応募理論問題【解答】

第１問

回路の電気抵抗は一定であり，金属棒とレールの間に摩擦はないものとする。時間とともに電気抵抗が増加することを考慮する場合と，摩擦がある場合については，付録で定性的に考察する。

（１）1)　レンツの法則を用いる説明(a)とローレンツ力を用いる説明(b)がある。

(a)金属棒を右向きに動かすと，スイッチと平行導体レールおよび金属棒で囲まれた閉回路を貫く磁束が増加するので，閉回路には，磁束の増加を妨げる向きに誘導起電力が発生する。

(b)金属棒に対して静止している金属中の自由電子は，金属棒と共に図１の水平右方向へ動くので，電子には磁場からローレンツ力が A→B の向きに働き，この力によって回路に誘導起電力が発生する。

2)　これもレンツの法則を用いる説明(a)とローレンツ力を用いる説明(b)がある。

(a)回路には図１の上からみて時計回り(A 端→スイッチ→B 端→A 端の向き)に誘導起電力が生じ，誘導電流が流れる。回路に電気抵抗があるので，A 端の電位は B 端より高い。

(b)ローレンツ力を受けた金属棒中の自由電子が B 端に多く溜まり，B 端は負に帯電する。また，A 端の電子は不足し，A 端は正に帯電する。よって，A 端の電位は B 端より高い。

3) 誘導電流は誘導起電力の向きに流れるから，回路に流れる電流の向きは，金属棒の B→A である。

4) 金属棒中を B→A の向きに流れる電流には，ローレンツ力として、磁場から図１の水平左向き(金属棒の速度と逆向き)に力が働く。

5) 金属棒を一定の速さで滑らせるには，金属棒に働く力をつり合わせねばならない。なぜならば, 一定速度の運動で加速度がなければ働く力の全体はゼロでなければならないから。そのために，図１の水平右向き(金属棒の速度の向き)に外力を加える必要がある。

6) 外力を速度の向きに加えると，外力は正の仕事をする。一方，回路には電気抵抗があるから，電流が流れるとジュール熱が発生する。また，金属棒の速さは一定であるからその運動エネルギーは変化しない。したがってエネルギー保存則より，外力のする仕事はすべて回路に生じるジュール熱として失われることになる。

下記のような数式を用いた答案も一定程度あった。

＜定量的考察＞

平行導線の間隔(金属棒 AB の長さ)をl, 一様な磁場を大きさBの一様な磁束密度の磁場，金属棒の一定の速さをv_0，回路の電気抵抗をRとする(図ａ)。ただし，金属棒とレールの間に摩擦はないものとする。

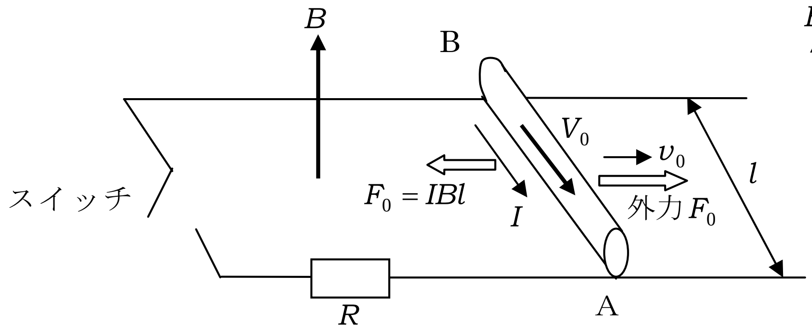


図 a

1) 回路に生じる誘導起電力の大きさ V_0 は，金属棒が単位時間に切る磁束に等しく，$V_0 = v_0 Bl$ と表される。

2) このとき，A 端の電位は B 端より $V_0 = v_0 Bl$ だけ高い。

3) また， B→A の向きに流れる電流の強さ I は，キルヒホッフの第２法則より，

$$V_0 = RI \quad \therefore \quad I = \frac{V_0}{R} = \frac{v_0 Bl}{R}$$

となる。

4) このとき，金属棒に流れる電流には，$F_0 = IBl = \dfrac{V_0 Bl}{R} = \dfrac{v_0 (Bl)^2}{R}$ の大きさの力が金属棒の速度と逆向きに働く。

5) 金属棒を一定の速さで滑らせるには，金属棒の速度の向きに大きさ $F_0 = \dfrac{v_0 (Bl)^2}{R}$ の外力を加えねばならない。

6) 金属棒に加える仕事率は，$P = F_0 \cdot v_0 = \dfrac{(v_0 Bl)^2}{R}$

　回路で発生する単位時間あたりのジュール熱は，$P_{\mathrm{J}} = RI^2 = \dfrac{(v_0 Bl)^2}{R} = P$ となり，エネルギー保存則が成り立っていることがわかる。

