

物理チャレンジ 2007

理論問題

2007年7月30日(月)

理論問題にチャレンジ 8:30~13:30

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問3題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙、計算用紙、および封筒にも手を触れないこと。封筒の表にある第2チャレンジ番号と氏名を確認すること。
2. 問題冊子は21ページである。解答冊子は10ページである。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ず第2チャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答のみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. チャレンジ開始後から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(11:50)後は、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、第2チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、封筒に入れ、机上に置いて退室可能である。
6. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は手をあげて監督者に知らせること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、第2チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、封筒に入れ、机上に置いて退出すること。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

第1問

空っぽの大型ペットボトルの中には、膨大な数（アボガドロ数 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ の1/10程度）の気体分子が含まれている。これらの気体を構成する分子は、ときどき衝突したり、弱く力をおよぼしあったりするものの、ほとんど自由に運動している。膨大な数の気体分子が集まると、個々の気体分子の運動は平均化され、巨視的（マクロ）な物理量が現れてくる。気体に関して人間が知覚できる温度、圧力、気体の流れなどはこうした巨視的な物理量である。

気体の巨視的な性質を、個々の分子の微視的（ミクロ）な運動から説明するのが気体分子運動論である。本問の[I][II][III]では、気体分子運動論の考え方を一步一步進めながら、魔法瓶（保温用のポット）の仕組みを解き明かすことにチャレンジする。

一方、気体分子の運動の平均化を行うと、「膨大な粒子数にわたる物理量の平均」ということ自身もたらす新たな法則性が生じる。その結果、個々の分子の運動を決める法則にはよらない、普遍的な法則が巨視的な気体に対して成立する。これが熱力学の法則である。こうした熱力学の法則を実在の気体に適用し、その性質の説明に挑戦するのが[IV]である。

[I]

温度や圧力が一様な状態の気体においては、**ボイル-シャルルの法則**が広い範囲にわたって成り立っている。この法則は、体積 V の容器の中に収められた絶対温度 T の一定量の気体の圧力を p とすると、

$$\frac{pV}{T} = \text{一定} \quad \dots (i)$$

と表される。また気体においては「同温同圧のもとでは、すべての気体は同じ体積中に同数の分子を含む」という**アボガドロの法則**が知られていて、標準状態（ 0°C 、1気圧）における1 mol（モル）の気体は、気体の種類と無関係に $2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ の体積を占めることが明らかになっている。

下記で用いられる装置内の気体では、気体分子の運動エネルギーは重力による位置エネルギーの変化に比べてはるかに大きいので、分子にはたらく重力の影響は無視する。

問1 標準状態において気体分子1個に割りあてられる体積はいくらか。

問2 気体分子を剛体球とみなし、その半径を $r = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ とする。標準状態において、気体分子1個に割りあてられる体積は気体分子自体の体積の何倍か。

[II]

質量 m の気体分子が N 個入っている容器の x 軸方向の長さを L 、 x 軸に垂直な断面積を S （容器の体積を V とすると、 $V = LS$ ）とする。気体分子は、容器内を x 軸に沿って運動しており、 i 番目の分子の速さを v_i とする。容器の壁は固定されていて分子は壁と弾性衝突をするものとする。その結果、気体分子は壁と衝突した後に、同じ速さで反対側の壁に向かって進み、その壁に衝突し、再び元の壁に向かって同じ速さで戻ってくるという運動をくり返すことになる。

各分子は、壁に衝突する際に瞬間的な力（撃力）をおよぼす。個々の衝突で壁にはたら

く力は、撃力となるが、気体分子と壁との単位時間あたりの衝突回数が非常に多いので、気体分子が壁におよぼす力を平均してみると、壁に対してほぼ一定の力を常時加えているものとみなせる。この気体分子のおよぼす力を単位断面積あたりにしたものが気体の圧力である。

問3 速さ v_i で運動している i 番目の分子が壁におよぼす力の時間平均 f_i 、すなわち、単位時間あたりの力積の表式を求めよ。また、この力の時間平均をすべての分子に対して加え合わせた力 F の表式を求めよ。

問4 問3の結果を用いて気体の圧力が単位体積中の分子数 $\frac{N}{V}$ に比例することを示せ。

問5 これまでの問の結果と、気体分子1個あたりの平均運動エネルギーが気体の絶対温度 T に比例することを用いて、ボイル-シャルルの法則(i)を導け。

[III]

[II]では、気体分子相互の衝突を無視したモデルに基づいて気体分子運動の計算を行った。ここでは一歩進んで、気体分子が互いに弾性衝突をくり返して速さや向きを変えながら空間を不規則に運動するというモデルを用いる。

問6 ここで用いる気体分子運動のモデルでは、分子の速度分布はあらゆる方向で等しく、 x 、 y 、 z 軸方向の各速度成分の2乗平均 $\langle v_x^2 \rangle$ 、 $\langle v_y^2 \rangle$ 、 $\langle v_z^2 \rangle$ は互いに等しく、 $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ が成り立つとする。このことと理想気体の状態方程式を用いて、分子1個あたりの平均運動エネルギー e と絶対温度 T の関係式を導け。ただし、ボルツマン定数 $k_B = \frac{R}{N_A}$ (R : 気体定数)を用いよ。

次に、この気体のモデルに平均自由行程の概念を導入する。平均自由行程とは、ある気体分子が他の気体分子と衝突してから、次に別の気体分子と衝突するまでに移動する距離の平均である。平均自由行程を記号 l で表す。

問7 剛体球とみなした気体分子の半径を r としたとき、図1-1のように、半径 $2r$ 、長さ l の円筒中に平均して1個の分子が存在することになる。このことから、 l を、 r および単位体積あたりの分子数 N/V を用いて表せ。

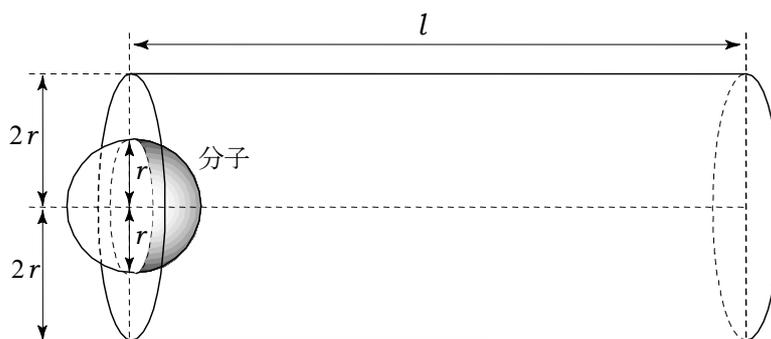


図1-1

問8 理想気体の状態方程式を用いて、 $T = 273\text{ K}$ のとき、1気圧 ($=1.0 \times 10^5\text{ Pa}$) のヘリウムガス(1molの質量は $4.0 \times 10^{-3}\text{ kg}$)の平均自由行程 l を有効数字2桁で求めよ。ただし、ヘリウム原子の半径を $r = 1.0 \times 10^{-10}\text{ m}$ とし、 $k_B = 1.4 \times 10^{-23}\text{ J/K}$ とする。

