

## 理論第3問

### なぜ恒星は大きいのか?

恒星は熱い気体からなる球である。その中心部分で水素を核融合させてヘリウムにすることによって輝いている。この問題においては、古典力学と量子力学の両方の概念を使うとともに静電気学と熱力学を用いて、恒星が核融合過程を実現するために十分の大きさがなければならない理由を理解し、水素の核融合反応を起こすための星の最小の質量と半径がどれほどかを導く。

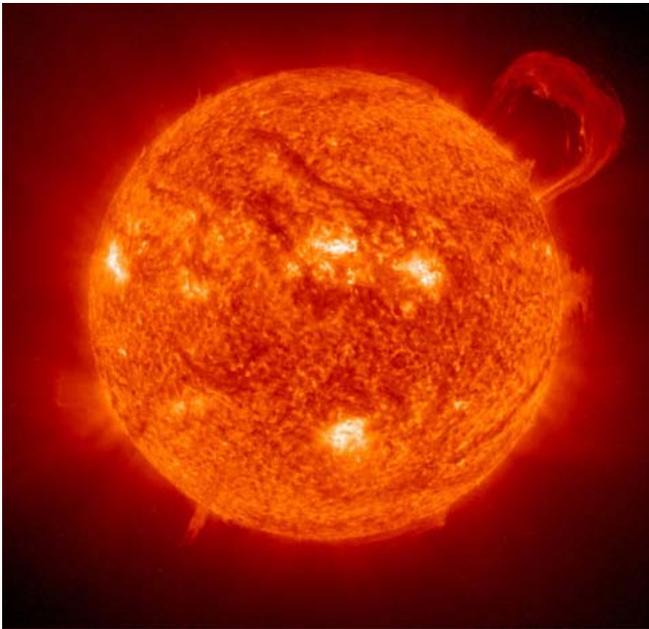


図1 大部分の星と同様に、太陽は、中心部分において水素をヘリウムに換える熱核融合反応の結果輝く。

#### 用いることができる物理定数

万有引力定数  $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

ボルツマン定数  $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

プランク定数  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$

陽子の質量  $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$

電子の質量  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

電気素量  $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

真空の誘電率  $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

太陽半径  $R_s = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$

太陽質量  $M_s = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$

## 1. 恒星の中心における温度の古典論による評価

恒星を形成する気体は完全にイオン化した水素（すなわち、電子と陽子が同数）であり、理想気体のようにふるまうと仮定しよう。古典力学の視点から、2つの陽子を融合させるには、引力である短距離の核力が効いてくるために  $10^{-15} \text{ m}$  くらいまで近づかねばならない。しかしながら、そこまで近づくためにはまずクーロン力による反発を乗り越えなければならない。古典論的に考えることにして、点電荷とみなせる2個の陽子が速度  $v_{rms}$  で反対方向に運動して、1次元的に正面衝突すると仮定しよう。ここで、 $v_{rms}$  は陽子の2乗平均速度である。

1a	2つの陽子の間の最小の距離 $d_c$ が $10^{-15} \text{ m}$ となるときの気体の温度 $T_c$ は絶対温度で何度であるべきか答えよ。この温度の表式を記した上で、数値を有効数字2桁の精度で求めよ。	1.5
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

## 2. 前問で求めた温度の評価が誤りであることを示す

前問で求めた温度が正しいかどうかを検証するためには、恒星の中心の温度を評価する別の独立の方法が必要である。星の構造は、大変複雑であるが、いくつかの仮定をすることによって有効な理解をすることができる。星は平衡状態にあるとする。すなわち、内に向かう重力と外に向かう圧力が釣り合っている(図2参照)。星の中心から距離  $r$  と  $r + \Delta r$  にはさまれる薄皮をなす気体部分に対して、静止圧の平衡条件は、

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2},$$

ここで  $P$  は気体の圧力、 $G$  は万有引力定数、 $M_r$  は半径  $r$  の球内にある星の部分の質量、 $\rho_r$  はこの薄皮部分における気体の密度である。

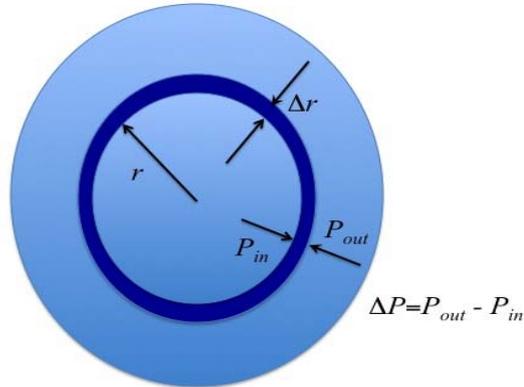


図 2. 恒星は圧力差と重力がつり合っている静止圧平衡にある。

星の中心温度のオーダーの評価は、以下のような近似をして、星の中心と表面におけるパラメータの値から得られる。

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

ここで  $P_c$  と  $P_o$  は、それぞれ中心と表面における圧力である。  $P_c \gg P_o$  であるから

$$\Delta P \approx -P_c.$$

と仮定することができる。すると、同様の大雑把な近似として、

$$\Delta r \approx R,$$

と書くことができる。ここで、  $R$  は星の半径である。また

$$M_r \approx M_R = M,$$

と書くことができる。ここで  $M$  は星の全質量である。密度は中心における値で近似する。

$$\rho_r \approx \rho_c$$

圧力は理想気体の圧力であると仮定することができる。

2a	中心における温度 $T_c$ を、星の半径 $R$ と質量 $M$ と冒頭の物理定数だけをを用いた表式を書け。	0.5
----	---------------------------------------------------------	-----