（２）1) 問(１) 2)より，金属棒の A 端の電位が B 端より高くなるので，コンデンサーの点 P 側の極板には，正電荷が溜まる。

2) はじめコンデンサーに電荷が溜まっていないとすると，平行導体レールの電気抵抗に AB 間の電圧がかかり，金属棒に B→A の向きに大きな電流が流れるが，次第にコンデンサーに電荷が溜まり，レールの抵抗にかかる電圧は小さくなる。その結果，回路に流れる電流は小さくなり，十分に時間がたつと，コンデンサーに溜まった電荷による極板間の電圧が AB 間の電圧に等しくなり，電流は 0 になる。金属棒を一定の速さで動かし始める時刻を $t = 0$ とし，横軸に時刻 t，縦軸に電流 i をとってグラフを

描けば，概略，図 b のようになる。ここで，時刻$t=0$のときの電流値をi_0とした。

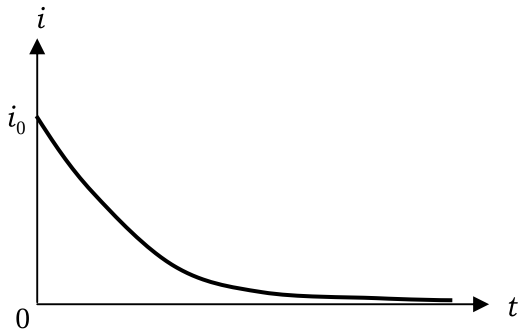


図 b

3) 金属棒を一定の速さで動かすためには，問題文の図 2 の水平右向きに外力を加える必要がある。加える外力の大きさは，金属棒に流れる電流に磁場から働く水平左向きの力の大きさに等しい。電流の強さは次第に減少するので，電流に磁場から働く力とつり合わせる外力の大きさも次第に減少し 0 となる。

4)（ｉ）十分長い時間がたってから外力を取り去る場合

十分に時間がたつと金属棒に流れる電流は 0 であるから，金属棒に磁場から力は働かず，外力を取り去っても金属棒は一定の速さで水平右向きに動き続ける。

（ⅱ）短い時間の間に外力を取り去る場合

短い時間しかたっていないとき，コンデンサーには少しの電荷しか溜まっておらず，極板間の電圧は AB 間の電圧より小さい。このとき，導体レールの抵抗には電圧がかかり，電流が B→A の向きに流れる。この電流には磁場から水平左向きに力が働くから，外力を取り去ると，金属棒の右向きの速さは減速する。金属棒の速さが遅くなると，金属棒に生じる誘導起電力は減少し，B 端に対する A 端の電位は小さくなる。十分に時間がたつと，AB 間の電圧がコンデンサー極板間の電圧に等しくなり，電流は流れず金属棒に力は働かない。その結果，金属棒は外力を加えていたときの速さより遅い一定の速さで水平右向きに動き続ける。

この間の金属棒の速さの変化を，外力を取り去った時刻を$t=t_0$とし，横軸に時刻t，縦軸に金属棒の右向きの速度vをとってグラフを描けば，概略，図 c のようになる。ここで，はじめの金属棒の速さをv_0，外力を取り去り十分に時間がたったときの速さをv_0-v_1とした。