これまでの準備をもとに、温度に勾配のある気体において熱伝導の問題を計算しよう。温度に勾配のある気体においては、温度の高い方から温度の低い方へ熱の流れが生じる。温度の勾配によって熱の流れが生じるのは、導体において電位差が存在するときに、それに比例する電流が生じるのとよく似ている。図1-2のように座標を導入して、位置 x における気体の絶対温度を $T(x)$ と表すと、その法則は次の形で表される。

$$Q = -k \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \dots(\text{ii})$$

ここで、 Q は単位時間あたり単位断面積あたりに流れる熱量、 Δx は x 軸方向の微小距離、 ΔT は Δx あたりの温度差で、 $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ は温度勾配である。比例係数 k は熱伝導率と呼ばれ、単位は $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ である。式から明らかなように、熱伝導率 k の値が大きいほど、また温度勾配が大きいほど、多くの熱が流れることになる。右辺の負号は、 $k > 0$ とき、高温の領域から低温の領域へ熱量が流れるように付けられている。

さて、気体の熱伝導は、気体分子間の衝突を通じて、エネルギーの大きい分子から小さい分子にエネルギーが受け渡されることによる。したがって、気体の熱伝導は、気体分子相互の衝突を考慮した気体分子運動のモデルに基づいて扱うことができる。

ここでは、以下のように単純化したモデルに基づいて、熱伝導率 k を計算してみよう。再び図1-2において、温度 $T(0)$ の面 $x=0$ を通して、 $x < 0$ の領域から $x > 0$ の領域へ流れ込む熱量を考える。

いま、面 $x=0$ を通過する気体分子は、平均自由行程 l だけ前の位置 $x = \pm l$ での分子どう

し衝突で得た平均運動エネルギー $e(\pm l)$ をもっているとする。また、 $x < 0$ の領域から単位時間あたり面 $x = 0$ の単位断面積を通して $x > 0$ の領域へ通過する分子数を f_+ とし、 $x > 0$ の領域から単位時間あたり面 $x = 0$ の単位断面積を通して $x < 0$ の領域へ通過する分子数を f_- とする。これらは、面 $x = 0$ での分子の平均の速さ $v = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ と単位体積あたりの分子数 N/V の積で定まるから、 $f_+ = f_-$ としてよい。そこで、これを f とおき、 α を比例定数として、

$$f = f_+ = f_- = \frac{\alpha N v}{V}$$

と表す。

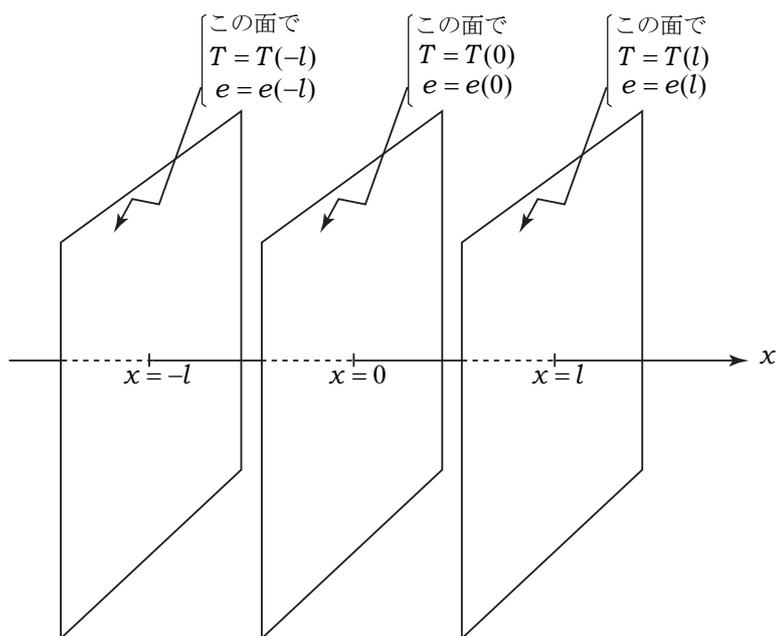


図 1-2

単位時間に単位面積あたり面 $x = 0$ を通して $x < 0$ の領域から $x > 0$ の領域へ流れる熱量 Q は、 $x < 0$ の領域から $x > 0$ の領域へ移動する気体分子のもつ運動エネルギー $Q_+ = f \cdot e(-l)$ と、 $x > 0$ の領域から $x < 0$ の領域へ移動する気体分子のもつ運動エネルギー $Q_- = f \cdot e(+l)$ の差で与えられる。

問 9 関係式

$$e(\pm l) = e(0) \pm l \left. \frac{\Delta e(x)}{\Delta x} \right|_{x=0} \quad (\text{複合同順})$$

および問 6 の結果を用いて、気体の熱伝導率 k の表式を求めよ。ただし、 $\left. \frac{\Delta e}{\Delta x} \right|_{x=0}$ は、面 $x = 0$ での平均運動エネルギー e の x 軸方向への変化率を表す。必要ならば、

$$\left. \frac{\Delta e}{\Delta x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\Delta e}{\Delta T} \right|_{x=0} \times \left. \frac{\Delta T}{\Delta x} \right|_{x=0}$$

を用いよ。また、 $\alpha = 1$ として、 $T = 273 \text{ K}$ でのヘリウムガスの熱伝導率 k を有効数字 2 桁で求めよ。

問 10 これまでの気体の熱伝導の理論を魔法瓶（保温用のポット）に適用してみよう。

魔法瓶では、熱の伝導を小さくするために壁面が二重構造になっており、その間を真空に近い状態にしている。

二重構造の壁面間にはヘリウムガスが入っているとす。魔法瓶の二重壁間（間隔を $1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ とする）のヘリウムガスの圧力を下げることで、1気圧のヘリウムガスの場合よりも魔法瓶の外部への熱流出量を $\frac{1}{100}$ 倍程度に減らしたい。ヘリウムガスの温度は $T = 273 \text{ K}$ とし、圧力をどの程度にすればよいか、求めよ。ただし、魔法瓶の二重壁間の熱放射は無視できるものとする。

【ヒント】平均自由行程 l が壁間の間隔 d より大きくなると、分子は一方の壁で得たエネルギーをそのまま他方の壁に運ぶことになる。この場合、平均自由行程のかわりに d を用いることになる。

[IV]

[III]で扱った熱伝導では、熱は、高温側から低温側に流れ、その逆は起こらない。一般に、外部に何の変化も与えることなく、低温側から高温側に熱を移すことはできない。これは、熱力学の第2法則と呼ばれている。また、熱力学第2法則によると、温度の定まった外部との熱のやりとりだけで正の仕事をすることは不可能であることを示すことができる。

理想気体では、断熱膨張により必ず温度は下がるが、分子間の相互作用が重要になる実在の気体ではどうであろうか。この場合、気体の内部エネルギーは、温度のみならず体積にも依存する。その場合でも、気体の状態は、気体の圧力、体積、温度のうち、どれか二つを決めれば定まり、気体の圧力は、一定の体積のもとで温度の上昇とともに増加し、また、一定の温度のもとでは体積の増加とともに減少する。

