

国際物理オリンピック

# 研修用テキストⅢ

熱物理・相対論・量子力学

【改定版】

特定非営利活動法人 物理オリンピック日本委員会



# 目 次

## 熱物理

第 1 章 熱現象	1
1.1 熱平衡と温度	1
1.2 経験的温度	2
1.3 熱膨張	3
1.4 状態方程式	4
1.5 熱と熱容量	6
1.6 伝熱機構	7
1.7 対流と放射	9
第 2 章 分子運動	11
2.1 気体の分子運動	11
2.2 固体の比熱	20
2.3 分子運動と熱伝導	21
第 3 章 理想気体の統計力学	26
3.1 独立粒子系の統計平均と分布関数	26
3.2 単原子理想気体の内部エネルギー – 運動量空間とマクスウェル分布	29
3.3 デュロン-ブティの法則 – 位相空間とボルツマン分布	31
3.4 2原子分子理想気体 – 一般化座標を使ったボルツマン分布	33
第 4 章 熱力学第 1 法則	39
4.1 熱力学第 1 法則	39
4.2 ジェール-トムソンの実験と理想気体の内部エネルギー	40
4.3 気体の状態変化	42
4.4 理想気体の準静的断熱変化	44
4.5 カルノー・サイクル	47
第 5 章 熱力学第 2 法則とエントロピー	52
5.1 可逆過程と不可逆過程	52
5.2 熱力学第 2 法則	52
5.3 2つの熱源の間にはたらく熱機関	54
5.4 熱力学的温度	55
5.5 クラウジウスの不等式	57
5.6 エントロピー	57

5.7	エントロピー増大の原理	58
5.8	熱力学第3法則	61
第6章	相平衡	63
6.1	固相, 液相, 気相	63
6.2	飽和蒸気圧と温度の関係	63
6.3	実在の気体	65
6.4	熱力学的平衡と自由エネルギー	66
6.5	ファン・デル・ワールスの状態方程式	68
6.6	熱力学関数	69
6.7	マクスウェルの関係式	71
第7章	マクスウェル分布とエントロピー	74
7.1	マクスウェルの速度分布則	74
7.2	理想気体のエントロピーの微視的な導出—ボルツマンの原理	80
第8章	光子の統計力学	84
8.1	黒体放射場とプランク分布	84
8.2	プランクの放射公式	85
8.3	光子のエネルギー流量	87
付録A	偏微分	91
A.1	偏微分と全微分	91
A.2	偏微分の公式	93
付録B	スターリングの公式の簡単な証明	95
付録C	ラグランジュの未定乗数法	96
付録D	ガウス積分	98

## 相対論

第1章	相対論へのプロローグ	101
1.1	エーテルと光行差	101
1.2	フレネルの随伴係数	103
1.3	フィゾーの実験	104
第2章	特殊相対性理論	107
2.1	光速不変の原理とローレンツ変換	107
2.2	相対論的力学	112
2.3	質量とエネルギーの等価性	118
第3章	電磁場の相対論	123

3.1	電流が電荷に及ぼす力	123
3.2	電磁場のローレンツ変換	127
3.3	電磁場の方程式のローレンツ不変性 I : 電荷の存在しない場合	134
3.4	電磁場の方程式のローレンツ不変性 II : 電荷の存在する場合	137
第 4 章	等価原理	140
4.1	慣性力	140
4.2	重力質量と慣性質量	141
4.3	パウンド・レプカの実験	144
4.4	重力場中での時間の遅れと長さの短縮	146
4.5	重力による光の屈折	148
第 5 章	相対論の 4 次元表現	155
5.1	時空間(ミンコフスキー空間)	155
5.2	4 次元運動方程式	157
5.3	4 元力と運動量, エネルギー	161
5.4	基本テンソル	163
5.5	ベクトルとテンソル	165
第 6 章	電磁気学のテンソル表現	173
6.1	マクスウェル方程式の書き換え	173
6.2	電磁場の 4 次元表現	176
6.3	電磁場の 1 次元ローレンツ変換	178
第 7 章	重力波	180
7.1.	一般相対性理論入門	180
7.1a	微小な(距離) <sup>2</sup> と計量	180
7.1b	等価原理	183
7.1c	Einstein 方程式と解	184
7.1d	Einstein 方程式の解の例	185
7.1e	物体が星や地球の重力から受ける重力ポテンシャル	186
7.2	重力波	186
7.2a	弱い重力場の方程式と近似解	186
7.2b	遅延ポテンシャルの解	187
7.2c	必要な成分 $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT}(\vec{r}, t)$	188
7.2d	微小な重力波の振幅の満たす簡単な式	189
7.2e	重力波放射の大きさ (電磁放射との類推)	190
7.3	重力波放射エネルギー	191
7.3a	電磁波の放射との類推	191
7.3b	重力波放射への類推と適用 (遅延効果)	191