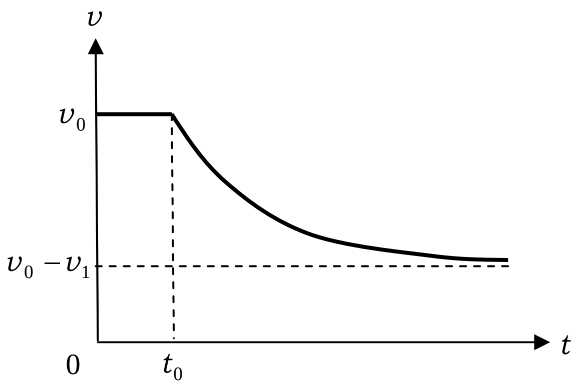


図 c

下記のように微分方程式を用いて定量的な考察を行った答案もいくつかあった。

答案例

平行導体レール間の間隔，一様な磁束密度，金属棒の一定の速さ，回路の電気抵抗を図 d のようにとる。またコンデンサーの電気容量をC（＝1F）とする。回路の電気抵

抗は，金属棒と間の導体レールの長さが時間と共に長くなるので，時刻tと共に増加するが，ここでは計算を簡単にするため一定値Rとする。

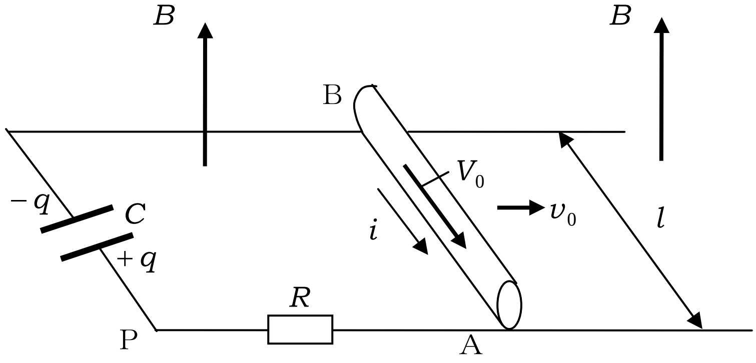


図 d

1）金属棒の水平右向きの速さが一定値v_0のとき，B 端より A 端の電位が$V_0 = v_0 Bl$だけ高くなるから，十分長い時間がたつと，コンデンサーの P 側極板には，$Q = CV_0 = Cv_0 Bl$の静電荷が溜まる。

2）時刻$t = 0$に金属棒を一定の速さv_0で動かし始め，時刻tにおいて B→A の向きに流れる電流の強さをi，コンデンサーの P 側極板に溜まっている電荷をqとする(図 d)。このとき，B 端に対する A 端の電位$V_0 = v_0 Bl$を用いて，回路のキルヒホッフの第２法則の式(これを以下，回路方程式と呼ぶ)は，

$$V_0 = Ri + \frac{q}{C}$$

ここで，$i = \dfrac{dq}{dt}$であるから，回路方程式は，

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{CR}\left(CV_0 - q\right) \qquad \cdots①$$

と書ける。

はじめ($t = 0$)，コンデンサーに電荷が溜まっていなかった($q = 0$)とする。qが小さい間，①式の右辺は大きく，コンデンサーに大きな電流$i = \dfrac{dq}{dt}$が流れ込み，qは急激に増加する。qが大きくなると，右辺は小さくなり，qの増加の割合$\dfrac{dq}{dt}$は小さくなり，十分に時間がたってqがCV_0に等しくなると，電流$i = \dfrac{dq}{dt}$は 0 になる。したがって，コンデンサーに蓄えられる電荷qは，時刻tと共に図 e のように変化する。ここで，$q_0 = CV_0$である。

①式は変数分離型微分方程式と呼ばれ，次のように解くことが出来る。①式の両辺を$CV_0 - q$で割り，時刻tで積分する。

$$\int \frac{1}{CV_0 - q}\frac{dq}{dt}dt = \int \frac{1}{CR}dt$$

これを積分変数の変換 $\dfrac{dq}{dt}dt \to dq$ を用いて積分すると，

$\log(CV_0 - q) = -\kappa_0 t + D_1$

ここで，D_1 は積分定数であり，$\kappa_0 = \dfrac{1}{CR}$ である。初期条件「$t = 0$ のとき，$q = 0$」(はじめにコンデンサーに電荷は蓄えられていなかったとする)より，$D_1 = \log CV_0$ となる。これより，

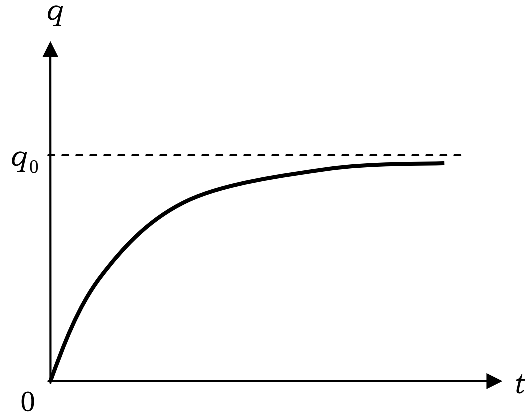


図 e

$$q = q_0(1 - e^{-\kappa_0 t}),\quad q_0 = CV_0 \qquad \cdots②$$

を得る。②式をグラフに描いたものが図 e である。

3) 金属棒に流れる電流 i に磁場からはたらく力の大きさは iBl と表されるから，金属棒を一定の速さで動かし続けるために水平右向きに加える外力の大きさは，$F = iBl$ となる。よって，外力の大きさ F は，時刻 t と共に電流 i と同様な変化をする(図 b 参照)。

4) 金属棒の質量を m，時刻 t において，金属棒の水平右向きの速さを v，B→A の向きに流れる電流を i，コンデンサーの P 側極板の電荷を q とすると，金属棒の運動方程式と回路方程式は，それぞれ，

$$m\frac{dv}{dt} = -iBl \qquad \cdots③$$

$$vBl = Ri + \frac{q}{C} \qquad \cdots④$$

となる。④式の両辺を t で微分し，$i = \dfrac{dq}{dt}$ および③式を用いると，

$$\frac{di}{dt} = -\kappa i,\quad \kappa = \frac{m + C(Bl)^2}{mCR} \qquad \cdots⑤$$