このような実在の気体を、図 1-3 に示すように、シリンダーの内部に入れて筒の中を自由に動けるピストンでふたをした。シリンダーとピストンの間には隙間はなく、気体がシリンダーの中からもれることはない。ピストンをゆっくり動かして気体の体積を変化させる方法には、シリンダーから熱の出入がないようにして変化させる断熱過程の他に、気体を温度の定まった外部と熱の出入りができるようにして一定温度に保ちながら変化させる等温過程などがある。



図 1-3

問 11 絶対温度 T , 圧力 p の状態から始めて, 断熱過程で体積を変化させるときの気体の圧力を体積 V の関数として $p_A(V)$ とし, 同様に等温過程で体積を変化させるときの圧力を V の関数として $p_B(V)$ とする。もし, 断熱過程で気体を膨張させたときに気体の温度が上昇したとすると, $p_A(V)$ と $p_B(V)$ の大小関係はどうか。理由をつけて示せ。

問 12 ある気体を断熱膨張させたところ温度が T_1 から T_2 になったとする。ここで, ピストンを固定し温度が T_1 の外部と熱的に接触させると, やがてピストン内部の気体の温度も T_1 になる。次に, この状態から等温過程でピストンを動かして, 気体の最初の体積になるまで圧縮すると, 気体は最初の状態にもどる。これをサイクルと呼ぶ。もし, 断熱膨張の間に温度が上昇したとすると, このようなサイクルの間に気体が外部になした仕事は正となることを, 理由をつけて示せ。

このようなサイクルは何回でもくり返すことができるが, そのたびに気体は外部に対して正の仕事を行うことができる。つまり, 気体自身は状態を変えることなく, 温度の定まった外部と熱のやりとりをするだけで正の仕事をし続けることができることになるが, これは先に述べた熱力学の第2法則によって禁じられていることである。したがって, 断熱膨張によって温度が上昇することはありえないということになる。

問 13 理想気体では, 圧力を一定に保ったまま気体の温度を 1 K 上昇させるのに必要な熱量 Q_p は, 同じ気体の体積を一定に保ったまま温度を 1 K 上昇させるのに必要な熱量 Q_v より大きいことが知られている。実在気体でも, 「断熱膨張によって気体の温度が上昇することはない」ということから, Q_v は Q_p より大きくはならないことを, 理由をつけて示せ。

【ヒント】熱力学の第2法則により $Q_v > 0$ である。

第2問

17世紀後半、ニュートンは、地上での物体の落下運動から太陽系における惑星の運動に至るまで、非常に広い範囲にわたって成立する物体の運動に関する法則を見出した。しかし、原子スケールの微視的（マイクロ）な世界においては、ニュートンの運動の法則をそのまま適用できないことが、20世紀初頭に判明した。マイクロな世界における物体の運動を説明し、また予言するには、量子論というまったく新しい理論を構築する必要があった。量子論は20世紀前半に多くの物理学者の寄与により確立されたが、その初期段階においてはボーアが指導的役割を果たした。ボーアは、原子に関する「定常状態」の考えと「振動数条件」を導入することによって、原子に関する実験事実を見事に説明したのである。今日、量子論は、マイクロな世界にとどまらず、物体の色・電気伝導度・硬さなど、さまざまな巨視的な性質を説明する理論となっている。

第2問では、マイクロな系における電子（質量を m ，電荷を $-e$ とする）の運動を量子論に基づいて考える。そして、原子の「定常状態」を「電子の物質波が定常波をつくっている状態」という観点から捉えた場合のボーアの量子条件、さらにはゾンマーフェルト、ウィルソン、石原らによって拡張された量子条件（ボーア-ゾンマーフェルトの量子条件）を、実際にマイクロな系に適用することに挑戦する。最後に、マイクロな世界における最新の科学的成果を、ボーア-ゾンマーフェルトの量子条件（高校教科書にあるボーアの量子条件と基本的に同じ）で理解することをめざす。

[I]

まず、水素原子について、ラザフォードの原子模型を用いて考察しよう。すなわち、原子核（陽子）を点電荷とし、電子が粒子として原子核まわりの円軌道上を運動する場合を考える。

量子論的には、すべての粒子は波動性も合わせ持つことになる。この物質波の概念は、ド・ブロイによって提唱されたものである。考えている電子の物質波としての波長（ド・ブロイ波長）を λ とすると、円軌道の長さが λ の自然数倍（ n 倍）であるときに原子は定常状態にある、とするとボーアの量子条件と一致する。

問1 n 番目の定常状態にある場合の電子の軌道半径 r_n と波長 λ との関係式を示せ。

ド・ブロイ波長 λ は運動量の逆数に比例し、その比例定数はプランク定数 h となることが知られている。また、 n は量子数と呼ばれる。

問2 原子核と電子との間に働く静電気力が向心力の役割を果たしているとして、 r_n を求めよ。ただしクーロンの法則における比例定数を k_0 とする。

問3 n 番目の定常状態のエネルギー E_n を求めよ。

ボーアは、 n' 番目の定常状態から n 番目の定常状態に電子が遷移するとき $E_{n'}$ と E_n の差に相当するエネルギーを持つ光（光子）が放出されると考え、水素原子の発光実験で

得られていたスペクトル系列を説明した。すなわち、問3の E_n を用いると、 $n = 2, 3, 4, \dots$ の状態と $n = 1$ の状態とのエネルギー差からライマン系列と呼ばれるスペクトル系列が、 $n = 3, 4, 5, \dots$ の状態と $n = 2$ の状態とのエネルギー差からバルマー系列が説明できる。このようにして、量子論の有用性が認められることとなった。

[II]

次に、電子が $x = 0$ および $x = L$ ($L > 0$)にある壁の間で x 軸上の往復運動をしている場合を考察しよう。[I]の水素原子の場合と同様に、電子の波動性から定常状態を考える場合、一往復の距離が電子の波長の自然数倍 (n 倍)となる速さのみが許される、という量子条件を課せばよい。

問4 電子が n 番目の定常状態にあるときの速さ v_n を求めよ。

問5 問4の場合の電子が持つエネルギー E_n を求めよ。ただし、この場合には水素原子の場合と異なり、運動エネルギーのみを考えればよい。これは、位置エネルギーが壁間で一定値をとるためである。すなわち、位置エネルギーの基準を、壁間における値そのものにとることで、壁間に閉じこめられた電子に対しては、位置エネルギーはゼロとなるからである。

