

第 3 問. 原子核の簡単なモデル

導入

原子核は量子的物質にも関わらず、その半径や結合エネルギーなどの基本的性質を求めるための現象論的法則の多くが簡単な仮説から導かれる。

- (i) 原子核は、核子（陽子，中性子）からできている。
- (ii) これら核子を結び付けている強い相互作用は、到達距離が大変短い。すなわち、核子の近傍のみに作用する。
- (iii) 陽子の数（ Z ）は、近似的に中性子の数（ N ）と等しいと近似できる。 $Z \approx N \approx A/2$ 、 A は全核子数を示す ($A \gg 1$)。

重要：問 1～4 までは、これらの仮説を使うことにする。

問 1 - 核子がぎっしり詰まっている原子核

図 1 のような、原子核は核子がぎっしり詰まったボールとする簡単なモデルを考える。ここで、核子は半径 $r_N = 0.85 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) の硬いボールであると仮定する。核力は、2つの核子が接触しているときだけ働くとする。原子核の体積 V は、すべての核子の体積 AV_N より大きいものとする。ここで $V_N = \frac{4}{3}r_N^3\pi$ 、比 $f = AV_N/V$ は充填率と呼ばれ、核子によって満たされている空間の割合を示している。

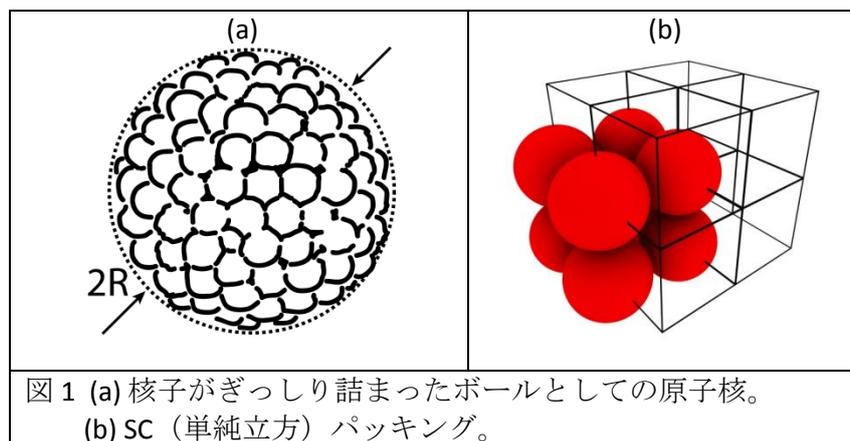


図 1 (a) 核子がぎっしり詰まったボールとしての原子核。
(b) SC (単純立方) パッキング。

- a) もし、核子が図 1 (b) に示すような「単純立方」(SC) 晶系で配置されている場合、この時の充填率 f を計算せよ。ここで、核子の中心は、無限立方格子の各格子点に位置する。 (0.3 点)

重要：次に続く問においては、充填率として問 1 a) で求めた値を用いることとする。もしあなたが、それを計算できない場合は、 $f = 1/2$ を使え。

- b) A 個の核子からなる原子核の平均質量密度 ρ_m , 電荷密度 ρ_c , 半径 R を概算で計算せよ。核子の平均質量は 1.67×10^{-27} kg である。 (1.0 点)

問 2 - 原子核の結合エネルギー：体積 - 表面積の項

原子核の結合エネルギーは、核子をバラバラに分解するために必要なエネルギーである。しかしそれは、隣り合った核子間の引力から生じている。原子核の表面にない核子の場合、全結合エネルギーに $a_v = 15.8$ MeV ($1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13}$ J) の寄与をする。表面にある核子の結合エネルギーへの寄与は、近似的に $a_v/2$ とみなすことができる。表面にある原子核の寄与を考慮に入れて、 A 個の核子からなる原子核の結合エネルギー E_b を、 A , a_v , f を用いて表せ。 (1.9 点)

問 3 - 結合エネルギーにおける静電（クーロン）効果

一様な帯電球の静電エネルギーは、帯電球の半径 R , 全電荷 Q_0 を用いて、 $U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R}$

と表される。ここで、 ϵ_0 は $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ である。

- a) この式を使って、原子核の静電エネルギーを求めよ。原子核において、各々の陽子によるクーロン力は、自分自身に作用することはなく、残りの陽子にのみ作用する。このことを考慮すると、得られた式で Z^2 を $Z(Z-1)$ で置き換えればよい。 (0.4 点)

この結果を、以下の問で用いよ。

- b) 体積項と表面積項、および、得られた静電エネルギーを含んだ形で、結合エネルギーの完全な形を書き下せ。 (0.3 点)