時刻 $t = t_0$ に外力を取り去ったとする。その場合，初期条件「$t = t_0$ のとき，$i = i_1 \left(< i_0 = \dfrac{v_0 Bl}{R} \right)$」を用いて，⑤式を t で積分して，

$$i = i_1 e^{-\kappa(t - t_0)}$$

これを③式へ代入して，

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{i_1 Bl}{m} e^{-\kappa(t - t_0)} \qquad \cdots⑥$$

金属棒の速度に対する初期条件「$t=t_0$ のとき，$v=v_0$」より，⑥式を t で積分して，$t \geqq t_0$ における金属棒の速さ v は，

$$v = v_0 - v_1\left(1-e^{-\kappa(t-t_0)}\right),\quad v_1 = \frac{i_1 Bl}{\kappa m} \qquad \cdots ⑦$$

となる。

（ｉ）十分長い時間がたってから外力を取り去る場合

時刻 $t=t_0\,(=\infty)$ のとき，電流は流れていないから，$i_1=0$ として，金属棒の速さは⑦式より，

$$v = v_0$$

の一定値となる。

（ⅱ）短い時間の間に外力を取り去る場合

時刻 $t=t_0$ のとき，電流 $i_1\,(0<i_1<i_0)$ が流れているから，⑦式より，図ｃを得る。

付録１．回路の電気抵抗が時刻と共に増加する場合

発熱等で抵抗値 R が時刻 t と共に大きくなる場合，⑤式において κ が時刻と共に小さくなることを意味する。したがって，電流の減少の割合が小さくなり，電流がほぼ 0 になるまでの時間，および，金属棒がほぼ一定の速さになるまでの時間が、より長くなる。

付録２．金属棒とレールの間に摩擦がある場合

（1） 摩擦があると，

5) 金属棒を一定の速さで動かすのに加える外力の大きさは，摩擦のない場合に比べて動摩擦力の大きさの分だけ大きくなる。

6) 外力のする仕事は，ジュール熱と動摩擦力の仕事として失われる。

（2）3) 金属棒を一定の速さで動かし続けるために加える外力は，動摩擦力の大きさの分だけ大きくしなければならない。また，十分に時間がたっても外力を 0 にすることはできず，動摩擦力とつり合う大きさの外力を，水平右向きに加え続けねばならない。

4)（ｉ）十分長い時間がたってから外力を取り去る場合

金属棒の速さは，金属棒とレールの間に働く動摩擦力により次第におそくなり，外力を取り去って長い時間がたつと，金属棒は静止する。

（ⅱ）短い時間の間に外力を取り去る場合

摩擦のない場合に比べて，金属棒の速さは速やかに減少し，十分長い時間がたつと，金属棒は静止する。

第２問

（１）（ア）　観測装置Ｐの位置を原点とし，反射体Ｒの運動方向(右向き)に座標軸xを取る。この座標で，反射体Ｒの位置をx_R，時刻$t=0$に音源Ｓを発して右方向に進む音波の波面の位置をx_Sとすると，時刻tでは，それぞれ$x_\mathrm{R}=2L+vt$，$x_\mathrm{S}=L+Vt$となる。$t=t_1$のとき，$x_\mathrm{R}=x_\mathrm{S}$であるから，

$$2L+vt_1=L+Vt_1 \quad \therefore \quad t_1=\frac{L}{V-v}$$

となる。

（イ）　$t=T_0$に音源Ｓが発した音の波面が反射体Ｒに追いつく位置を考えて，

$$2L+vt_2=L+V(t_2-T_0)$$

$$\therefore \quad t_2=\frac{L+VT_0}{V-v}=\frac{1}{V-v}\left(L+\frac{V}{f_0}\right)$$

となる。

（ウ）　反射体が受け取る音波の周期T_1は，

$$T_1=t_2-t_1=\frac{1}{V-v}\left(L+\frac{V}{f_0}\right)-\frac{L}{V-v}=\frac{V}{V-v}\frac{1}{f_0}$$

一周期にあたる時間T_1の逆数が振動数となり，

$$f_1=\frac{1}{T_1}=\frac{V-v}{V}f_0$$

となる。

（エ）　$L+Vt_1$の位置から原点まで戻るのに要する時間$\dfrac{L+Vt_1}{V}$を時刻t_1に加えると，

$$t_3=t_1+\frac{L+Vt_1}{V}=2t_1+\frac{L}{V}=\frac{(3V-v)L}{(V-v)V}$$

となる。

（オ）　波面が反射体に追いついた時刻t_2に，その位置$L+V(t_2-T_0)$から原点まで戻るのに要する時間$\dfrac{L+V(t_2-T_0)}{V}$を加えると，

$$t_4=t_2+\frac{L+V(t_2-T_0)}{V}=2t_2+\frac{L}{V}-T_0$$

となる。よって反射音の一周期$T_2=t_4-t_3$は，

$$\therefore \quad T_2=\left(2t_2+\frac{L}{V}-T_0\right)-\left(2t_1+\frac{L}{V}\right)$$