7.4 重力波の観測	193
7.4a 間接的な観測	193
7.4b 重力波の直接観測	193
7.5 付録 (双極子放射の式(7.2.29)の導出)	194
付録 I 偏微分を使ってよければ	194
付録 II 偏微分を使わない: J.J.Thomson の説明	195

## 量子力学

第 1 章 量子力学入門	199
1.1 古典物理学の行き詰まり	199
1.2 光電効果の量子論	204
1.3 光子の運動量とコンプトン効果	206
1.4 ボーアの水素原子の理論	209
1.5 角運動量の量子化	215
1.6 電子の楕円軌道と作用積分の量子化	220
1.7 原子の電子構造とパウリ排他率	224
第 2 章 波動力学入門	230
2.1 ド・ブロイ波とシュレーディンガー方程式	230
2.2 波動関数の確率解釈	234
2.3 井戸型ポテンシャルに束縛された電子	238
2.4 井戸型ポテンシャルに散乱される電子	245
2.5 調和振動子と不確定性原理	250

分担執筆者: 熱物理	第 1,2,4~7 章	杉山忠男
	第 3,8 章	川村 清
相対論	第 1~6 章	杉山忠男
	第 7 章	荒船次郎
量子力学		川村 清

# 熱 物 理





熱学は、一般に熱現象が**巨視的** (macroscopic) に観測される物理量の間の関係を記述する理論である**熱力学** (thermodynamics) と、熱現象を**微視的** (microscopic) に説明しようとする**統計力学** (statistical mechanics) に分けられる。熱力学では、巨視的な体系の元となる微視的な成り立ちには立ち入らないが、統計力学では、微視的な立場から巨視的な性質を解明し、熱力学の法則の基礎付けを与える。ここでは、巨視的な考察を中心に、一部に微視的な考えを取り入れながら、熱現象の物理を、熱力学を中心に学ぶ。

## 第1章 熱現象

### 1.1 熱平衡と温度

日常的に経験する熱さ、冷たさの感覚を客観的に表す指標として**温度** (temperature) が用いられる。温度を知るには、しばしばアルコールや水銀などを中に封じ込めた液体温度計が用いられる。ある物体の温度を測定するとき、温度計をその物体に接触させ、温度計の目盛りの変化がなくなったときの値を読む。

一般に、温かい物体と冷たい物体を接触させると、温かい物体は冷やされ、冷たい物体は温かくなり、十分に時間がたつと温かさは一定になり、変化しなくなる。このように、2つの物体を接触させ、何の変化も起こらなくなったとき、その2つの物体は**熱平衡** (thermal equilibrium) になったといい、その状態を**熱平衡状態**という。熱平衡状態で決まった系の性質を表す物理量を**状態量** (state quantity) という。熱平衡状態が異なれば状態量は違うので、状態量で熱平衡状態を区別することができる。状態量をそのように考えるとき、状態量を**状態変数** (variable of state) と呼ぶ。温度は状態変数の1つと考えられる。