電子を量子論で考える場合にも、第1問で考えた気体分子と同様に、電子は壁に力をおよぼしているであろう。その力を、次のように考えて求めてみよう。まず、 $x = L$ にある壁が移動できるとする。 n 番目の定常状態にある電子は、この壁がゆっくりと移動する場合、同じ n 番目の定常状態にとどまると期待される。したがって、壁の位置が $x = L$ から $x = L + \Delta L$ まで微小距離 ΔL だけ変化する間、 n 番目の定常状態にある電子のエネルギーが ΔE_n だけ変化したとすると、電子が壁におよぼす力 F_n は、

$$F_n = -\frac{\Delta E_n}{\Delta L} \quad \dots(1)$$

で与えられる。

問6 (1)式を利用して、電子が $x = L$ の壁におよぼしている力の大きさ F_n を求めよ。また、 F_n 、 v_n 、 L の関係式を導け。ここでは、 E_n を L の関数とすると、(1)式は、

$$F_n = -\frac{dE_n}{dL} \text{ となる。}$$

ここで、もう一度電子を粒子とみなし、定常状態を求める別の方法を考えてみよう。まず、電子の運動のようすは、座標 x と運動量 (p とする)の時間変化のようす $x(t)$ および $p(t)$ から、その詳細を知ることができるはずである。そこで、電子の運動を調べるために、座標と運動量をそれぞれ横軸と縦軸に取った平面 (これを位相平面という)の上で、点 $(x(t), p(t))$ がどのような動きを示すかを調べてみよう。たとえば、ある時刻において電子は $x = 0$ の壁と衝突すると、その運動量は $p = -mv$ から $p = mv$ へと瞬間的に変化する。このようすを位相平面上の点 $(x(t), p(t))$ の動きとして、図2-1のように線分で描き表すことができる。

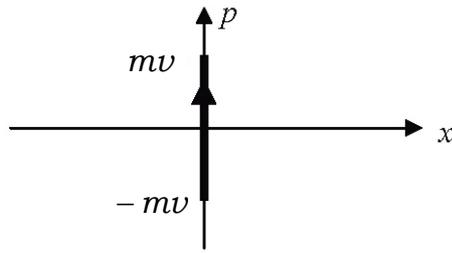


図 2-1 衝突の瞬間を表す位相平面上の軌道

問 7 電子が壁間で行う往復運動に対応して、位相平面上で点 $(x(t), p(t))$ は閉じた軌道(閉軌道)を描くことになる。そのようすを図示せよ。

問 8 問 7 の軌道に囲まれた領域の面積 S を求めよ。

問 9 電子の速さが問 4 で求めた定常状態の v_n のとき、問 7 の軌道に囲まれた面積 S_n を求めよ。これにより、定常状態では、位相平面上で軌道に囲まれた面積がプランク定数 h の自然数倍となっていることを確かめよ。

[III]

前問で示したことを一般化し、位相平面上での軌道が閉軌道となるとき、その軌道の囲む面積がプランク定数の自然数倍となる場合が量子論的な定常状態に対応している、とする量子条件がある。これは、ボーア-ゾンマーフェルトの量子条件と呼ばれるものである。水素原子中の電子や、壁間に束縛された電子に対して適用した量子条件は、物質波が定常波となる、というものであったが、このボーア-ゾンマーフェルトの量子条件は、より一般的な場合にも容易に適用できるものとなっている。

ここで、ボーア-ゾンマーフェルトの量子条件が適用できる例として、位置エネルギーが $\frac{1}{2}kx^2$ で与えられる場合の x 軸上での電子の振動運動を考えてみよう (k は正の定数である)。この場合、電子の運動量は時々刻々変化するので、物質波の波長も刻々と変化することになり、定常波の条件を適用することは簡単ではない。他方、ボーア-ゾンマーフェルトの量子条件は、この電子の運動に対応する位相平面上での軌道が閉軌道となるのでそのまま適用可能である。

問 10 電子の粒子としての運動を考えよう。力学的エネルギーが E で与えられる場合、 x の最大値はいくらか。

問 11 問 10 の場合、電子の位置および速度の時間変化 $x(t)$ および $v(t)$ を求めよ。ただし、時刻 $t=0$ で x は最大値を取っているものとする。

問 12 問 11 の場合について、位相平面上の閉軌道を図示せよ。

問 13 問 12 にボーア-ゾンマーフェルトの量子条件を適用し、定常状態のエネルギー E_n を求めよ。

[IV]

[Ⅲ]の結果を元に、J.J.トムソンの原子模型（1904 年）で水素原子のエネルギー準位が得られるか否かを調べてみよう。トムソンの原子模型では、電子は一様に帯電した正電荷球の内部をまわっている、としている。このような正電荷球の内部では、電子の位置エネルギーは $\frac{1}{2}Kr^2$ で与えられることが知られている。ただし、 K は正の定数、 r は正電荷球の中心から電子までの距離である。また、位置エネルギーの基準点は、正電荷球の中心としている。この中心を原点として互いに直交する x 軸、 y 軸、 z 軸をとると、結局、位置エネルギーは $\frac{1}{2}K(x^2+y^2+z^2)$ で与えられることになる。このように、位置エネルギーが x 、 y 、 z それぞれの関数の和で与えられる場合、ボーア-ゾンマーフェルトの量子条件は、 x 、 y 、 z 各成分、すなわち、 (x, p_x) 、 (y, p_y) 、 (z, p_z) の各位相平面それぞれに対して適用できる。ただし、 p_x 、 p_y 、 p_z は、それぞれ運動量ベクトルの x 、 y 、 z 成分である。

問 14 電子のエネルギー E を、運動量ベクトルと位置座標の各成分 p_x 、 p_y 、 p_z 、 x 、 y 、 z を用いて表せ。

問 15 ボーア-ゾンマーフェルトの量子条件を x 、 y 、 z 各成分について適用し、電子のエネルギー準位 $E(n_x, n_y, n_z)$ を求めよ。ただし、 n_x 、 n_y 、 n_z は、 x 、 y 、 z 各成分に量子条件を適用した際の量子数である。

この結果は、問 3 で得た E_n とは明らかに異なる。すなわち、J.J.トムソンの模型では、水素原子の定常状態のエネルギー準位を得ることはできず、水素原子のスペクトル系列とは合致しないことが分かる。他方、もう一つの原子模型として知られる長岡の原子模型（1904 年）では、正電荷球の外側を電子がまわっている、としている。正電荷球の外側にある電子の位置エネルギーは、点電荷が原点にある場合の電子の位置エネルギーとまったく同等であることが知られている。よって、長岡の原子模型を用いても、原子核を点とした場合の量子条件により出てくる問 3 の定常状態エネルギー E_n とまったく同じものが得られることになり、水素原子の線スペクトルを説明できることになる。実際、今日用いられている、波動方程式（相対論的効果を考慮したディラック方程式）に基づく量子条件を適用すると、重い原子核では、原子核を点電荷と考えるよりも有限の大きさを持つ正電荷球と考えた方が実験とより良く合う定常状態を得ることができる。これは、重い原子核においては、最内殻の K 殻などの電子は光速に近い速さで運動しているためである。この効果のため、K 殻の軌道半径は小さくなり、原子核の大きさを考慮することが必要になる。

[V]

[IV]で考えた J.J.トムソンの原子模型は、実は、ナトリウム(Na)などの金属元素において、有限個の原子が集まった「クラスター」と呼ばれる系の伝導電子系の性質を良く説明する模型であることが、近年分かってきた。すなわち、正電荷球とはクラスター全体に分布する正イオン（たとえば Na^+ イオン）を平均的に見たものであり、その中をまわっている電子とは、もともとは Na 原子の最外殻（M殻）にあった電子が、クラスターでは系全体に広がって運動する電子となったものである。