問 4 - 重い原子核の分裂

核分裂は、原子核がより小さな部分（軽い核）に分割する原子核反応過程である。図 2 に示しているように、 A 個の核子からなる原子核が、同じ 2 つの原子核に分裂する場合のみを考える。

- a) 2 つの原子核のそれぞれの中心が距離 $d \geq 2R(A/2)$ だけ離れる場合、核分裂により生成された原子核の全運動エネルギー E_{kin} を計算せよ。ここで、 $R(A/2)$ は分裂した原子核の半径である。また、分裂前の原子核ははじめ静止していたとする。 (1.3 点)
- b) $d = 2R(A/2)$ として、問 4 a) で得られた E_{kin} を、 $A=100, 150, 200$ そして 250 の場合について計算せよ（結果は MeV の単位で表せ）。核分裂が上述したモデルで可能となる A の最小の値を求めよ。 (1.0 点)

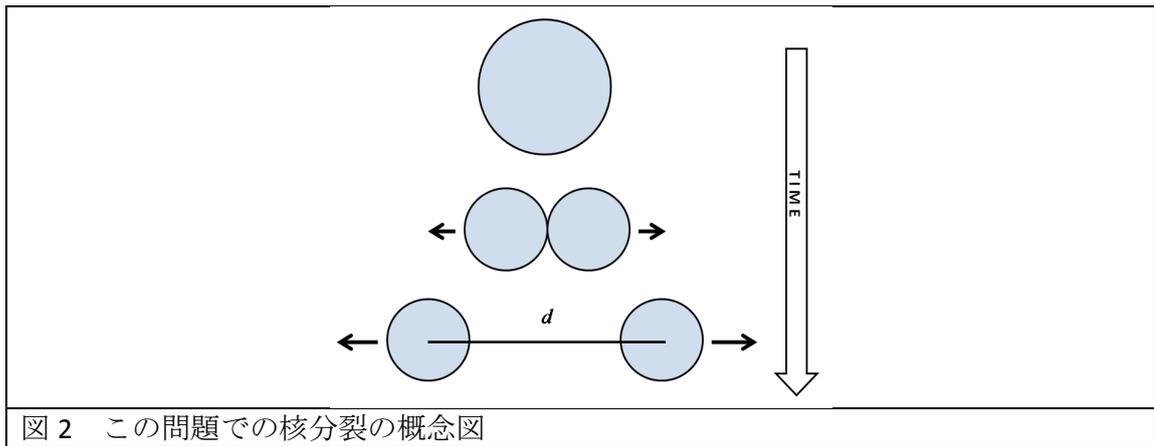


図2 この問題での核分裂の概念図

問5 – 移行反応

- a) 現代の物理学では、原子核のエネルギー論や核反応は質量を用いて記述する。例えば、基底状態よりも E_{exc} だけ高い励起状態にある原子核の質量は $m = m_0 + E_{exc}/c^2$ である。ただし、 m_0 は静止した原子核の基底状態における質量である。 $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ という核反応はいわゆる「移行反応」の例である。移行反応とはある原子核の一部(クラスターという)が他の原子核に移行する反応である(図3を見よ)。この例では移行されたクラスターは ^4He クラスター (α 粒子) である。移行反応が起こる確率が最大となるのは、入射粒子(この例では ^{16}O) の速度と入射粒子由来の生成粒子(この例では ^{12}C) の速度が一致する(速度の大きさと向きが共に等しい)ときである。標的粒子である ^{54}Fe は、はじめ静止しており、また、反応により生成される ^{58}Ni は、より高い状態の1つに励起される。入射粒子 ^{16}O の運動エネルギーが 50 MeV であるとき、 ^{58}Ni の励起エネルギーを計算せよ。答えの単位は MeV とし、光の速さは $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。 (2.2 点)

1.	$M(^{16}\text{O})$	15.99491 a.m.u.
2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53.93962 a.m.u.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12.00000 a.m.u.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57.93535 a.m.u.

表1 基底状態でのそれぞれの原子の静止質量。 $1 \text{ a.m.u.} = 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

- b) 前問 a) で述べたように移行反応で生成された ^{58}Ni は励起状態にある。この ^{58}Ni は運動方向に光子(ガンマ線)を放出して基底状態に落ちる。この現象を ^{58}Ni が静止して見える座標系で考えて ^{58}Ni の反跳エネルギー (E_{recoil}) を計算せよ。ただし ^{58}Ni の反跳エネルギーとは、光子を放出した後の ^{58}Ni の運動エネルギーのことである。またその座標系における光子のエネルギー (E_γ) はいくらか。さらに実験室系における光子のエネルギー、すなわち ^{58}Ni の運動方向におかれた検出器で観測される光子のエネルギー (E_{detector}) を求めよ。 (1.6 点)