$$=2(t_2-t_1)-T_0=\frac{2V}{V-v}T_0-T_0=\frac{V+v}{V-v}T_0$$

$$=\frac{V+v}{(V-v)f_0}$$

で与えられる。

（カ）　一周期 T_2 の逆数が振動数となるので，

$$f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{V - v}{V + v} f_0$$

となる。

（２）１）　観測装置Ｐに直接入る音にはドップラー効果はなく，$t = \dfrac{L}{V} = t_0$ より，音源Ｓと同じ時間間隔で音が聞こえる時間 $(5t_0)$ と音が消える時間 $(3t_0)$ が繰返される。ここに，反射体Ｒから反射してきた反射音が入って来る。図３から，$t_3 = 3.5t_0$ より，

$$(t_3 =) \frac{3V - v}{V - v} t_0 = \frac{7}{2} t_0$$

これを解いて，

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{5}$$

と求まる。または，反射音だけが聞こえている時間帯に着目して，

$$\frac{V - v}{V + v} f_0 = \frac{2}{3} f_0$$

これを解いて，

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{5}$$

と求めることもできる。

２）　観測装置Ｐが反射音を観測する周期と音源の周期との比は，（１）の（オ）の結果から，

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{V + v}{V - v} = \frac{V + \frac{1}{5}V}{V - \frac{1}{5}V} = \frac{3}{2} \quad 倍$$

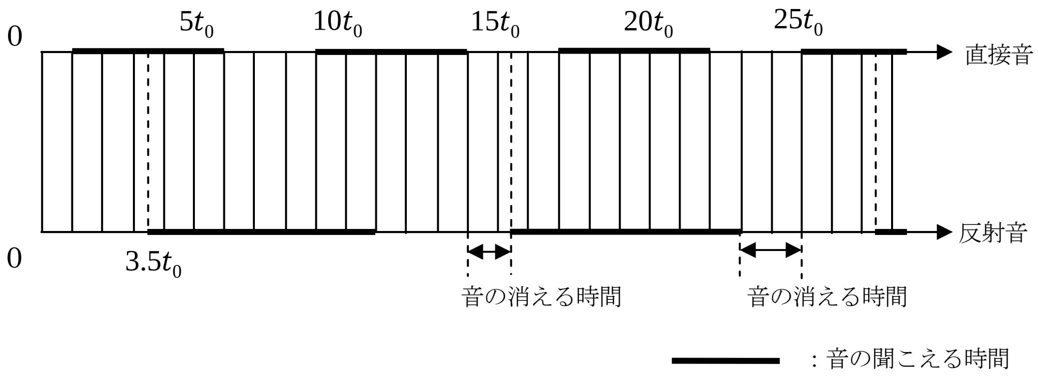
となる。したがって，反射音が聞こえる時間は，

$$5t_0 \times \frac{3}{2} = 7.5t_0$$

であり，反射音が聞こえない時間は，

$$3t_0 \times \frac{3}{2} = 4.5t_0$$

となる。以上から，観測装置Ｐに直接入る音が聞こえている時刻と，反射体Ｒで反射されて観測装置Ｐに入る反射音の聞こえている時刻は，図（ａ）のようになる。これより，初めて音が消える時刻は $t = 14t_0$ であり，このとき聞こえない時間は $1.5t_0$ となる。


0
$5t_0$
$10t_0$
$15t_0$
$20t_0$
$25t_0$
直接音
0
$3.5t_0$
反射音
音の消える時間
音の消える時間
：音の聞こえる時間

図（a）

第３問

（１）1）時刻 $t+\Delta t$ において，

$$x+\Delta x=v_0(t+\Delta t)\,,\quad y+\Delta y=h-\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2$$

と書けるから，

$$\Delta x=\underline{v_0\Delta t}\,,\quad \Delta y=-\frac{1}{2}g\{2t\Delta t+(\Delta t)^2\}\fallingdotseq\underline{-gt\Delta t}$$

2）$v_x=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\underline{v_0}$，$v_y=\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\underline{-gt}$

（別解）＜微分法を用いる方法＞

$x=v_0t$ より，$v_x=\dfrac{dx}{dt}=\underline{v}$，$y=h-\dfrac{1}{2}gt^2$ より，$v_y=\dfrac{dy}{dt}=\underline{-gt}$

3）時刻 $t+\Delta t$ での速度の x，y 成分は，それぞれ，

$$v_x+\Delta v_x=v_0\,,\quad v_y+\Delta v_y=-g(t+\Delta t)$$

となるから，

$$\alpha_x=\frac{\Delta v_x}{\Delta t}=\underline{0}\,,\quad \alpha_y=\frac{\Delta v_y}{\Delta t}=\underline{-g}$$