このモデルが正当であるかどうかは、次に挙げる予想から、判定できる。

2b	(2a) で得られた式を用いて予想される、星の $M/R$ の比を、物理定数と $T_c$ だけを用いて書け。	0.5
2c	(1a) で導かれた $T_c$ の値を用いて予想される、星の比 $M/R$ の数値を有効数字 2 桁の精度で求めよ。	0.5
2d	比 $M(\text{Sun})/R(\text{Sun})$ を有効数字 2 桁の精度で計算し、その値が(2c) で得られた値よりも非常に小さいことを示せ。	0.5

### 3. 恒星の中心における温度の量子力学的評価

(2d) で得られた  $M/R$  の大きな相違から、(1a) で得られた  $T_c$  の古典力学的評価は正しくないことが示唆される。この相違は、量子力学的効果を考えれば説明される。量子力学によれば、陽子は波動性を持ち、1 個の陽子はド・ブROI波長  $\lambda_p$  の大きさでぼやけた存在となる。したがって、陽子間の最近接距離  $d_c$  が  $\lambda_p$  と同じ大きさになると、陽子は量子力学の意味で重なり合い核融合を起こすことが可能になる。

3a	2 乗平均速度 $v_{rms}$ を持つ陽子に対し、 $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ が核融合が起こるための条件であると仮定して、冒頭の物理定数のみを用いて、 $T_c$ の表式を求めよ。	1.0
3b	(3a) で得られた $T_c$ の数値を有効数字 2 桁の精度で求めよ。	0.5
3c	(3b) で導かれた $T_c$ の値を用い、(2b) で導かれた公式を用いて、予想される星の $M/R$ の数値を有効数字 2 桁の精度で求めよ。この値が、 $M(\text{Sun})/R(\text{Sun})$ の観測値に極めて近いことを確かめよ。	0.5

確かに、いわゆる「主系列」に属する星（水素の核融合をおこなっている恒星）は質量の広い領域においてこの比に従っている。

#### 4. 恒星の質量／半径比

前記に見た理論と観測の一致から、太陽の中心における温度を量子力学的に評価することは正しいことが分かる。

4a	水素の核融合を起こしている星はすべて質量 $M$ と半径 $R$ の比が同じであり、物理定数にのみ依存していることを示すために、前問で得た結果を用いよ。実際に、水素の核融合を行っている星に対して、 $M/R$ の表式を求めよ。	0.5
----	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

#### 5. 最小の恒星の質量と半径

4a の結果から、そのような関係を充たせば、いかなる質量の星も実在できることになるが、これは事実ではない。ここでは一般的な、水素で構成される星について取り扱う。通常恒星内の核融合する水素ガスはほとんど理想気体として振舞うことが知られている。これは、典型的電子間距離  $d_e$  が平均して電子のド・ブロイ波長  $\lambda_e$  よりも長いことを意味する。もし近くなれば、電子はいわゆる取り込まれた状態となり、その星は異なるふるまいをする。星内部の陽子と電子を扱う時の区別に注意せよ。陽子については、陽子が星内で核融合するためには、そのド・ブロイ波は密に重なっており、一方、電子について、電子を理想気体と近似するためには、そのド・ブロイ波は重なってはならない。

星の密度は半径が増大するに従い、減少する。それにもかかわらず、大雑把な試算では星の密度は一定であるとしている。以下では、 $m_p \gg m_e$  と扱ってよい。

5a	星内部での単位体積当たりの平均的電子数 $n_e$ を求める式を表せ。	0.5
----	-------------------------------------	-----

5b	上記式より星内部での平均的電子間距離 $d_e$ を示す式を表せ。	0.5
----	-----------------------------------	-----

5c	$d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ の条件を用いて、通常星について、これまでの式を用いて最小の半径を求める式を表せ。ここで星の典型的温度は、星中心における温度とせよ。	1.5
----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

5d	上記最小半径の式を有効数字2桁の精度で数値計算し、単位としてメートルと太陽半径の何倍であるかの両方で答えよ。	0.5
----	--------------------------------------------------------	-----

5e	上記半径を用いて、通常の星の最小質量を有効数字2桁の精度で kg 単位と太陽質量の何倍であるかの両方で答えよ。	0.5
----	---------------------------------------------------------	-----

## 6. 老いた恒星内のヘリウムの核融合

恒星が時間を経ると、星内部コアの核融合した水素の大部分はヘリウム (He) になり、それらの星はさらにヘリウムを融合させ、より重い元素へと変わり、輝き続ける。ヘリウム原子核は二つの陽子と二つの中性子を持つ。そのため、ヘリウム原子核は陽子に対して、電荷が 2 倍、質量は約 4 倍である。これまで、われわれは  $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$  という条件で陽子が核融合することを参考にせよ。

6a	ヘリウム原子核の平衡条件を決め、ヘリウムの 2 乗平均速度 $v_{rms}(He)$ 、ヘリウムが核融合するために必要な最低の温度 $T(He)$ を有効数字 2 桁の精度で求めよ。	0.5
----	----------------------------------------------------------------------------------------------	-----