物理チャレンジ 2011

第 1 問 A　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号** | 0 | | |　氏名 ____________

問 1　6 点

噴射された燃料 (質量 $m_0 - m$) はすべて速さ u_0 でロケットと逆方向に運動しているから，運動量の保存則より $mv = (m_0 - m)u_0$ が成り立つ。したがって

$$v = \frac{m_0 - m}{m} u_0$$

問 2　5 点

上で求めた式に $v = at$ を代入して

$$mat = (m_0 - m)u_0$$

m について解くと次式を得る。

$$m = \frac{m_0 u_0}{u_0 + at} = \frac{m_0}{1 + at/u_0}$$

$m = \boxed{\dfrac{m_0}{1 + at/u_0}}$

問 3　5 点

E は，ロケットの運動エネルギーと噴射された燃料の運動エネルギーの和に等しい。

$E = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}(m_0 - m){u_0}^2 = \dfrac{1}{2}mv(v + u_0) = \dfrac{1}{2}m_0 u_0 v = \dfrac{1}{2}m_0 u_0 at$

ここで $(m_0 - m)u_0 = mv$

あるいは $m(v + u_0) = m_0 u_0$ の関係を使った。

$E = \boxed{\dfrac{1}{2}m_0 u_0 at}$

問 4　5 点

問 1 で求めた関係式 $v = \dfrac{m_0 - m}{m} u_0$ に $m = \dfrac{m}{4}$ を代入して $v = 3u_0$

$\boxed{3}$ 倍

問 5　5 点

$E = \dfrac{1}{2}m_0 u_0 at$ に $at = 3u_0$ を代入して $E = \dfrac{3}{2}m{u_0}^2$，一方，ロケット本体の運動エネルギーは $E_\mathrm{r} = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_0}{4}(3u_0)^2 = \dfrac{9}{8}m{u_0}^2$ である。

以上から $\dfrac{E_\mathrm{r}}{E} = \dfrac{3}{4} = 0.75$ を得る。

$\dfrac{E_\mathrm{r}}{E} = \boxed{0.75}$

解答合計　　点

第 1 問 A　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号** | 0 | | |　氏名 ＿＿＿＿＿＿

問 6　7 点

時刻 $t+\Delta t$ におけるロケットの運動量と，Δt の間に噴射された燃料の運動量の和は，時刻 t におけるロケットの運動量に等しい。

$$(m+\Delta m)(v+\Delta v)+(-\Delta m)(v-u)=mv$$
$$m\Delta v+\Delta m\Delta v+u\Delta m=0$$

2 次の微小量 $\Delta m\Delta v$ を省略して $m\Delta v+u\Delta m=0$ を得る。

問 7　7 点

ロケットの運動エネルギーの増加は

$$\frac{1}{2}(m+\Delta m)(v+\Delta v)^2-\frac{1}{2}mv^2$$
$$=mv\Delta v+\frac{1}{2}m(\Delta v)^2+\frac{1}{2}v^2\Delta m+v\Delta m\Delta v+\frac{1}{2}\Delta m(\Delta v)^2$$

2 次以上の微小量 $m(\Delta v)^2$，$v\Delta m\Delta v$，$\Delta m(\Delta v)^2$ を省略して $mv\Delta v+\dfrac{1}{2}v^2\Delta m$ を得る。

この間に噴射された燃料の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}(-\Delta m)(v-u)^2$

両者を加えて

$$\Delta E=mv\Delta v+\frac{1}{2}v^2\Delta m-\frac{1}{2}\Delta m(v-u)^2=v(m\Delta v+u\Delta m)-\frac{1}{2}u^2\Delta m$$

問 6 の結果 $m\Delta v+u\Delta m=0$ を使って

$$\Delta E=-\frac{1}{2}u^2\Delta m$$

$\Delta E=$ $\boxed{-\dfrac{1}{2}u^2\Delta m}$

解答合計
点

第 1 問 A　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号** | 0 | | |　氏名 ________