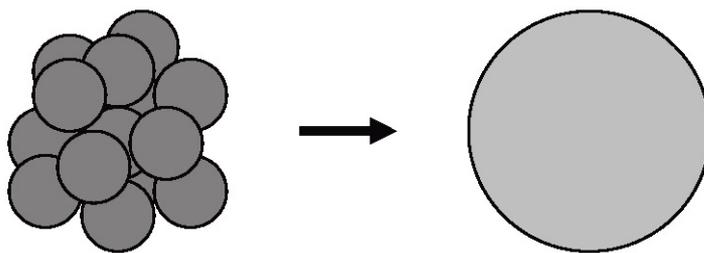


図 2-2 Na クラスターに対する正電荷球模型。

この模型では多数ある正イオンを 1 個の正電荷球でおきかえている。

この Na クラスターの場合、[IV]の水素原子の場合と異なり、考えるべき電子が多数個ある。そのため、各電子の持つ位置エネルギーは、正電荷球による位置エネルギーと、負電荷を持つ他の多数の電子のおよぼす逆符号の位置エネルギーの和として得られるであろう。両者は大部分打ち消し合い、結局、Na クラスター中の各伝導電子の持つ位置エネルギーは、クラスターのサイズによらず、球内ではほぼ一定の値をとることが知られている。すなわち、Na クラスター中の電子系は、球形の箱に閉じこめられた電子系という模型で考えてもよいことになる。

そこで、Na クラスター中の伝導電子の定常状態を予測するために、半径 R の球形の壁に閉じこめられた電子を考えることにしよう。この場合、位置エネルギーが一定であるので、[II]の壁間に閉じこめられた運動の場合と同様、ボーアの量子条件が利用できる。それには周期的な運動を見つければよいが、この場合には、球の内壁に弾性衝突をくり返して正多角形軌道をとる運動を考えることができる。Na クラスターでは、その中でも特に正三角形と正四角形軌道に沿った運動が重要となることが知られている。

問 16 これら、正三角形、正四角形軌道の長さ l_3 および l_4 を求めよ。

問 17 電子の波動性を考えた場合、正三角形軌道が波長の自然数倍となる速さ u_n を求めよ。同様に、正四角形軌道が波長の自然数倍となる速さ w_n を求めよ。

この Na クラスター系の電子の定常状態を実際に調べることができたでしょう。そして、各電子の速さの測定結果をもとに、それぞれの速さを持つ電子の個数（測定頻度）をグラフにしてみる（つまり、電子の個数を速さの関数として表す）。理想的には、飛び飛びの値を持つ、定常状態における速さのみが観測されるはずであるが、実際には、さまざまな要因から、幅を持った分布として測定結果が得られることになる。たとえば、正三角形軌道のみを考えればよい場合、測定から得られる速さの分布は問 17 の u_n で極大を持ち、その中間で極小を持つ、という「振動パターン」が得られると期待される。

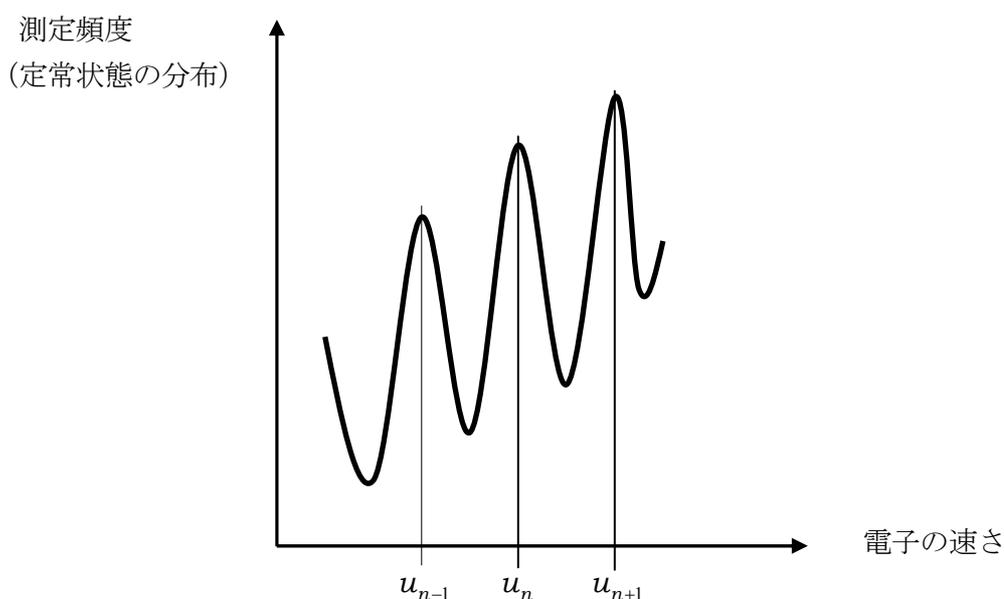


図 2-3 正三角形軌道のみを考えればよい場合に期待される電子の速さの測定頻度。

問 18 正三角形軌道と正四角形軌道の両者を考慮すべき場合には、どのような測定結果が得られるであろうか。図 2-3 のように、横軸に電子の速さ、縦軸に測定頻度をとったとき、予想されるグラフの概略図を描け。

Na クラスターにおける正三角形軌道と正四角形軌道の重要性は、西岡らによって予測され（1990 年）、翌年、実験で確認されている。

原子中の電子系の持つ K 殻、L 殻などの殻（シェル）構造は、その球対称の位置エネルギーに起因して現れるものである。この問題で見てきたように、Na クラスターの伝導電子系の定常状態は、原子同様、球対称の位置エネルギーを持つ電子の定常状態であるので、一種の殻構造を構成していると考えて良い。原子中の電子の示す殻構造は、原子番号の制限からも分かるように、最大でも 100 個程度の電子から構成されたものである。しかし、正三角形軌道と正四角形軌道が重要となる Na クラスター群には、数個から数千個までの伝導電子を持つ、広いサイズ範囲のクラスターが含まれる。そのため、Na クラスターの伝導電子の示す殻構造は、「スーパーシェル」と呼ばれている。

第3問

[I]

最近の科学技術の発展により、太陽系内のいろいろな惑星に観測装置をその周辺にまで送ることが可能になった。こうしてはるか彼方の新しい世界を間近に見ることができ、そこでのようすが手に取るように判る。小惑星など月以外の岩石天体にも多数のクレーターのあること、土星以外のガス惑星にもリングがあること、さらに最近では土星の衛星であるタイタンには液体メタンの海があり、島があり、そして川の流れることなどが判った。まさに新世界を見る思いがする。まもなく水星の周回機や冥王星の探査も実現する。しかし第1チャレンジ問題にもあったように、探査機を冥王星軌道付近に送るには、およそ45年もの歳月を要する。外惑星への探査には長大な飛行時間がかかってしまう。そこで途中の木星などの惑星の重力の影響をうまく利用することにより、燃料を使わずに飛行時間を短縮させ、次の目標に向かうことが考えられる。これはスウィングバイ（フライバイともいう）と呼ばれる技術である。