**熱力学第0法則**：物体AとBが熱平衡にあり、物体BとCが熱平衡にあるとき、物体AとCも熱平衡にある。

**熱力学第0法則** (the zeroth law of thermodynamics) は、経験的事実に基づいた法則であり、熱平衡が推移率を満たす概念であることを示すものである。これはごく当たり前の法則のように思えるであろうが、熱力学第0法則は、何が状態量か、を定める法則である。例えば、それぞれが熱平衡状態にある物体Aの温度と物体Bの温度をある温度計で測ったらその指示値が等しかったとする。次に、物体Bと物体Cの温度を同じ温度計で測ったら、再びその指示値が等しければ、物体AとCを同じ温度計で測定すればその指示値は等しい。このとき、熱力学第0法則によって、その温度計で測定した温度は推移率を満たし、熱平衡状態で決まる状態量であることが保証される。

## 1.2 経験的温度

温度を数値化するには、温度と共に変化する物体の変化を利用する。しかし、温度計に用いる物体により、変化の仕方が異なるため、標準となる温度計を決めるには、用いる物体を決めておく必要がある。このようにして決める温度は、便宜上そのように決めるだけで特別な意味はなく、このような温度を**経験的温度** (empirical temperature) という。

### セルシウス温度

日常生活で用いられている℃目盛は、1気圧のもとで氷と水が共存する温度を 0℃、水と水蒸気が共存する温度を 100℃とし、その間を 100 等分して次に述べるように 1℃の温度差を定義する。こうして決められた温度を**セルシウス温度** (Celsius temperature) という。

### 理想気体

実験によれば、希薄な一定量の気体では、温度が一定のとき、その圧力 (pressure) (気体が単位体積あたり押し力)  $p$  と体積  $V$  の積は気体の種類によらず一定値になることが知られている。これを**ボイルの法則** (Boyle's law) という。

質量数 12 の炭素同位体  $^{12}\text{C}$  12g に含まれる原子数 (これを**アヴォガドロ定数** (Avogadro's constant) という) と同数の同種の粒子 (原子, 分子, 電子など) からなる物質量を **1 モル** (one mole) という。アヴォガドロ定数  $N_A$  は、

$$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ [1/mol]}$$

である。

1モルの気体の圧力  $p$  と体積  $V$  の積を、

$$pV = RT \tag{1.1}$$

とおくことにより、温度  $T$  (単位は K で表される) を定義する。ここで、定数  $R$  は**気体定数** (gas constant) とよばれ、実験により次のように定めることができる。

気体が 0℃ と 100℃ のときの  $pV$  の値をそれぞれ  $(pV)_0$ ,  $(pV)_{100}$  と書き、0℃ と 100℃ の温度をそれぞれ  $T_0$ ,  $T_{100} = T_0 + 100$  とおくと、

$$(pV)_0 = RT_0, \quad (pV)_{100} = RT_{100}$$

となるから、

$$R = \frac{(pV)_{100} - (pV)_0}{100}$$

と書くことができ、それぞれの温度での  $pV$  の測定結果を用いて、

$$R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

を得る。さらに、 $(pV)_0 = RT_0$  より、

$$T_0 = 273.15 \text{ K}$$

と定まる。ここで、温度差 1℃ を温度差 1K に等しくとる。そうすると、12℃ は温度

$T_{12} = 273.15 + 12 = 285.15 \text{ K}$  などとなる。

$pV$  の値は、気体のモル数  $n$  に比例する。そうすると、一般に、気体の圧力  $p$ 、体積  $V$ 、温度  $T$  と  $n$  の間に、

$$pV = nRT \quad (1.2)$$

の関係が成り立つ。(1.2)式を厳密に満たす気体を**理想気体** (ideal gas) といい、(1.2)式を**理想気体の状態方程式** (equation of state of ideal gas) という。また、このように定めた温度  $T$  は、後に、理論的に定める温度 (熱力学的温度とよばれる) に一致する。そこで、温度  $T$  を**絶対温度** (absolute temperature) といい、以後特に断らない限り、温度は絶対温度を指すものとする。