問 8　5 点

問 6 の結果の式に $u = u_0$ を代入して $m\Delta v + u_0\Delta m = 0$，すなわち $\Delta m = -\dfrac{m}{u_0}\Delta v$ である。ヒントを使うと $m \propto \mathrm{e}^{(-v/u_0)}$ を得る。$v = 0$ のとき $m = m_0$ となるように比例定数を選んで次の式を得る。

$$m = m_0\,\mathrm{e}^{-v/u_0} \quad \text{または} \quad v = u_0 \log \frac{m_0}{m}$$

問 9　5 点

上で求めた式に $v = at$ を代入して

$$m = m_0\,\mathrm{e}^{-at/u_0}$$

$m =$ $\boxed{m_0\,\mathrm{e}^{-at/u_0}}$

問 10　5 点

$u = u_0$ のとき $\Delta E = -\dfrac{1}{2}{u_0}^2\Delta m$ である。したがって $E = \dfrac{1}{2}{u_0}^2(m_0 - m)$

前問の結果を代入して $E = \dfrac{1}{2}m_0{u_0}^2(1 - \mathrm{e}^{-at/u_0})$

$E =$ $\boxed{\dfrac{1}{2}m_0{u_0}^2(1 - \mathrm{e}^{-at/u_0})}$

問 11　5 点

問 8 の結果に $m = m_0/4$ を代入して $v = u_0 \log 4 = 2u_0 \log 2 \cong 1.386u_0$

$\boxed{1.39}$ 倍

問 12　5 点

$E = \dfrac{1}{2}{u_0}^2(m_0 - m)$ に $m = \dfrac{m_0}{4}$ を代入して $E = \dfrac{3}{8}m_0{u_0}^2$，ロケット本体の運動エネルギーは $E_\mathrm{r} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{m_0}{4}\,(1.386u_0)^2 = 0.2402m{u_0}^2$，以上から $\dfrac{E_\mathrm{r}}{E} \cong 0.641$ を得る。

$\dfrac{E_\mathrm{r}}{E} =$ $\boxed{0.641}$

解答合計　　点

物理チャレンジ 2011

第1問B　解答用紙　1/2　　**第2チャレンジ番号** | 0 | | |　氏名 ____________

問 1　5点

定積過程であるから $W=0$，したがって $\Delta U = Q$

$$\text{定積熱容量} = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{5}{2}nR$$

したがって定積モル比熱は $C_V = \dfrac{5}{2}R$

$C_V = \boxed{\dfrac{5}{2}R}$

問 2　5点

このとき気体になされた仕事 W は，ピストンを押す力を F とすると $W = F\Delta x$ である。ピストンの断面積を A とすると，$F = PA$ および気体の体積変化 $\Delta V = -A\Delta x$ であるから

$$W = F\Delta x = PA\Delta x = -P\Delta V$$

問 3　5点

ア-イ間，ア-ウ間の内部エネルギーの差と温度の差は等しい。これらをそれぞれ ΔU，ΔT とし，ア-イ間の体積の差を ΔV とする。ア→ウの定積過程について $\Delta U = nC_V\Delta T = \dfrac{5}{2}nR\Delta T$，ア→イの定温過程について $\Delta U = nC_P\Delta T - P\Delta V$，$P\Delta V = nR\Delta T$ である (n はモル数)。以上から

$$\frac{5}{2}nR\Delta T = nC_P\Delta T - nR\Delta T$$

したがって $C_P = \dfrac{5}{2}R + R = \dfrac{7}{2}R$

$C_P = \boxed{\dfrac{7}{2}R}$

問 4　5点

気体が外部からなされた仕事を W とすると，等温過程においては内部エネルギーは変化しないから

$$\Delta U = W + Q = 0$$

したがって $W = -Q$ である。ウ→イでは気体が外部に仕事をするから $W < 0$，したがって吸収する熱量 $Q > 0$ である。

解答合計　　点

第 1 問 B　解答用紙　2/2　**第 2 チャレンジ番号** 0　氏名 ______

問 5　5 点

ある分子が A にいる確率は $\frac{1}{2}$ である。分子間に相互作用はないから，個々の分子が A にいる事象は独立事象であるから，すべての分子 (nN_A 個) が A にいる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{nN_A}$ である。

