# 解答 － 第 2 問．煙突の物理

## 問 1

a） $p(z)$ を高度 $z$ における外気の圧力とする。仮定の一つ(空気の密度変化は無視)から，$p(0)$を高度 0 における外気の圧力とすると，

$$p(z) = p(0) - \rho_{Air} g z$$

煙突全体にベルヌーイの定理が成り立つから，

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke} v(z)^2 + \rho_{Smoke} g z + p_{smoke}(z) = const. \qquad (1)$$

ここで， $p_{smoke}(z)$ は高度 $z$ での煙の圧力，$\rho_{Smoke}$は密度、$v(z)$ は速度。“煙突を通る煙の密度変化は無視できる”という条件を用いた。

式(1)を次の 2 点

（ⅰ）高度 $z = -\varepsilon$（$\varepsilon$ は無視可能な正の微小量）の炉内，

（ⅱ）高度 $z = h$ の煙突の頂点，

に適用すると，

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke} v(h)^2 + \rho_{Smoke} g h + p_{smoke}(h) \approx p_{smoke}(-\varepsilon) \qquad (2)$$

右辺では，(ⅰ)において気体の速度が無視できることと $-\rho_{Smoke} g \varepsilon \approx 0$ を用いた。

煙突の頂点における煙の圧力は同じ高度における外気の圧力と等しいか，大きいかであるが，煙突が機能する最小の高さを考えているので，$p_{smoke}(h) \approx p(h)$ としてよい。また，炉内では $p_{smoke}(-\varepsilon) \approx p(0)$ と置ける。したがって，ベルヌーイの定理を炉内と煙突の頂点に用いた式(2)は次のようになる:

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke} v(h)^2 + \rho_{Smoke} g h + p(h) \approx p(0) \qquad (3)$$

よって，( $p(0) = p(h) + \rho_{Air} g h$ に注意して)

$$v(h) = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1\right)} \qquad (4)$$

煙突が十分機能するためには，燃やした煙をすべて排出しなくてはいけないから

$$v(h) \geq \frac{B}{A} \qquad (5)$$

であり，式(4), (5)から，

$$h \geq \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{2g}\frac{1}{\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1} \qquad (6)$$

仮定により，炉内の煙（気圧 $p(0)$，温度 $T_{smoke}$）は理想気体とみなすことができ，同じ温度，同じ圧

力ならば外気と同じ密度をもつから，次式が成り立つ:

$$\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} \tag{7}$$

したがって，

$$h \geq \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{2g}\frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}} = \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{2g}\frac{T_{Air}}{\Delta T} \tag{8}$$

最小の高さは等号の場合である。

b)　寒い地域で働くように設計された煙突の高さ $h(-30)$ が 100m のとき，暖かい地域の煙突の高さ $h(30)$は,

$$\frac{h(30)}{h(-30)} = \frac{\dfrac{T(30)}{T_{Smoke} - T(30)}}{\dfrac{T(-30)}{T_{Smoke} - T(-30)}} \tag{9}$$

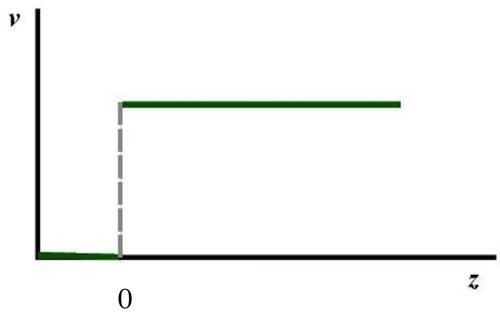
よって，

$$h(30) = 145\text{m}$$

c)　速度は一定である。

$$v = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1\right)} = \sqrt{2gh\left(\frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} - 1\right)} = \sqrt{2gh\frac{\Delta T}{T_{Air}}} \tag{10}$$

このことは，連続の式 $Av = const.$ ($\rho_{Smoke}$ は一定) が成立することから分かる。煙が炉から煙突に入るとき， $Av$ の値は，ほぼ 0 からこの一定値に突然変化する。最小の高さで稼働しているので，この一定値は $B$ に等しい。つまり，$v = \frac{B}{A}$である。




d)　式(1)で $const. \approx p_{smoke}(-\varepsilon) \approx p(0)$ であり，$(\rho_{Air} - \rho_{smoke})gh = \frac{1}{2}\rho_{smoke}v^2$ だから，高さ$z$での煙の圧力は,

$$p_{smoke}(z) = p(0) - (\rho_{Air} - \rho_{Smoke})gh - \rho_{Smoke}gz \tag{11}$$

煙の圧力は，煙が炉から煙突に入り，速度をもった時に急に変化(減少)する。

# 問２

a)　$\Delta t$ の間に放出される温かい空気(煙)の運動エネルギーは,

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(Av\Delta t\rho_{Hot})v^2 = Av\Delta t\rho_{Hot}gh\frac{\Delta T}{T_{Air}} \tag{12}$$

添字 $Hot$ は太陽によって温められた温かい空気に関するものであることを示す。単位時間に煙突から排出される温かい空気の質量を$w = Av\rho_{Hot}$とすると，上の運動エネルギーに相当する仕事率は,

$$P_{kin} = wgh\frac{\Delta T}{T_{Air}} \tag{13}$$

これが，温かい空気の流れの運動エネルギーから得られる最大の仕事率である。

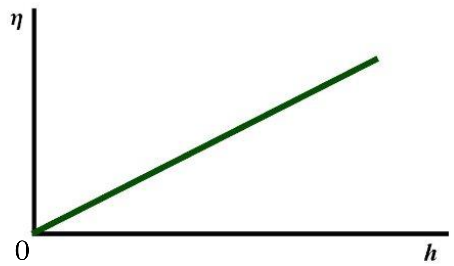
太陽エネルギーは空気を暖めるのに使われ,

$$P_{Sun} = GS = wc\Delta T \tag{14}$$

であるから，効率は,

$$\eta = \frac{P_{kin}}{P_{Sun}} = \frac{gh}{cT_{Air}} \tag{15}$$

b)　変化は明らかに線形(直線)である。




# 問３

a)　実験煙突の発電効率は,

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}} = 0.0064 = 0.64\% \tag{16}$$

b)　電力は，集熱部の直径を $D$ として,

$$P = GS\eta = G(D/2)^2\pi\eta = 45\text{kW} \tag{17}$$

c)　1 日 8 時間晴れているとして，実験煙突で 1 日に生み出されているエネルギーは,

$$45 \times 8 = 360\text{kWh}$$

# 問 4

a） 単位時間あたり煙突内に流れ込む空気の質量は,

$$w = Av\rho_{Hot} = A\sqrt{2gh\frac{\Delta T}{T_{Air}}}\rho_{\mathrm{Hot}} \tag{18}$$

また,

$$w = \frac{GS}{c\Delta T} \tag{19}$$

これらより,

$$\Delta T = \left(\frac{G^2 S^2 T_{Air}}{A^2 c^2 {\rho_{Hot}}^2 2gh}\right)^{1/3} \approx 9.1\mathrm{K} \tag{20}$$

b） 単位時間あたり流れ込む空気の質量の数値は,

$$w = \frac{GS}{c\Delta T} = 762\mathrm{kg/s} \tag{21}$$