelta S$ に変化したとき, 磁束が $\varPhi + \varDelta\varPhi$ になったとすれば,

$$\varPhi + \varDelta\varPhi = (B + \varDelta B)(S + \varDelta S) \quad \cdots\cdots \text{③}$$

である。式③－式②より,

$$\varDelta\varPhi = S\varDelta B + B\varDelta S \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

となる。ただし，２次の微小量 $\varDelta S\varDelta B$ を無視した。また題意より，長方形 abcd 1 巻きの長方形コイルの面積は時間変化しないので $\varDelta S = 0$ である。したがって式④は,

$$\varDelta\varPhi = S\varDelta B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

となる。式⑤を式①に代入すれば,

$$V = -\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t} = -S\frac{\varDelta B}{\varDelta t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

である。また $S = h\varDelta x$ なので,

$$\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t} = h\varDelta x\frac{\varDelta B}{\varDelta t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑦}$$

が得られる。

(4) 1 巻きの長方形コイル abcd に沿って単位電荷を 1 周させたときに，電場のする仕事の合計が, 生じた誘導起電力 V に等しい。$c \to d$ の仕事を $W_{c\to d}$，$d \to a$ の仕事を $W_{d\to a}$，$a \to b$ の仕事を $W_{a\to b}$，$b \to c$ の仕事を $W_{b\to c}$ とすれば,

$$W_{c\to d} = (E + \varDelta E)h$$

$$W_{d\to a} = 0$$

$W_{a\to b}=-Eh$

$W_{b\to c}=0$

である。電場は y 成分しかないので$W_{d\to a}$，$W_{b\to c}$は 0 になる。また，$a\to b$の仕事$W_{a\to b}$は，電場と逆向きなので負号がつくことに注意。すると，

$$V=W_{c\to d}+W_{d\to a}+W_{a\to b}+W_{b\to c} \quad \cdots\cdots \text{⑧}$$
$$=(E+\varDelta E)h-Eh=h\varDelta E$$

を得る。(磁束密度の正の向きを z 軸としているので，長方形コイル abcd に沿って 1 周する正の向きを(1)の図に従って反時計回りとしている。)

一方，式⑥，⑦，⑧より，

$$h\varDelta E=-\frac{\varDelta \Phi}{\varDelta t}=-S\frac{\varDelta B}{\varDelta t}=-h\varDelta x\frac{\varDelta B}{\varDelta t} \qquad \text{⑨}$$

である。よって，

$$\frac{\varDelta E}{\varDelta x}=-\frac{\varDelta B}{\varDelta t}$$

の関係式を導くことができる。

[解答]

(1) $V=-\dfrac{\varDelta \Phi}{\varDelta t}$　　(2) $Bh\varDelta x$　　(3) $h\varDelta x\dfrac{\varDelta B}{\varDelta t}$　　(4) $h\varDelta E$

問８

[解説]

(5)コンデンサー極板の単位面積あたりの電荷は$\dfrac{Q}{S}$であるので，極板間に生じる電場Eは

$$E=\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑩}$$

となる。

(6)極板電荷が$Q+\Delta Q$になったときの極板間の電場を$E+\varDelta E$とすれば，

$$E+\varDelta E=\frac{Q+\varDelta Q}{\varepsilon_0 S} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑪}$$

であるから，式⑪－式⑩より，

$$\varDelta E=\frac{\varDelta Q}{\varepsilon_0 S} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑫}$$

となる。

(7)電流は単位時間あたりに導線の断面を通過する電荷量で定義されている。時間$\varDelta t$のあいだに$\varDelta Q$の電荷が通過すれば，

$$i=\frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑬}$$

である。

(8)式⑫，⑬より，

$$\Delta E = \frac{i\Delta t}{\varepsilon_0 S}$$

を得る。電流 i について解けば

$$i = \frac{\varepsilon_0 S\Delta E}{\Delta t} \cdots\cdots ⑭$$

となる。

[解答]

(5) $\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$　(6) $\dfrac{\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$　(7) $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$　(8) $\varepsilon_0 S\dfrac{\Delta E}{\Delta t}$

問 9

[解説]

長方形 abcd にアンペール・マクスウェルの法則を適用する。問題文式⑧より

$$\sum B\Delta s = \mu_0\varepsilon_0 S\frac{\Delta E}{\Delta t} \cdots\cdots ⑮$$

である。S は abcd の面積なので

$$S = h\Delta x \cdots\cdots ⑯$$

一方，abcd において式⑮の左辺は

$$\sum B\Delta s = Bh - (B + \Delta B)h = -h\Delta B \cdots\cdots ⑰$$

となる。式⑯⑰を式⑮に代入し，

$$-h\Delta B = \mu_0\varepsilon_0 h\Delta x\frac{\Delta E}{\Delta t}$$

の関係式を得る。よって，

$$\frac{\Delta B}{\Delta x} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta E}{\Delta t}$$

[解答]上の解説を参照

問１０

[解説]

位置 x での電場を E とすると，位置 $x+\Delta x$ の電場が $E+\Delta E$ であるから，問題文式⑨より，

$$E+\Delta E = E_0 \sin 2\pi\left(\frac{x+\Delta x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

よって，

$$\Delta E = E_0 \sin 2\pi\left(\frac{x+\Delta x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) - E_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

である。一方，

$$\sin 2\pi\left(\frac{x+\Delta x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) = \sin 2\pi\left(\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+\frac{\Delta x}{\lambda}\right) = \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\cos\frac{\Delta x}{\lambda} + \sin 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

であるが，$\Delta x << \lambda$ であるから，$\cos\dfrac{\Delta x}{\lambda}=1$ としてよい。したがって，

$$\Delta E = E_0 \sin 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

となる。これより，

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E_0 \sin 2\pi\dfrac{\Delta x}{\lambda}\cos 2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\lambda}E_0 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

を得る。ただし，

$$\sin 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}$$

の関係を使った。同様にして $\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$ を求めると，

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{2\pi}{T}B_0 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

となる。これらを式

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = -\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

に代入して，

$$\frac{2\pi}{\lambda}E_0 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) = \frac{2\pi}{T}B_0 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

よって，

$$E_0 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) = \frac{\lambda}{T}B_0 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

を得る。E と B は同位相で振動するので，

$$E=\frac{\lambda}{T}B=cB$$

となる。

[補足]　微分の公式を用いれば，上の導出はより簡単にできる。まず，問題文の関係式は

$$\frac{\partial E}{\partial x}=-\frac{\partial B}{\partial t}$$

と書き直すことができる。

$$E=E_0\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

$$B=-B_0\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

であるから，

$$\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{2\pi}{\lambda}E_0\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{2\pi}{T}B_0\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

となる。これらを上式に代入すれば，

$$\frac{2\pi}{\lambda}E_0\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)=\frac{2\pi}{T}B_0\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$$

を得るので，$E=\frac{\lambda}{T}B=cB$ となる。

　さて一方

$$\frac{\Delta B}{\Delta x}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta E}{\Delta t}\quad\rightarrow\quad\frac{\partial B}{\partial x}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

の関係式より，上と同様の手法を用いて

$$B=\frac{\lambda}{T}\mu_0\varepsilon_0 E=c\mu_0\varepsilon_0 E$$

の関係式を導くことができる。これと先に導いた $E=cB$ の関係式より，

$$E=cB=c^2\mu_0\varepsilon_0 E$$

が得られる。したがって，

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3.0\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

となる。この結果は光が電磁波の一種であることを示している。

[解答]

上の解説を参照