確率 $= \boxed{\dfrac{1}{2^{nN_A}}}$

問 6　5 点

第 1 法則より等温過程において，気体が吸収する熱量 Q と気体が外部からなされた仕事 W の和は 0 である ($Q + W = 0$)。すなわち気体が放出する熱量 $-Q$ は

$$-Q = W = -\int_{2V}^{V} P \, \mathrm{d}V = -\int_{2V}^{V} \frac{nRT}{V} \mathrm{d}V = nRT \log 2$$

放出する熱量 $= \boxed{nRT \log 2}$

問 7　5 点

等温過程では $\varDelta U = 0$ であるから (8) 式より $\varDelta S = \dfrac{P\varDelta V}{T}$ が成り立つ。したがってエントロピーの変化量は

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \int_{V_1}^{V_2} P \, \mathrm{d}V = \int_{V}^{2V} \frac{nR}{V} \mathrm{d}V = nR \log 2$$

$\varDelta S = \boxed{nR \log 2}$

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　1/4　**第 2 チャレンジ番号** 0 | | 　氏名 ____________

問 1　8 点

(1) 式の両辺を t で微分すると，

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2 p}{\sqrt{m^2c^4 + p^2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

となる。右辺の $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ は (4) 式を使って粒子に働く力 F で置き換え，左辺の $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ は，(2) 式を使って，Fv で置き換える。その結果

$$v = \frac{cp}{\sqrt{m^2c^4 + p^2}}$$

が得られる。これを p について解くと，(5) 式が得られる。

問 2　8 点

非相対論的極限では $p = mv$ であるので

$$E = mc^2\left\{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2\right\}^{1/2} = mc^2\left\{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}^{1/2} \cong mc^2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}$$

したがって $E = mc^2 + \dfrac{1}{2}mv^2$ を得る。

問 3　8 点

$$m_{\mathrm{e}}c^2 = \frac{9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \times (3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s})^2}{1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}} = 5.12 \times 10^5\,\mathrm{eV}$$

電子の静止エネルギー ＝ $\boxed{5.12 \times 10^5\,\mathrm{eV}\ (= 0.512\,\mathrm{MeV})}$

問 4　8 点

$h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} > 2.0\,\mathrm{eV}$ より

$$\lambda < \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js} \times 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{2.0 \times 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 6.22 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

電磁波の波長 ≦ $\boxed{6 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}\ (= 0.7\,\mu\mathrm{m})}$

問 5　8 点

(1) 式で $m = 0$ とすると，$E = cp$ の関係を得る。この左辺に $E = h\nu$ を代入して，
p について解くと

$$p = \frac{\nu}{c}h = \frac{h}{\lambda}$$

解答合計
点

第 2 問　解答用紙　2/4　　**第 2 チャレンジ番号** 0　　氏名 ________

問 6　8 点

電子が得たエネルギーは $E - m_\mathrm{e}c^2$，光子が失ったエネルギーは $h(\nu - \nu')$，両者を等しいと置き，E について解くと

$$E = h(\nu - \nu') + m_\mathrm{e}c^2$$

これを $\nu = c/\lambda$ を使って書き直すと

$$E = ch\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) + m_\mathrm{e}c^2$$

$$E = \boxed{ch\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) + m_\mathrm{e}c^2}$$

問 7　8 点

入射波の光子の運動量を $\overrightarrow{p}_\mathrm{ph}$，散乱波の運動量を $\overrightarrow{p}'_\mathrm{ph}$ とすると，飛び出した電子の運動量 $\overrightarrow{P}$ は運動量保存則より

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{p}_\mathrm{ph} - \overrightarrow{p}'_\mathrm{ph} = \frac{h}{\lambda}\overrightarrow{n} - \frac{h}{\lambda'}\overrightarrow{n}'$$

問 8　8 点

問 7 の結果の式の 2 乗を計算し $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}' = \cos\theta$ を使うと

$$P^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta$$

また，問 6 の解答の E に (1) 式を代入して両辺の 2 乗を計算すると

$$c^2P^2 = 2hm_\mathrm{e}c^3\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) + c^2h^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2$$