（別解）＜微分法を用いる方法＞

$v_x=v_0$ より，$\alpha_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\underline{0}$，$v_y=-gt$ より，$\alpha_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\underline{-g}$

4）x 軸方向：力は働かず，衛星は一定の速さで運動する。
y 軸方向：負方向(鉛直下方)へ一定の重力が働き，一定の加速度で運動をする。
その結果，衛星は<u>放物線の軌道を描いて降下する</u>。実際，

$$x=v_0t\,,\quad y=h-\frac{1}{2}gt^2$$

より t を消去すると，

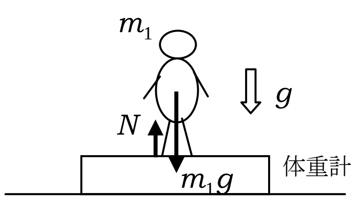
$$y=h-\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

となり，衛星の軌道は，点 $\mathrm{P}(0,h)$ を頂点とした上に凸な放物線であることがわかる。

（２）（解法１）＜地上に固定された座標系から見る場合＞

体重計に乗った人には，$-y$ 方向(鉛直下方)へ大きさ m_1g の重力と，体重計から $+y$ 方向へ大きさ N の垂直抗力がはたらくから(図ａ)，人の運動方程式は，

$$m_1\alpha_y=N-m_1g$$



図ａ

ここで，$\alpha_y=-g$ を代入すると，

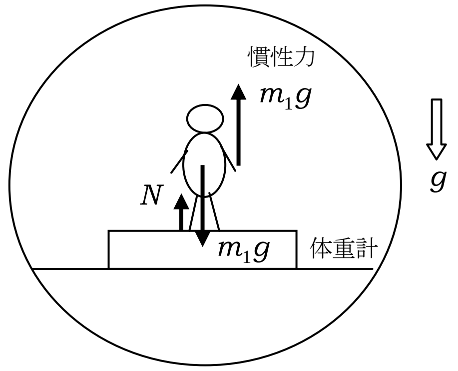
$$m_1(-g)=N-m_1g\qquad\therefore\quad N=0$$

（解法２）＜衛星に固定された座標系から見る場合＞

体重計に乗った人には，$-y$ 方向(鉛直下方)へ大きさ m_1g の重力と，体重計から $+y$ 方向へ大きさ N の垂直抗力の他，衛星が $-y$ 方向へ大きさ g の加速度運動をしているから，$+y$ 方向へ大きさ m_1g の慣性力がはたらく(図ｂ)。人は静止しているので，力のつり合いが成り立つから，

$$N + m_1 g - m_1 g = 0$$

$$\therefore \quad N = 0$$



図ｂ

（３）（定性的説明）

＜降下を始めた近くの時間帯＞

衛星の速度の x 成分は v_0 からあまり変化していないと考えられるから，衛星に働く摩擦力の x 成分は，負で v_0 に比例する。よって，加速度の x 成分も負で v_0 に比例し，速度のx成分は空気抵抗のない場合に比べて $v_0 t$ に，すなわち，時間tに比例した分だけ減少する。

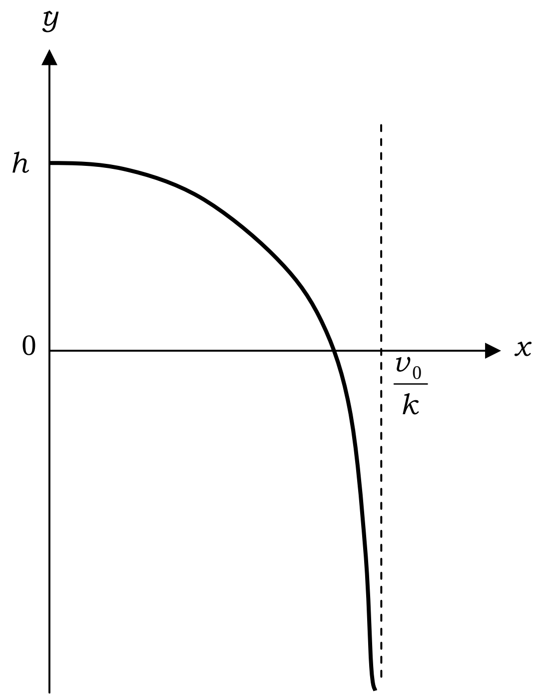
速度の y 成分は，$-gt$ からあまり変化していないと考えられるから，加速度の y 成分は，gt に比例する。よって，

速度のy成分の大きさは，空気抵抗のない場合に比べて，t^2に比例した分だけ減少する。

＜十分長い時間経った後の時間帯＞

速度の x 成分が正であるかぎり，空気抵抗が x 軸負方向へ働くから，十分長い時間たつと速度のx成分は0となる。

衛星に働く空気抵抗の y 成分は y 軸正の向き(鉛直上向き)で，その大きさは y 成分の大きさに比例するが，y 軸負の向き(鉛直下向き)の重力の大きさは一定である。よって，十分長い時間が経ち，速度の y 成分の大きさが大きくなると，重力と空気抵抗がつり合い，速度のy成分は一定値になる。



