第 1 問.　金属球による鏡像

導入 – 鏡像法

図 1 (a)に示されているように，接地された金属球（半径 R ）の近くに点電荷 q が置かれており，その結果として金属球の表面に電荷が誘導されて現れる。なお，接地点および無限遠点の電位（静電ポテンシャル）をゼロとする。表面電荷による電場や電位をそのまま計算せずに，鏡像法と呼ばれる方法を用いて，簡単に計算を行う。鏡像法では，金属球の表面に分布した電荷による電場と電位は，金属球の内側に置かれた 1 つの点電荷 q'（虚電荷）による電場と電位として表される。

注 1）虚電荷 q' は，金属球の外側（表面を含む）の電場と電位のみを再現する。

注 2）鏡像法の原理の証明は必要としない。

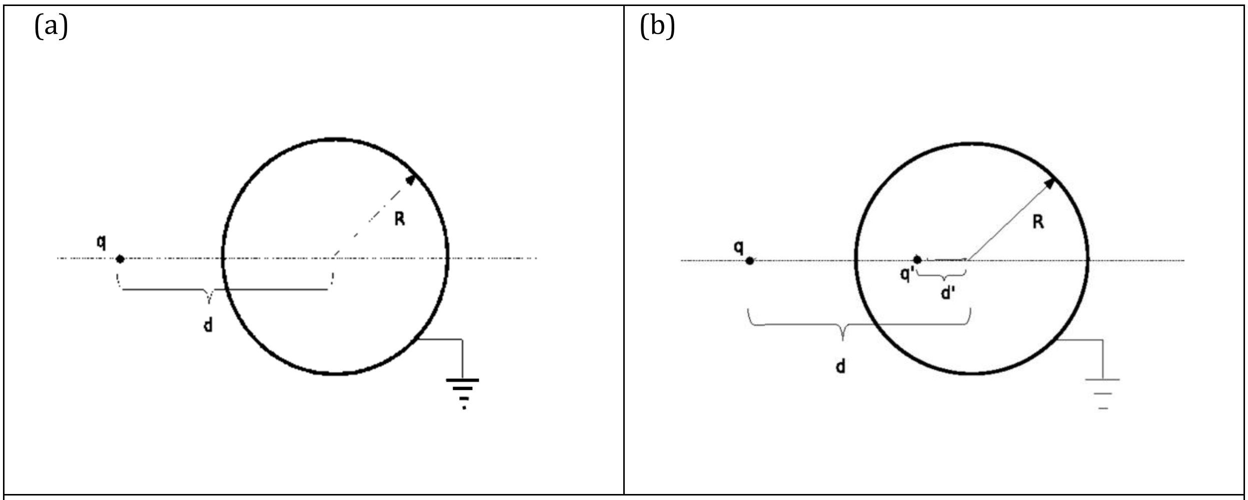

図 1 (a)　接地された金属球の近くに置かれた点電荷 q

図 1 (b)　球表面に誘導された電荷による電場は，虚電荷 q' による電場として表される。

問 1 – 鏡像法

この問題において対称性を考えると，点電荷 q' は，点電荷 q と金属球の中心を通る直線上にあることがわかる（図 1 (b)）。

a)　金属球の表面での電位の値を答えよ。 *(0.3 点)*

b)　q'，および q' の球の中心からの距離 d' を，q，d，R を用いて表せ。 *(1.9 点)*

c)　q' が q に及ぼす力の大きさを求めよ。また，この力は斥力（Yes）か，引力（No）

かを答えよ。 *(0.5 点)*

問 2 – 静電場の遮蔽（しゃへい／スクリーニング）

図 2 のように，接地された金属球（半径 R ）の中心から距離 d の位置に，点電荷 q がある。ここで，点 A は q と金属球の中心を結んだ直線上にあり，金属球の反対側にある。また，q から点 A までの距離は r である。点 A における電場として，q からの電場のみならず，金属球の表面に誘導された電荷から及ぼされる電場も考える。

a) 点 A での合成の電場ベクトルを求めよ。その際，ベクトルの正の向きを示して，その向きの単位ベクトルを用いて表せ。 *(0.6 点)*

b) r が d よりも十分大きいとき（$r >> d$），点 A での合成電場の表現を，次の近似式を用いて求めよ。a を 1 に比べて十分に小さな値（$a << 1$）としたとき，