数百年に一度、外惑星と地球がある特定の配置を取るときには、1回の打ち上げで1つの探査機が燃料をほとんど使わずに木星、土星、天王星、海王星、冥王星などをまわる大旅行（グランドツアー）が可能であり、実際、1977年8月20日にボイジャー2号が、9月5日にはボイジャー1号がグランドツアーに旅立った。これらの探査機は、木星など、探査する惑星によるスウィングバイを次々と実行し、グランドツアーを成功させた。

スウィングバイの原理を考えるため、質量がそれぞれ m, M の2物体 A, B の一直線上の衝突について考える（図3-1）。衝突は弾性衝突とする。A が探査機、B が木星を表すとすれば、B の質量 M は A の質量 m と比べて圧倒的に大きいので、 $M \gg m$ である。

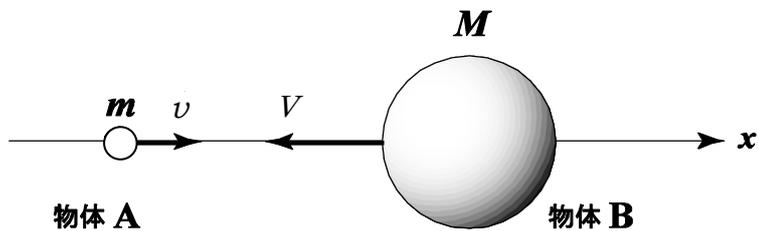


図3-1

問1 図3-1のように速さ v で右向きに進む物体 A と速さ V で左向きに進む物体 B が正面衝突したとき、衝突後の A の速さを求めよ。ただし $\frac{m}{M} \approx 0$ とせよ。

問2 静止座標系から見たときと、物体 B に固定した座標系から見たときの、衝突前後での物体 A の運動エネルギーの変化と運動量の変化をそれぞれ下表のように定義する。

	静止座標系	物体 B に固定した座標系
A の運動量の変化	Δp	$\Delta p'$
A の運動エネルギーの変化	ΔK	$\Delta K'$

- (1) Δp と $\Delta p'$ のあいだに成り立つ関係式を求めよ。
- (2) $\Delta K'$ を求めよ。
- (3) Δp を用いて ΔK を表せ。

物体 A と物体 B の衝突の場合とは違い、実際は探査機と木星が正面衝突するわけではない。探査機は木星からの万有引力を受け、木星に対して図 3-2 の実線のような双曲線軌道を描いて接近し、やがて遠ざかっていく。

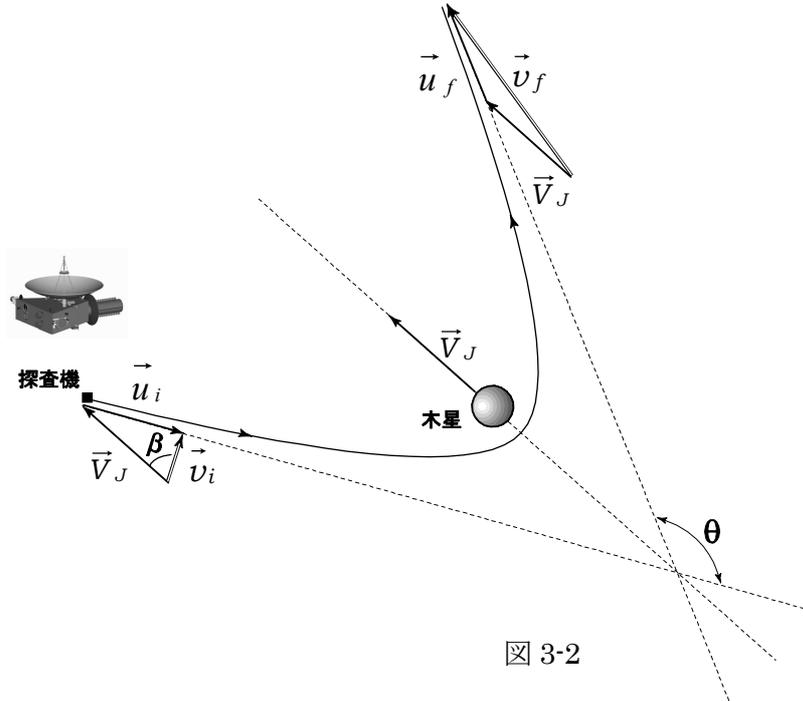


図 3-2

\vec{u}_i , \vec{u}_f は、探査機が木星に接近する前と、遠ざかった後での、木星に固定した座標系に対する探査機の世界速度ベクトルである。共に木星から十分離れた位置におけるものである。 \vec{v}_i , \vec{v}_f も探査機の木星接近前後での速度ベクトルであるが、木星の世界速度ベクトル \vec{V}_J と共に、太陽に固定した座標系に対するものである。したがって \vec{u}_i , \vec{u}_f と \vec{v}_i , \vec{v}_f は次の関係式を満たしている。

$$\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{V}_J$$

$$\vec{u}_f = \vec{v}_f - \vec{V}_J$$

また、図 3-2 において β は \vec{v}_i と \vec{V}_J のなす角であり、 θ は探査機の木星による散乱角（木星の万有引力によって曲げられた角度）である。この間の木星および探査機の、太陽から受ける万有引力による速度変化は無視し、以下の問いに答えよ。

問3 図 3-3 は \vec{v}_i , \vec{v}_f , \vec{u}_i , \vec{u}_f , \vec{V}_J を一つの図にまとめて表そうとしたものである。

図 3-3 では, \vec{V}_J と \vec{v}_i を与えて

いるので, 残りの \vec{u}_i , \vec{u}_f , \vec{v}_f の

3つのベクトルを記入し, 図を完

成させよ。

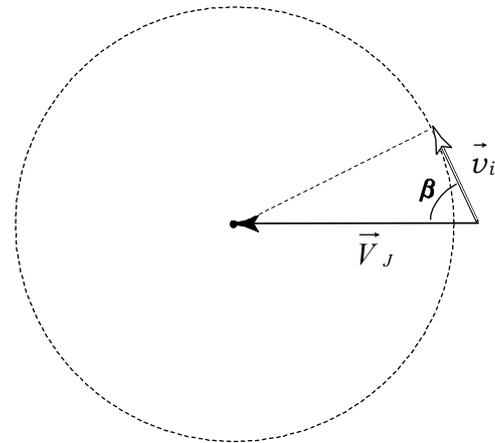


図 3-3

問4 探査機が木星に接近する前の速さが同じ ($|\vec{v}_i| = v_i$) でも, 木星の万有引力による探査

機の散乱角 θ により, 木星から遠ざかっていく時の速さ ($|\vec{v}_f| = v_f$) の値は大きく異

なる。 \vec{v}_i と \vec{V}_J のなす角を β としたとき, 最大の $|\vec{v}_f| = v_f$ はいくらになるか。 $|\vec{v}_i| = v_i$,