図ｃ

すなわち，衛星は，一定の速さでy軸負の向き(鉛直下向き)に下降する。このとき，衛星は図 c のような軌道を描いて降下する。

(定量的説明)

人工衛星の速さがvのとき，衛星にはたらく空気抵抗力の大きさをmkv（k：比例定数)，速度とx軸のなす角をθとする。時刻tにおける衛星の速度を(v_x, v_y)として，衛星の運動方程式の$x-$，$y-$成分は(図 d)，それぞれ，

$$m\frac{dv_x}{dt} = -mkv\cos\theta = -mkv_x \qquad \cdots①$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mkv\sin\theta - mg$$

$$= -m(kv_y + g) \qquad \cdots②$$

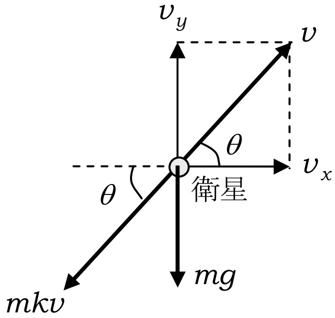


図 d

＜運動方程式の摂動論的解法＞

衛星が降下を始めた近くの時間帯では，空気抵抗の影響は小さいと考えられる。そこではじめに，空気抵抗がないとしたときの運動方程式の解を①，②式の右辺へ代入して衛星の速度を求めてみよう。このように，はじめ影響の小さい項を無視して解を求め，その解を用いて順次小さい項の影響を考慮する近似法を「摂動論」という。上に述べた定性的説明は，このような摂動論的説明である。ここでは，運動方程式①，②を用いて具体的に計算してみよう。

空気抵抗がない($k=0$)とき，初期条件「$t=0$のとき，$v_x=v_0$，$v_y=0$」より，①，②式から，

$$v_x = v_0, \quad v_y = -gt$$

となる。そこで，これらを①，②式へ代入すると，

$$m\frac{dv_x}{dt} = -mkv_0 \quad \therefore \quad v_x = \underline{v_0 - kv_0 t}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -m\{k(-gt)+g\} = mg(kt-1) \quad \therefore \quad v_y = \underline{-gt + \frac{1}{2}kgt^2}$$

＜運動方程式を厳密に解く＞

運動方程式①，②は，第１問(２)の―定量的考察―で説明したものと同様に変数分離型微分方程式であり，次のように解くことができる。

①，②式の両辺を，それぞれv_xおよび$v_y + \dfrac{g}{k}$でわってtで積分すると，C_1，C_2を積分定数として，

$$\log v_x = -kt + C_1$$

$$\log\left(v_y + \frac{g}{k}\right) = -kt + C_2$$

ここで，初期条件「$t=0$ のとき，$v_x = v_0$，$v_y = 0$」を用いて C_1，C_2 をを決めて，

$$v_x = v_0 e^{-kt} \qquad \cdots③$$

$$v_y = -\frac{g}{k}(1-e^{-kt}) \qquad \cdots④$$

を得る。

＜降下を始めた近くの時間帯＞を考えるには，kt が1に比べて十分小さい($kt << 1$)として，展開式

$$e^{-kt} = 1 - kt + (kt)^2 - \cdots$$

を用いると，

$$v_x = v_0(1-kt+\cdots)\text{，}\quad v_y = -\frac{g}{k}\{kt-(kt)^2+\cdots\} = -gt + gkt^2 - \cdots$$

となる。これより，空気抵抗のない場合(③，④式で $k=0$ として，$v_x = v_0$，$v_y = -gt$)

に比べて，v_x は $\underline{\text{時間}t\text{に比例した項だけ減少し}}$，$v_y$ (<0) の大きさは

$\underline{\text{時間}t\text{に比例した項だけ減少する}}$ことがわかる。

＜十分長く経った後の時間帯＞では，③，④式で $kt \to \infty$ として，

$$v_x \to 0\text{，}\quad v_y \to -\frac{g}{k}$$

となり，衛星は $\underline{y\text{軸負の向きへ一定の速さ}\frac{g}{k}\text{で降下する}}$ことがわかる。

さらに，③，④式を初期条件「$t=0$ のとき，$x=0$，$y=h$」を用いて積分すると，

$$x = \frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})\text{，}\quad y = h + \frac{g}{k^2}(1-kt-e^{-kt})$$

となる。$t \to \infty$ のとき $x \to \frac{v_0}{k}$ となるから，図 c における軌道の漸近線は，$x = \frac{v_0}{k}$ であることもわかる。

