解答

理論問題 No.3

なぜ星は大きいか？

1　まず、星の中心における温度の古典力学的評価

1a(1.5)

2 個の陽子が持つ運動エネルギーの和が、最接近した時の静電エネルギーに等しいので、

$$2\left(\frac{1}{2}m_p v_{rms}^2\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c} \tag{1}$$

また、陽子は理想気体のように振る舞うと仮定しているので、

$$\frac{3}{2}kT_c = \frac{1}{2}m_p v_{rms}^2 \tag{2}$$

よって両式から v_{rms} を消去して次式を得る。

$$T_c = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 d_c k} = 5.5 \times 10^9\,\mathrm{K} \tag{3}$$

2　前問の温度の評価が誤りであることを見つけること

2a(0.5)

与式 $\Delta P/\Delta r = -GM_r\rho_r/r^2$ と、与えられた近似より、次式を得る。

$$P_c = \frac{GM\rho_c}{R} \tag{4}$$

次に、星の中心部で理想気体の状態方程式から P_c を求める。体積 V 中に含まれる陽子数を N_p とすると、ボルツマン係数 k を用いて次のように書ける。

$$P_c = \frac{2N_p kT_c}{V} \tag{5}$$

ただし、同数の陽子と電子が圧力に対して同等に寄与しているため、係数 2 がつく。電子の質量を無視しているので、一陽子当たりの体積 $V/N_p = m_p/\rho_c$ であるから、

$$P_c = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p} \tag{6}$$

P_c の 2 表式 (4)(6) から、次の T_c の表式を得る。

$$T_c = \frac{GMm_p}{2kR} \tag{7}$$

2b(0.5)

2a の結果 (7) より、次式を得る。

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} \tag{8}$$

2c(0.5)

2b の結果 (8) に、定数の値と 1a の結果 (3) を代入して、次の値を得る。

$$\frac{M}{R} = \frac{2 \times 1.4 \times 10^{-23} \times 5.5 \times 10^9}{6.7 \times 10^{-11} \times 1.7 \times 10^{-27}}\,\mathrm{kg/m} = 1.4 \times 10^{24}\,\mathrm{kg/m} \tag{9}$$

2d(0.5)

与えられた太陽の質量と半径から、次の値を得る。

$$\frac{M(Sun)}{R(Sun)} = \frac{2.0 \times 10^{30}}{7.0 \times 10^8}\,\mathrm{kg/m} = 2.9 \times 10^{21}\,\mathrm{kg/m} \tag{10}$$

この値は 2c の結果より 3 桁小さい。

3　星の中心における温度の量子力学的評価

3a(1.0)

ド・ブロイ波長 λ_p は、次式で与えられる。

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}} \tag{11}$$

これと、(2) 式 $3kT_c/2 = m_p v_{rms}^2/2$、(3) 式 $T_c = q^2/12\pi\varepsilon_0 d_c k$、および $d_c = \lambda_p/2^(1/2)$ から、次式を得る。

$$T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2\varepsilon_0^2 k h^2} \tag{12}$$

3b(0.5)

3a の結果 (12) に、与えられた定数の値を代入して、次の値を得る。

$$T_c = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^4 \times 1.7 \times 10^{-27}}{24 \times 3.14^2 \times (8.9 \times 10^{-12})^2 \times 1.4 \times 10^{-23} \times (6.6 \times 10^{-34})^2}\,\mathrm{K} = 9.7 \times 10^6\,\mathrm{K} \tag{13}$$

3c(0.5)

2b の結果 (8) に、定数の値と 3b の結果 (13) を代入して、次の値を得る。

$$\frac{M}{R} = \frac{2 \times 1.4 \times 10^{-23} \times 9.7 \times 10^6}{6.7 \times 10^{-11} \times 1.7 \times 10^{-27}}\,\mathrm{kg/m} = 2.4 \times 10^{21}\,\mathrm{kg/m} \tag{14}$$

これは 2b で得た $M(Sun)/R(Sun)$ の観測値 $2.9 \times 10^{21}\,\mathrm{kg/m}$ に極めて近い。

4　星の質量/半径の比

4a(0.5)

(8) 式 $M/R = 2kT_c/Gm_p$ に、(12) 式 $T_c = q^4 m_p/24\pi^2\varepsilon_0^2 Gh^2$ を代入して、次式を得る。

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 Gh^2} \tag{15}$$

5　最小の星の半径/質量の比

5a(0.5)

星内部での単位体積当たりの陽子数を n_p とすると、$n_e = n_p$ である。ここで、$m_p >> m_e$ より電子の質量を無視すると、次式を得る。

$$n_e = n_p = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3 m_p} \tag{16}$$

5b(0.5)

5a の結果 (16) を用いて、次式を得る。

$$d_e = n^{-1/3} = \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3 m_p}\right)^{-1/3} \tag{17}$$

5c(1.5)

電子のド・ブロイ波長 $\lambda_e = h/m_e v_{rms}(electron)$、運動エネルギー $3kT_c/2 = m_e v_{rms}^2(electron)/2$、(12) 式 $T_c = q^4 m_p/24\pi^2\varepsilon_0^2 kh^2$、(15) 式 $M/R = q^4/12\pi^2\varepsilon_0^2 Gh^2$、(17) 式 $d_e = \left(3M/4\pi R^3 m_p\right)^{-1/3}$ を、$d_e \geq \lambda_e/2^{1/2}$ に代入して R について整理すると、次式を得る。

$$R \geq \frac{\varepsilon_0^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}} \tag{18}$$

5d(0.5)

5c の結果 (18) に、定数の値を代入して、次式を得る。

$$R \geq 6.9 \times 10^7\,\mathrm{m} = 0.10 R(Sun) \tag{19}$$

5e(0.5)

3c の結果 (14)$M/R = 2.4 \times 10^{21}\,\mathrm{kg/m}$ と 5d の結果 (18) より、

$$M \geq 1.7 \times 10^{29}\,\mathrm{kg} = 0.09 M(Sun) \tag{20}$$

6　古い星におけるヘリウム核の融合

6a(0.5)

エネルギーの保存則より、$d_c = 4q^2/4\pi\varepsilon_0 m_{He} v_{rms}^2(He)$ が得られる。これと陽子のド・ブロイ波長を $d_c = \lambda_p/2^{1/2}$ に代入して、次式を得る。

$$\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 m_{He} v_{rms}^2(He)} = \frac{h}{2^{1/2} m_{He} v_{rms}(He)} \tag{21}$$

$$v_{rms}(He) = \frac{2^{1/2} q^2}{\pi\varepsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6\,\mathrm{m/s} \tag{22}$$

また、$3kT(He)/2 = m_{He} v_{rms}^2/2$ より、次式を得る。

$$T(He) = \frac{m_{He} v_{rms}^2}{3k} = 6.5 \times 10^8\,\mathrm{K} \tag{23}$$