以上の 2 つの式から P^2 を消去すると

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta = 2hm_\mathrm{e}c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) + h^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2$$

$$-2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta = 2hm_\mathrm{e}c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}$$

両辺に $\dfrac{\lambda\lambda'}{2hm_\mathrm{e}c}$ をかけて整理すると次の (9) 式が導かれる。

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_\mathrm{e}c}(1 - \cos\theta)$$

解答合計

点

問 9　8 点

(9) 式に $\lambda = \lambda'/2$，$\cos\theta = 1/2$ を代入して整理すると

$$\lambda = \frac{h}{2m_{\mathrm{e}}c} = \frac{6.63\times10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2\times9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\times3.00\times10^{8}\,\mathrm{m/s}} = 1.2\times10^{-12}\,\mathrm{m}$$

飛び出した電子のエネルギーは，問 6 の結果に $\lambda' = 2\lambda$ を代入して

$$\begin{aligned} E = \frac{hc}{2\lambda} + m_{\mathrm{e}}c^2 &= \frac{6.63\times10^{-34}\mathrm{Js}\times3.00\times10^{8}\mathrm{m/s}}{2\times1.2\times10^{-12}\mathrm{m}\times1.60\times10^{-19}\mathrm{J/eV}} + 5.12\times10^{5}\mathrm{eV} \\ &= 1.03\times10^{6}\mathrm{eV} \end{aligned}$$

$\lambda =$ $\boxed{1\times10^{-12}\,\mathrm{m}}$　電子のエネルギー $=$ $\boxed{1\times10^{6}\,\mathrm{eV}}$

問 10　4 点

(1) 式によると，電子および陽電子のエネルギーは $p = 0$ のとき最小値の静止エネルギーとなる。エネルギー保存則により，このエネルギーをもつ電子・陽電子対生成が起きるための光子のエネルギーはこの 2 倍，すなわち，$2m_{\mathrm{e}}c^2$ である．この値は，問 3 の結果を使って

$$2\times5.12\times10^{5}\,\mathrm{eV} = 1.02\times10^{6}\,\mathrm{eV}\,(= 1.02\,\mathrm{MeV})$$

である。

光子のエネルギー $=$ $\boxed{1\times10^{6}\,\mathrm{eV}}$

問 11　10 点

(7) 式によると $|\overrightarrow{p}_{\gamma}|^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2$

また，エネルギー保存則と電子，陽電子に関して問題文中に書かれている対称性より

$$h\nu = 2\sqrt{{m_{\mathrm{e}}}^2c^4 + c^2|\overrightarrow{p}_{\pm}|^2}$$

これを $|\overrightarrow{p}_{\pm}|^2$ について解いて $|\overrightarrow{p}_{\pm}|^2 = \left(\frac{h\nu}{2c}\right)^2 - (m_{\mathrm{e}}c)^2$

したがって，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{p}_{\gamma}|^2 - |\overrightarrow{p}_{+} + \overrightarrow{p}_{-}|^2 &= \overrightarrow{p}_{\gamma}\cdot\overrightarrow{p}_{\gamma} - (\overrightarrow{p}_{+} + \overrightarrow{p}_{-})\cdot(\overrightarrow{p}_{+} + \overrightarrow{p}_{-}) \\ &= |\overrightarrow{p}_{\gamma}|^2 - (|\overrightarrow{p}_{+}|^2 + |\overrightarrow{p}_{-}|^2 + 2|\overrightarrow{p}_{+}||\overrightarrow{p}_{-}|\cos\theta) \\ &> |\overrightarrow{p}_{\gamma}|^2 - 4|\overrightarrow{p}_{\pm}|^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 4\left\{\left(\frac{h\nu}{2c}\right)^2 - (m_{\mathrm{e}}c)^2\right\} = 4(m_{\mathrm{e}}c)^2 \end{aligned}$$

これより，

$$|\overrightarrow{p}_{\gamma}| > |\overrightarrow{p}_{+} + \overrightarrow{p}_{-}|$$