このような理想気体を用いた温度計は必要不可欠なものであるが、扱いにくいので、実用上は、液体温度計などが用いられる。

### 1.3 熱膨張

液体や固体の物質は熱を吸収して温度が上昇すると膨張する。これを**熱膨張** (thermal expansion) という。後に詳しく学ぶように、気体の場合は、熱を吸収したからといって必ずしも温度が上昇するわけではなく、体積の変化も一意的には定まらない。熱膨張の割合は物質の種類により異なり、液体温度計は、水銀やアルコールなどの液体が、それを入れているガラス容器よりも膨張率が大きいことを利用している。

膨張率には、**線膨張率** (coefficient of linear expansion)  $\alpha$  と**体膨張率** (coefficient of volume expansion)  $\gamma$  がある。線膨張率は固体の場合に限って定義される。固体の長さ  $L$  を温度  $T$  の関数として線膨張率  $\alpha$  は、

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \quad (1.3)$$

で定義される。

一方、体膨張率は、固体、液体、気体のいずれに対しても定義できる。物体の体積  $V$  を温度  $T$  の関数として (圧力は一定とする)、体膨張率  $\gamma$  は、

$$\gamma = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad (1.4)$$

で定義される。一辺の長さ  $L$  の等方的な立方体の場合、

$$V = L^3$$

の両辺を温度  $T$  で微分して  $V = L^3$  でわると、

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = 3 \frac{1}{L} \frac{dL}{dT}$$

これは、

$$\gamma = 3\alpha \quad (1.5)$$

が成り立つことを示している。

いま、 $T = T_0$ のときの長さを $L = L_0$ として、線膨張率を

$$\alpha_0 = \frac{1}{L_0} \frac{dL}{dT}$$

で定義してみる。そうすると、広い温度範囲で線膨張率がほぼ一定の場合、この式を $T$ に関して積分して、

$$L = L_0 [1 + \alpha_0 (T - T_0)] \quad (1.6)$$

を得る。(1.6)式は、実用上、しばしば用いられる。ただし、温度が $T_0$ から大きくずれると、 $\alpha$ は $\alpha_0$ からずれることに注意しよう。

### 例題1.1 膨張率の測定

図1.1のようなガラス製の容器に、 $20^\circ\text{C}$ で1lの水を一杯に満たし、温度を $30^\circ\text{C}$ まで上昇させた。あふれ出る水は何ccか。ただし、この間の水の体膨張率を $3.5 \times 10^{-4} \text{ 1/K}$ 、

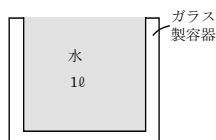


図 1.1

ガラスの体膨張率を $5.5 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$ で一定とする。

#### 【解答】

温度 $T$ のときの容器の容積 $V_G$ は、ガラスの体膨張率 $\gamma_G$ で決まり、

$$V_G = V_0 [1 + \gamma_G (T - T_0)]$$

と書ける。ここで、温度 $T_0$ のときの容器の容積を $V_0$ とした。一方、温度 $T$ のときの水の体積 $V_W$ は、温度 $T_0$ のときの水の体積を $V_0$ として水の体膨張率 $\gamma_W$ を用いて、

$$V_W = V_0 [1 + \gamma_W (T - T_0)]$$

となるから、あふれる水の体積 $\Delta V_W = V_W - V_G$ は、

$$\Delta V_W = (\gamma_W - \gamma_G)(T - T_0)V_0$$

ここで、 $\gamma_W = 3.5 \times 10^{-4} \text{ 1/K}$ 、 $\gamma_G = 5.5 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$ 、 $T_0 = 293 \text{ K}$ 、 $T = 303 \text{ K}$ 、

$V_0 = 1000 \text{ cc}$ を代入して、

$$\Delta V_W = \underline{3.4 \text{ cc}} \quad \blacksquare$$

## 1.4 状態方程式

物体は、温度 $T$ と圧力 $p$ を決めれば、熱平衡状態で体積 $V$ がいくらになるかが決まる。このことは、 $p, V, T$ の間に1つの関係があることを示している。その関係式を一般に、

$$f(p, V, T) = 0 \quad (1.7)$$

と書いて、**状態方程式** (equation of state) とよぶ。(1.7)式は、体積 $V$ 、温度 $T$ を決めれば圧力 $p$ が決まることも表している。また、 $p$ と $V$ を決めれば $T$ が決まる。したが