$(1+a)^{-2} \approx 1-2a$ と近似できる。 *(0.6 点)*

c) 前問(b)の条件のもとで（(b)の結果を用いて）考える。点 A での合成電場がゼロになるためには，d をどのような値に近づければよいか。 *(0.3 点)*

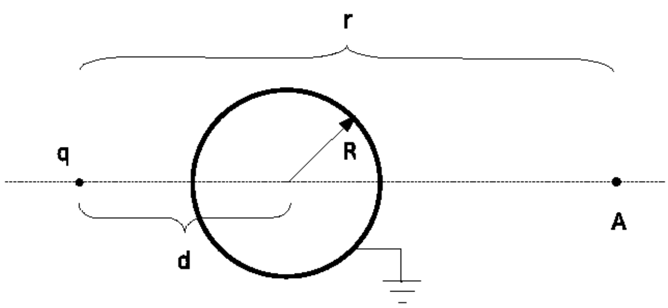

図２　点 A での電場は，接地された金属球によって遮蔽されている。

問 3 – 接地された金属球のつくる電場中での微小振動

質量 m の点電荷 q が，壁に取り付けられた細くて軽い糸（長さ L）につながれ，それが接地された金属球の近くにある。この壁の静電気的な効果は無視してよい。この点電荷の運動が単振り子となる（図 3）。糸が壁に取り付けられている点の位置は，球の中心から l の距離にある。重力の影響は無視する。

a) 与えられた角度 α の位置にある q に働く静電気力の大きさを求めよ。また，その向きを，図を描いて示せ。 *(0.8 点)*

b) この力の，糸に対して垂直方向に働く力の成分を，l，L，R，q，α を用いて表せ。 *(0.8 点)*

c) この振れ角が小さいとして，振り子の角振動数を求めよ。 *(1.0 点)*

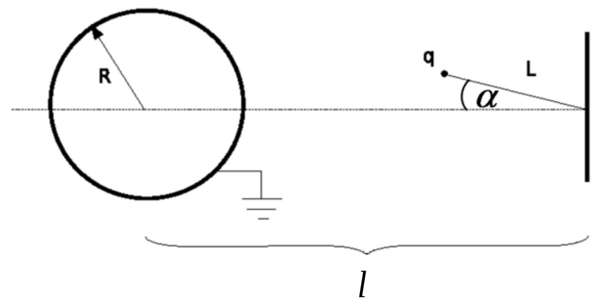

図 3 単振子として振動する，接地された金属球近くの点電荷

問 4 – 系の静電エネルギー

電荷の分布は，この系の静電エネルギーを知るために重要である。この問題（図 1(a)）を解くには，外部の点電荷 q と球の表面に誘導される電荷との間の静電エネルギー，それと誘導された電荷どうしの相互作用による静電エネルギーの 2 つを知る必要がある。電荷を q，球の半径を R，それに距離を d として，次の各静電エネルギーを求めよ。

a) 電荷 q と球の表面に誘導される電荷との間の静電エネルギー。 *(1.0 点)*

b) 金属球に誘導された電荷間の静電エネルギー。 *(1.2 点)*

c) この系の全静電エネルギー。 *(1.0 点)*

ヒント: 問 4 を解くにはいくつかの方法がある。

(1) ある方法を用いる場合，次の積分を用いてもよい。

$$\int_d^\infty \frac{x\,dx}{\left(x^2 - R^2\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{d^2 - R^2}.$$

(2) もう 1 つの方法を用いる場合，点 $\vec{r}_i$ （$i = 1, \ldots, N$）にある N 個の電荷 q_i の集合に対して，すべての対の静電エネルギーの和は，

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}.$$

と表される。