（4）1）Δt を微小時間とすると，時刻 $t+\Delta t$ における座標($X+\Delta X, Y+\Delta Y$)は，与えられた展開式を用いて，

$$X + \Delta X = r_0 \cos\omega(t+\Delta t) \fallingdotseq r_0(\cos\omega t - \sin\omega t \cdot \omega\Delta t)$$
$$Y + \Delta Y = r_0 \sin\omega(t+\Delta t) \fallingdotseq r_0(\sin\omega t + \cos\omega t \cdot \omega\Delta t)$$

これより，

$$v_X = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \underline{-r_0\omega\sin\omega t}\text{，}\quad v_Y = \frac{\Delta Y}{\Delta t} = \underline{r_0\omega\cos\omega t}$$

また，

$$v=|\vec{v}|=\sqrt{v_X^2+v_Y^2}=\underline{r_0\omega}$$

さらに,

$$\vec{r}=(r_0\cos\omega t, r_0\sin\omega t)\ ,\quad \vec{v}=(-r_0\omega\sin\omega t, r_0\omega\cos\omega t)$$

より，これらの内積をとり,

$$\vec{r}\cdot\vec{v}=-r_0^2\omega\cos\omega t\sin\omega t+r_0^2\omega\sin\omega t\cos\omega t=0$$

したがって，速度ベクトル$\vec{v}$は位置ベクトル$\vec{r}$に垂直である。

(別解) ＜微分法を用いる方法＞

三角関数の微分：$\dfrac{d}{dt}\sin\omega t=\omega\cos\omega t$, $\dfrac{d}{dt}\cos\omega t=-\omega\sin\omega t$

を用いて,

$$v_X=\frac{dX}{dt}=\underline{-r_0\omega\sin\omega t}\ ,\quad v_Y=\frac{dY}{dt}=\underline{r_0\omega\cos\omega t}$$

2) 時刻$t+\Delta t$における速度$(v_X+\Delta v_X, v_Y+\Delta v_Y)$は,

$$v_X+\Delta v_X=-r_0\omega\sin\omega(t+\Delta t)\fallingdotseq -r_0\omega(\sin\omega t+\cos\omega t\cdot\omega\Delta t)$$
$$v_Y+\Delta v_Y=r_0\omega\cos\omega(t+\Delta t)\fallingdotseq r_0\omega(\cos\omega t-\sin\omega t\cdot\omega\Delta t)$$

これより,

$$\alpha_X=\frac{\Delta v_X}{\Delta t}=\underline{-r_0\omega^2\cos\omega t}\ ,\quad \alpha_Y=\frac{\Delta v_Y}{\Delta t}=\underline{-r_0\omega^2\sin\omega t}$$

ここで，$v=r_0\omega$を用いて,

$$\alpha=|\vec{\alpha}|=\sqrt{\alpha_X^2+\alpha_Y^2}=r_0\omega^2=\underline{\frac{v^2}{r_0}}$$

$$\vec{\alpha}=(\alpha_X,\alpha_Y)=-\omega^2(r_0\cos\omega t, r_0\sin\omega t)=-\omega^2\vec{r}$$

よって，$\vec{\alpha}$の向きは<u>地球の中心 O の向き</u>。

(別解) 三角関数の微分を用いて，$\alpha_X=\dfrac{dv_X}{dt}$, $\alpha_Y=\dfrac{dv_Y}{dt}$を計算してもよい。

（5）1) 地表面で衛星にはたらく重力は,

$$G\frac{Mm}{R^2}=mg\quad\therefore\quad GM=gR^2 \qquad \cdots⑤$$

衛星の円運動の中心方向の運動方程式は，⑤式を用いて,

$$m\frac{v^2}{R+h}=G\frac{Mm}{(R+h)^2}\quad\therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}=\underline{R\sqrt{\frac{g}{R+h}}} \qquad \cdots⑥$$

2) 周期がTの衛星の円運動の運動方程式は，角速度が$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$であるから,

$$m(R+h)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{GMm}{(R+h)^2}\quad\therefore\quad R+h=\sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}$$

ここで，$T = 24$〔時間〕$= 24 \times 60 \times 60 = 8.64 \times 10^4$〔s〕，$g = 9.8$〔$\mathrm{m/s^2}$〕，$R = 6.4 \times 10^6$〔m〕を代入して，静止衛星の高度$h$は,

$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R = 4.23 \times 10^7 - 6.4 \times 10^6 = 3.59 \times 10^7 \fallingdotseq \underline{3.6 \times 10^7\text{〔m〕}}$$

衛星の速さvは，$R + h = 4.23 \times 10^7$〔m〕を⑥式へ代入して,

$$v = 3.08 \times 10^3\text{〔m/s〕} \fallingdotseq \underline{3.1\text{〔km/s〕}}$$