解答合計　　点

問 12　14 点

反応後の原子核の運動量を $\vec{q}$，反応前の光子の運動量を $\vec{p}_\gamma$ とすると運動量保存則から

$$|\vec{q}| = |\vec{p}_\gamma| = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \tag{13-1}$$

エネルギー保存則で原子核のエネルギーについては非相対論的極限をとると

$$h\nu = 2m_\mathrm{e}c^2 + \frac{|\vec{q}|^2}{2M} \tag{13-2}$$

以上の (13-1) 式と (13-2) 式から $|\vec{q}|$ を消去すると，$(h\nu)^2 - 2Mc^2h\nu + 4m_\mathrm{e}Mc^4 = 0$,
これを解くとエネルギーは

$$h\nu = Mc^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_\mathrm{e}}{M}}\right) \tag{13-3}$$

これを (13-1) 式の最右辺に代入すると

$$|\vec{q}| = \frac{h\nu}{c} = Mc\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_\mathrm{e}}{M}}\right) \tag{13-4}$$

(13-4) 式の運動量が全て原子核に移行すると，反応後の原子核の速さは，非相対論的極限で

$$v = c\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_\mathrm{e}}{M}}\right) \tag{13-5}$$

となる。復号で表わされる 2 つの解のうち，原子核の速さが c より小さい下の組み合わせの解のみを採用することにする．すると

$$\text{始めの光子のエネルギー：}h\nu = Mc^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m_\mathrm{e}}{M}}\right)$$

$$\text{反応後の原子核の速さ　：}v = c\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m_\mathrm{e}}{M}}\right)$$

一番軽い原子核の陽子でも $M \quad 1800m_\mathrm{e}$ だから，原子核の速さは問 2 のヒントにある近似を使うと

$$v \quad \frac{2m_\mathrm{e}}{M}c$$

と表され，光速よりはるかに小さいことが分かる．したがって，原子核のエネルギーを非相対論的極限の式を使って表したのは妥当であった。

解答合計

点

第 3 問　解答用紙　1/6　**第 2 チャレンジ番号** | 0 | | |　氏名 ＿＿＿＿＿＿

問 1　6 点

(2) 式の第 1 式を時間で微分して，右辺に (2) 式の第 2 式を使うと

$$m\frac{\mathrm{d}^2V_x}{\mathrm{d}t^2} = qB\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{q^2B^2}{m}V_x$$

したがって $\dfrac{\mathrm{d}^2V_x}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 V_x$ を得る。同様に (2) 式の第 2 式を微分して

$$m\frac{\mathrm{d}^2V_y}{\mathrm{d}t^2} = -qB\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{q^2B^2}{m}V_y$$

これより $\dfrac{\mathrm{d}^2V_y}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 V_y$ を得る。$\omega_\mathrm{c} = \dfrac{qB}{m}$ を使うと (3) 式になる。

問 2　6 点

(3) 式の第 1 式 $\dfrac{\mathrm{d}^2V_x}{\mathrm{d}t^2} = -{\omega_\mathrm{c}}^2 V_x$ より一般に

$$V_x(t) = a\sin(\omega_\mathrm{c}t) + b\cos(\omega_\mathrm{c}t) \quad (a,\, b \text{ は定数})$$

と表せる。$t = 0$ で $V_x = 0$ より $b = 0$ である。次に運動方程式より

$$V_y = \frac{m}{qB}\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{qB}a\omega_\mathrm{c}\cos(\omega_\mathrm{c}t) = a\cos(\omega_\mathrm{c}t)$$

となる。$t = 0$ で $V_y = V_\perp$ より $a = V_\perp$ である。
以上から $V_x = V_\perp \sin(\omega_\mathrm{c}t)$，$V_y = V_\perp\cos(\omega_\mathrm{c}t)$ となる。