って、 $p, V, T$  はそれぞれ他の 2 変数の関数である。例えば、圧力を微小量  $dp$  だけ変化温度を  $dT$  だけ変化させたときの体積変化を  $dV$  とすると、

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT \quad (1.8)$$

と表される。ここで、偏微分に付けた添え字は、その物理量を一定にして  $V$  を偏微分することを示している。このように、熱力学では、偏微分の式に、一定とする変数の添え字を付けて表す。こうすることにより、偏微分する変数以外に、どんな変数があるかがわかりやすくなる。(1.8)式は、 $V$  を 2 変数  $p, T$  の関数と考えると、 $V = V(p, T)$  と考えたときの全微分の式に他ならない。

このような書き方をすれば、体膨張率  $\gamma$  を定義する式(1.4)は、

$$\gamma = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (1.4a)$$

と表される。また、(1.8)式の右辺第 1 項の  $\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$  は、温度を一定に保って圧力を変化させたときの体積変化率である。そこで、等温圧縮率 (isothermal compressibility)  $k_T$  を、

$$k_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (1.9)$$

と定義しよう。ここで、体積が減少するとき正となるように負号を付けた。

いま、体積を一定に保ったまま温度を変化させたときの圧力変化率  $\beta$  は、(1.8)式の左辺を 0 とおくと、 $\gamma$  と  $k_T$  を用いて、

$$\beta = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = -\frac{\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}{\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T} = \frac{\gamma}{k_T} \quad (1.10)$$

と表されることがわかる。このときの  $\beta$  を熱圧力係数 (thermal pressure coefficient) という。

### 例題 1.2 理想気体における $\gamma$ , $k_T$ , $\beta$ の値

理想気体の体膨張率  $\gamma$ , 等温圧縮率  $k_T$ , 熱圧力係数  $\beta$  を、それぞれ求めよ。

**【解答】**

理想気体の状態方程式(1.2)より、

$$\gamma = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{V} \cdot \frac{nR}{p} = \frac{1}{T}, \quad k_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{V} \cdot \left( -\frac{nRT}{p^2} \right) = \frac{1}{p}$$

$$\beta = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{nR}{V} = \frac{p}{T}$$

これらより、(1.10)式の  $\gamma = \beta k_T$  を得る。 ■

気体の状態方程式には、理想気体の状態方程式(1.2)の他、実在気体を表す状態方程式として有名なものに、ファン・デル・ワールスの状態方程式 (van der Waals' equation of state)

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad (1.11)$$

がある。ここで、 $V$  は1モルの体積であり、 $a, b$  は異なる定数である。この状態方程式は、体積が大きいとき、理想気体の状態方程式(1.2)に近づく。この方程式の詳しい検討は、後に行うことにしよう。

### 1.5 熱と熱容量

温度の高い物体 A と低い物体 B を接触させるとき、A から B に熱 (heat) が移動するという表現がしばしば使われる。この場合、熱を物質のようなものという考え方に立っており、その場合、熱は保存するとして扱う。第2章で述べるように、実は、熱はエネルギーの移動形態を表すものであるが、ここでは、物質のような保存するものとして扱い、熱の量を熱量 (heat quantity) とよぶ。ただし、熱量の単位はエネルギーとして J (ジュール) を用いる。

#### 熱容量と比熱

ある物体の温度を 1K 上昇させるのに加える熱を熱容量 (heat capacity) といい、 $C$  で表し、ある物質 1 kg を 1K 上昇させる熱を比熱 (specific heat) といい、 $c$  で表す。したがって、比熱  $c$  のような物質でできている質量  $m$  の物体の熱容量  $C$  は、

$$C = mc$$

と書ける。また、比熱  $c$  のような物質でできている質量  $m$  の物体は温度が  $t$  °C 上昇すると、

$$Q = mct$$

の熱量を吸収する。熱容量の単位は J/K、比熱の単位は J/(kg · K) である。

#### 例題 1.3 鉄球の温度

熱せられた 0.10 kg の鉄球を、15°C に保たれていた水熱量計の中に入れたら、十分に時間がたったのち、水の温度は 18°C になった。熱量計に入れられた水の質量を 0.50 kg、熱量計の熱容量を 160 J/K とするとき、はじめに入れた鉄球の温度はいくらであったか。