$|\vec{V}_J| = V_J$, $\cos\beta$ を用いて表せ。また, そのときの \vec{v}_f の向きを答えよ。

問5 最大の v_f を得るための散乱角 θ はいくらか。そのときの散乱角を θ_M としたとき,

$\cos\theta_M$ を v_i , u_i , V_J , $\cos\beta$ を用いて表せ。

こうして探査機は木星とのスウィングバイにより, 大きな速度と次の目標である土星を目指す方角に向き, グラウンドツアーが可能となった。現在, グラウンドツアーを終えたボイジャー1号と2号とは太陽の運動方向で100天文単位以上もの前方を時速6万kmで進んでおり, 先年には初めて太陽風の影響圏を抜けた。打上げ後30年経過した今でも未踏の星間空間のようすを探りながらデータを送り続けている。我々の知識はこれからもどんどん広がっている。

[II]

光や電波やX線などは、いずれも電磁波と呼ばれる真空中を光速 ($c=3.0\times 10^8\text{m/s}$) で伝わる電場と磁場の波である。電磁波の存在は、19世紀半頃マクスウェルによって理論的に予言された。そのマクスウェルの理論について考えてみよう。

問6 次の①～⑥の電磁波について、波長が短い順に、解答用紙に左から番号で答えよ。

- ①X線 ②可視光線 ③ガンマ線 ④紫外線 ⑤赤外線
- ⑥マイクロ波 (電子レンジ・携帯電話など)

ある点Pにおいて、電磁波の進行方向にx座標をとるとする。図3-4のように、電場Eと磁束密度Bは互いに直交し、EとBは常にx座標に直交している。

yz面に平行で点Pを通る面上では、E、Bは一定であり、共に位置xと時刻tにより決まる。ここでは、Eをy軸方向、Bをz軸方向に取るものとする。

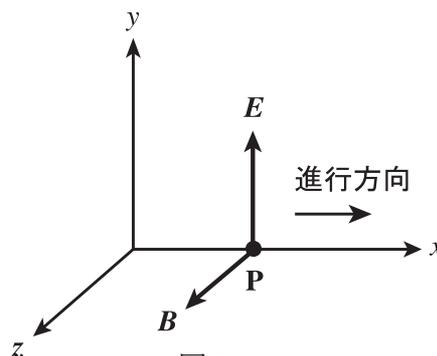


図 3-4

座標xにおける電場をE、 $x+\Delta x$ の位置における電場を $E+\Delta E$ とする。ただし、 Δx は変位xを微小変化させた量を意味しており、他の物理量についても微小変化は Δ を用いて表す。

xy平面内で点Pにおいて、図3-5のような幅 Δx 、高さhの長方形abcdを考えたとき、辺ab上の電場はE、辺cd上の電場は $E+\Delta E$ である。長方形abcdを垂直に貫く磁束密度Bは一様であるとし、Bが時間 Δt のあいだに ΔB だけ変化したとする。

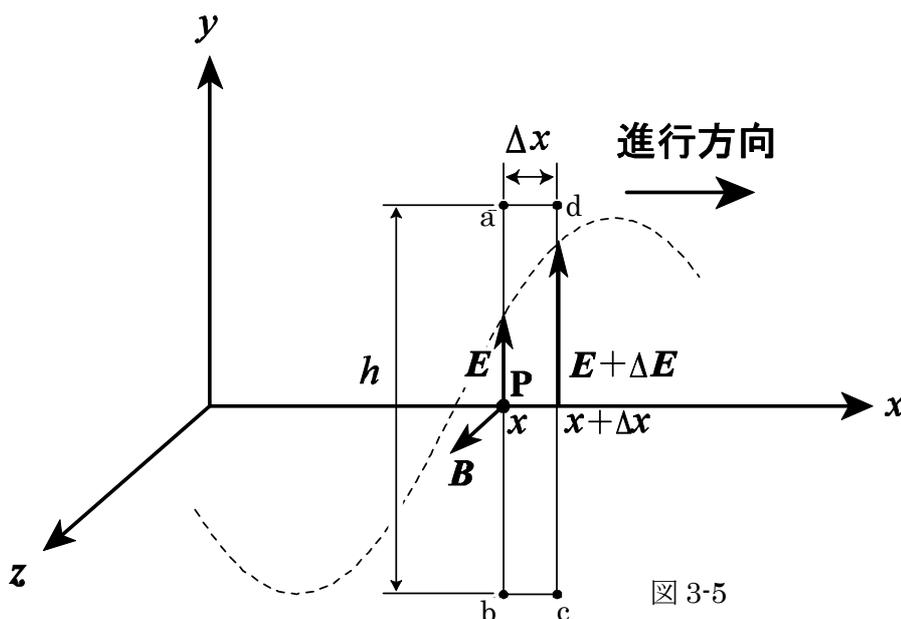


図 3-5

abcd を 1 巻きの長方形コイルと考え、そこに電磁誘導の法則を適用すると、

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = - \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

の関係式を導くことができる。

問 7 以下の文章はその導出法を述べている。空欄に適切な式を記入せよ。

コイルに生じる誘導起電力を V 、コイルを貫く磁束を Φ とする。磁束 Φ が時間 Δt のあいだに $\Delta\Phi$ だけ変化したとすると、電磁誘導の法則は、

$$\boxed{(1)} \quad \dots \textcircled{1}$$

と書ける。 Φ は B 、 h 、 Δx を用いて、 $\Phi = \boxed{(2)}$ と表せるので、

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \boxed{(3)} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。

一方、長方形コイル abcd に生じる誘導起電力は、 ΔE を用いて、

$$V = \boxed{(4)} \quad \dots \textcircled{3}$$

と表すことができる。②、③を①に代入すると、上の関係式を得る。

図 3-6 のように、直線電流 i を囲む閉曲線 C を考える。 C 上のある点における磁束密度 B の接線方向の成分を B_1 、微小距離を Δs_1 とする。 C を微小区間 Δs ごとに分割し、それぞれの地点での磁束密度の接線成分と微小距離の積を C に沿って一周分合計したものは、 C 内の電流の総和に真空の透磁率 μ_0 を乗じたものに等しくなる。すなわち、

$$B_1\Delta s_1 + B_2\Delta s_2 + \dots = \sum_j B_j\Delta s_j = \mu_0 i \quad \dots \textcircled{4}$$

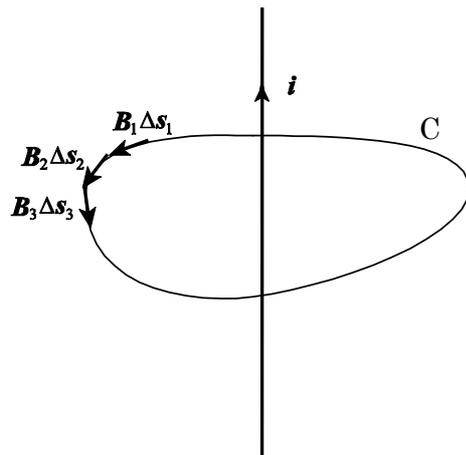


図 3-6

の関係が成り立つ。これをアンペールの法則という。ここで、閉曲線 C では向きが指定されていることに注意する。

問 8 次の文章は、電場が変化すると磁場が生じる、というアンペール-マクスウェルの法則を説明したものである。空欄に適切な式を記入せよ。

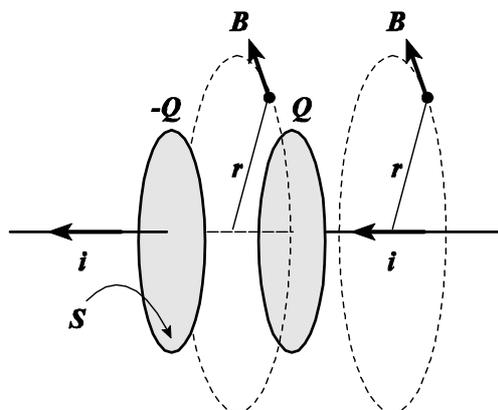


図 3-7

直線電流の途中に面積 S の平行平板コンデンサーがあり、そこに電流 i が流れ込む場合を考える (図 3-7)。コンデンサーの極板間には電流は流れないが、その周囲には直線電流の部分と同じ磁束密度 B の磁場が生じている。したがって、極板間には電流 i と同等のはたらきをする何かがあると考えられる。