ただし、水の比熱を  $4.2 \times 10^3$  J/(kg · K)、鉄の比熱を  $4.5 \times 10^2$  J/(kg · K) とする。

【解答】

熱せられた鉄球の温度を  $t$  °C とすると、鉄球が 18°C になるまでに放出する熱量を水と熱量計が吸収して温度が 15°C から 18°C に上昇する。よって、

$$0.10 \times 4.5 \times 10^2 \times (t - 18) = (0.50 \times 4.2 \times 10^3 + 160) \times (18 - 15)$$

これより、鉄球の温度は、 $t = \underline{169^\circ\text{C}}$   
になることがわかる。

1.6 伝熱機構

熱の伝わり方（伝熱機構）には、伝導、対流、放射の3つの仕組みがある。

熱伝導

金属の棒の先を炎にかざしておくと、次第に反対側の温度も上昇してくる。これは、炎にかざした側では周囲の温度が高いため、金属の原子がエネルギーを吸収し大きな振幅で振動するようになる。この振動のエネルギーが隣接する原子に与えられ、金属棒に沿って流れていく。このようなエネルギー（熱）の伝わり方を熱伝導（heat conduction）という。

図 1.2 のように、幅  $L$  の十分に広い一様な板の一方の面の温度を  $T_1$ 、他方の面の温度を  $T_2$  ( $> T_1$ ) とするとき、面積  $S$  あたり単位時間に通過する熱量  $Q$  は、板の温度勾配  $\frac{T_2 - T_1}{L}$  に比例し、

$$Q = \lambda S \frac{T_2 - T_1}{L}$$

と書ける。このとき、比例定数  $\lambda$  を熱伝導率（thermal conductivity）という。

いくつかの物質の熱伝導率を表 1.1 に示す。

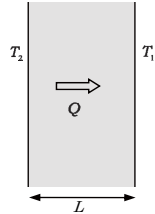


図 1.2

表 1.1 熱伝導率

物質	温度(°C)	$\lambda$ W/(m・K)
アルミニウム	20	204
金	20	295
銀	20	418
銅	20	386
鉄	20	67
水	10	0.582
ガラス	常温	0.55~0.75
空気	0	0.0248

### 熱伝導方程式

図 1.3 のように、 $x$  軸に沿った十分に長い単位断面積をもつ一様な棒において、位置  $x$  と  $x+dx$  の面 A, B を考える。棒の側面から放射される熱量は無視する。面 A を単位時間に  $x$  軸正方向に流れる熱量  $q$  は、面 A での温度勾配  $\frac{\partial T}{\partial x}$  を用いて、

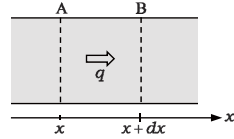


図 1.3

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.12)$$

と書ける。ここで、負号は、熱が温度の高い側から低い側に移動するために付けられている。面 B での温度勾配は、 $\frac{\partial}{\partial x} \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$  となるから、面 B を時間  $dt$  の間に  $x$  軸正方向に流れる熱量は、

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right) dt$$

である。

面 A から流れ込み面 B から流れ出した熱量の差が、すべて AB 間の温度上昇に使われたとする。棒の密度を  $\rho$ 、比熱を  $c$ 、面 AB 間の温度上昇を  $dT$  とすると、AB 間に溜まる熱量は  $cp dx dT$  であるから、

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dt - \left[ -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right) dt \right] &= cp dx dT \\ \therefore \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\lambda}{cp} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

を得る。(1.13)式は、1 次元の熱伝導方程式 (heat conduction equation) と呼ばれている。

### 例題 1.4 2 枚の板の境界の温度

図 1.4 のように、それぞれ厚さ  $L_1, L_2$ 、熱伝導率  $\lambda_1, \lambda_2$  の十分に広い一様な 2 枚の板が、面 C で接している。左側の板の面 A を一定温度  $T_1$ 、右側の板の面 B を一定温度  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) とするとき、定常状態での面 C の温度  $T$  を求めよ。

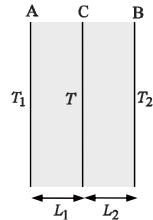


図 1.4

【解答】



面 A から B に向かって単位面積を単位時間に流れる熱量を  $q$  とすると、

$$q = \lambda_1 \frac{T_1 - T}{L_1}, \quad q = \lambda_2 \frac{T - T_2}{L_2}$$

これらより  $q$  を消去して、

$$T = \frac{\frac{\lambda_1}{L_1} T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2} T_2}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$$

## 1.7 対流と放射

冬の寒い日、床に設置された暖房器具で暖められた空気は天井近くに上昇し、天井近くの冷たい空気は下降して床の暖房器具で暖められる。こうして、床暖房によって部屋全体の空気が次第に暖められる。このように、空気などの流体自体が動くことによる熱の移動を**熱対流** (heat convection) という。

太陽からの熱は真空の宇宙空間を通過して地球に届く。これは、電磁波としてエネルギー (熱) が流れてきたためである。このような、電磁波による熱の移動を**熱放射** (heat radiation) という。熱放射は媒体を必要としない点で、熱伝導や熱対流とは異なる。

物体から単位時間に熱放射されるエネルギー  $P$  を**熱放射率** (thermal emissivity) という。物体の表面 (絶対) 温度を  $T$  とすると、 $P$  は物体の表面積  $S$  と  $T^4$  に比例する。そこで  $P$  は、

$$P = \varepsilon \sigma S T^4 \quad (1.14)$$

と表される。これを**シュテファン - ボルツマンの法則** (Stefan-Boltzmann law) という。ここで、 $\sigma$  は**シュテファン - ボルツマン定数** (Stefan-Boltzmann constant) と呼ばれ、

$$\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

である。また、 $\varepsilon$  は**放射率** (emissivity) と呼ばれ、表面の性質により 0 から 1 の値をとる。すべての波長の電磁波を放射あるいは吸収する物体を**黒体** (black body) と呼び、黒体の放射率は  $\varepsilon = 1$  である。なお、シュテファン - ボルツマンの法則の導出などは、第 7 章で学ぶ。

### 例題 1.5 地球の表面温度

太陽と地球はともに球形の黒体とし、図 1.5 のように、地球は太陽のまわりを完全な円を描いて運動しているとする。また、到達した太陽光をすべて吸収して同じ量の熱を外部に放射すると仮定して、地球表面の温度  $T_E$  を求めよ。太陽の表面温度を  $T_S = 5770 \text{ K}$ 、太陽半径を

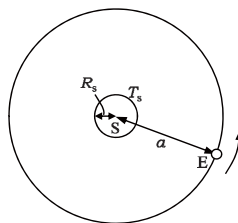


図 1.5

$R_s = 6.96 \times 10^5$  km, 太陽と地球の距離を  $a = 1.50 \times 10^8$  km とする。

【解答】

地球が単位時間あたり吸収する熱量  $H_A$  は, 地球の断面積  $\pi R_E^2$  ( $R_E$ : 地球の半径) を用いて,

$$H_A = \sigma T_s^4 \times \frac{4\pi R_s^2}{4\pi a^2} \times \pi R_E^2$$

一方, 地球が単位時間あたり放射する熱量  $H_E$  は,

$$H_E = \sigma T_E^4 \times 4\pi R_E^2$$

両者の熱量がつり合うとして,  $H_A = H_E$  より,

$$T_E = T_s \sqrt{\frac{R_s}{2a}} = \underline{278 \text{ K}} = \underline{5^\circ \text{C}} \quad \blacksquare$$