真空の誘電率を ϵ_0 、それぞれの極板の電荷を Q 、 $-Q$ 、極板の面積を S とすれば、コンデンサーの極板間に生じる電場 E は で与えられる。したがって、極板の電荷が $Q + \Delta Q$ になったときの極板間の電場を $E + \Delta E$ とすれば、

$$\Delta E = \text{} \quad \dots \text{⑤}$$

である。

さて、単位時間あたりに極板に流れ込む電荷量が電流 i である。微小時間 Δt のあいだに極板の電荷が ΔQ だけ増加したとすると、電流 i は、

$$i = \text{} \quad \dots \text{⑥}$$

で与えられる。⑤、⑥より、

$$i = \text{} \quad \dots \text{⑦}$$

の関係式を得る。

極板間に電流は流れないが、時間変化する電場は存在している。式⑦の i を i_D と置けば、電場が微小時間 Δt のあいだに ΔE だけ変化すると、それは電流 i_D が流れたときと同等の磁場をつくると考えることが可能である。マクスウェルはそう考え、これを変位電流と呼んだ。式④のアンペールの法則の電流を変位電流 i_D で置き換えると、

$$\sum B \Delta s = \mu_0 i_D = \mu_0 \epsilon_0 S \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad \dots \text{⑧}$$

の関係式が得られる。すなわち、電場が変化すると磁場が生じる。

直線電流を囲む線を、長方形で表される場合を考える。図 3-8 のように、位置座標 x における磁束密度を B 、位置座標 $x + \Delta x$ における磁束密度を $B + \Delta B$ とする。 zx 平面内で点 P から幅 Δx 、奥行き h の長方形 $abcd$ を考えたとき、辺 ab 上の磁束密度は B 、辺 cd 上の磁束密度は $B + \Delta B$ である。

長方形 $abcd$ を垂直に貫く電場 E は一様であるとし、 E が時間 Δt のあいだに ΔE だけ変化したとする。

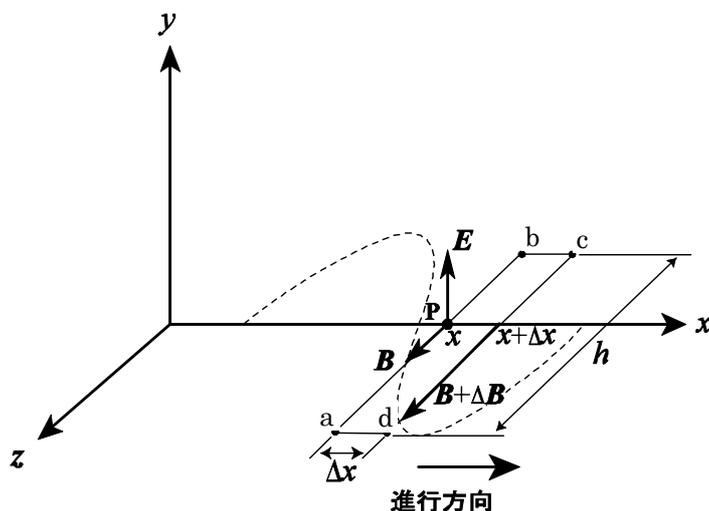


図 3-8

問 9 アンペールの法則とマクスウェルの変位電流の考え方を適用し、

$$\frac{\Delta B}{\Delta x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

の関係が成り立つことを示せ。

真空中の電磁波の伝わる速さ c を求めてみよう。図 3-9 において、電場 E と磁束密度 B は x と t の関数として、次式で与えられる。

$$E = E_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad \dots \textcircled{9}$$

$$B = B_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad \dots \textcircled{10}$$

ここで、 λ 、 T はそれぞれ E 、 B の波長と周期であり、 E_0 、 B_0 は E 、 B の振幅である。また、 $2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$ の部分を位相と呼ぶが、 E 、 B 共に共通であるので、 E と B は互いに同位相で振動している。

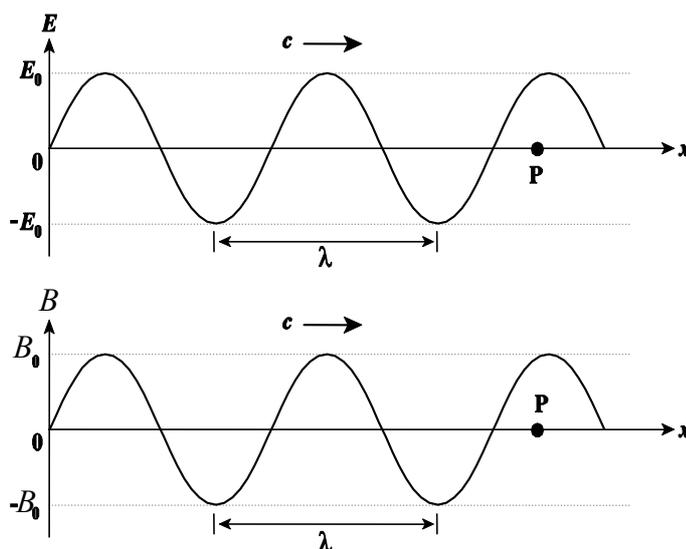


図 3-9

問 10 点 P における電場 E と磁束密度 B が式⑨、⑩で与えられるとき、

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = -\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

の関係式を利用して電場 E と磁束密度 B の関係を求めよ。

【ヒント】 ただし $\Delta x \ll \lambda$ 、 $\Delta t \ll T$ である。また、式中の ΔE は、 t が一定のまま x が Δx だけ変化したときの電場の変化であり、 ΔB は x が一定のまま、 t が Δt だけ変化したときの磁束密度の変化である。

もし必要ならば、三角関数の関係式（複合同順）

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

を用いよ。また、 θ が 1 に比べて十分に小さければ、

$$\sin \theta = \theta, \quad \cos \theta = 1$$

としてよい。

この関係式と、 $\frac{\Delta B}{\Delta x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta t}$ の関係式を利用して電場 E と磁束密度 B の関係

式を求めると、電磁波の伝わる速さ $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ を求めることが出来る。

この結果は、光が電磁波の一種であることを示している。