問 3　6 点

$V_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_\perp\sin(\omega_\mathrm{c}t)$ より $x = x_0 - \dfrac{V_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\cos(\omega_\mathrm{c}t)$ (x_0 は積分定数) と表せる。初期条件 $t = 0$ で $x = -\dfrac{V_\perp}{\omega_\mathrm{c}}$ より $x_0 = 0$，すなわち $x(t) = -\dfrac{V_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\cos(\omega_\mathrm{c}t)$
同様に $V_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V_\perp\cos(\omega_\mathrm{c}t)$ より $y = y_0 + \dfrac{V_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\sin(\omega_\mathrm{c}t)$ (y_0 は積分定数)。初期条件 $t = 0$ で $y = 0$ より $y_0 = 0$，すなわち $y(t) = \dfrac{V_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\sin(\omega_\mathrm{c}t)$
以上から $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{V_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\right)^2$，すなわち半径 $\dfrac{V_\perp}{|\omega_\mathrm{c}|}$ の円軌道を描く。

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　2/6　**第 2 チャレンジ番号** 0　氏名 ____

問 4　5 点

(4) 式より

$$|\omega_c| = \frac{|q|B}{m} = \frac{1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times3\times10^{-5}\,\mathrm{T}}{9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 5.3\times10^{6}\,\mathrm{s}^{-1}$$

サイクロトロン角振動数 = $\boxed{5.3\times10^{6}\,\mathrm{rad/s}}$

問 5　6 点

$V_\perp = 3.2\times10^{7}\,\mathrm{m/s}$，$|\omega_c| = 5.3\times10^{6}\,\mathrm{rad/s}$ を代入して

$$r_c = \frac{V_\perp}{|\omega_c|} = \frac{3.2\times10^{7}\,\mathrm{m/s}}{5.3\times10^{6}\,\mathrm{rad/s}} = 6.0\,\mathrm{m}$$

地球の半径 $R = 6.4\times10^{6}\,\mathrm{m}$ との比は

$$\frac{r_c}{R} = \frac{6.0\,\mathrm{m}}{6.4\times10^{6}\,\mathrm{m}} = 9.4\times10^{-7}$$

$r_c = \boxed{6.0\,\mathrm{m}}$　$\dfrac{r_c}{\text{地球の半径}} = \boxed{9\times10^{-7}}$

問 6　6 点

運動方程式 (1) の第 1 式，第 2 式

$$m\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = q(E+BV_y),\quad m\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} = -qBV_x$$

に $V_x = U_x$，$V_y = U_y - \dfrac{E}{B}$ を代入する。$E + BV_y = BU_y$，$\dfrac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}U_y}{\mathrm{d}t}$ であるから

$$m\frac{\mathrm{d}U_x}{\mathrm{d}t} = qBU_y,\quad m\frac{\mathrm{d}U_y}{\mathrm{d}t} = -qBU_x$$

を得る。

問 7　6 点

問 2 の結果を使うと

$$U_x(t) = V_\perp\sin(\omega_c t),\quad U_y(t) = V_\perp\cos(\omega_c t)$$

である。したがって

$$V_x(t) = U_x(t) = V_\perp\sin(\omega_c t)$$
$$V_y(t) = U_y(t) - \frac{E}{B} = V_\perp\cos(\omega_c t) - \frac{E}{B}$$

$V_x(t) = \boxed{V_\perp\sin(\omega_c t)}$　$V_y(t) = \boxed{V_\perp\cos(\omega_c t) - \dfrac{E}{B}}$

解答合計　点

問 8　　12 点

前問の結果を t で積分して

$$x = x_0 - \frac{V_\perp}{\omega_c}\cos(\omega_c t), \quad y = y_0 + \frac{V_\perp}{\omega_c}\sin(\omega_c t) - \frac{E}{B}t \quad (x_0, y_0 \text{ は積分定数})$$

を得る。$t=0$ で $x = -\dfrac{V_\perp}{\omega_c}$，$y=0$ であることから $x_0 = 0$，$y_0 = 0$ である。
以上から次の結果を得る。

$$x = -\frac{V_\perp}{\omega_c}\cos(\omega_c t), \quad y = \frac{V_\perp}{\omega_c}\sin(\omega_c t) - \frac{E}{B}t$$

$$x(t) = \boxed{-\frac{V_\perp}{\omega_c}\cos(\omega_c t)} \qquad y(t) = \boxed{\frac{V_\perp}{\omega_c}\sin(\omega_c t) - \frac{E}{B}t}$$

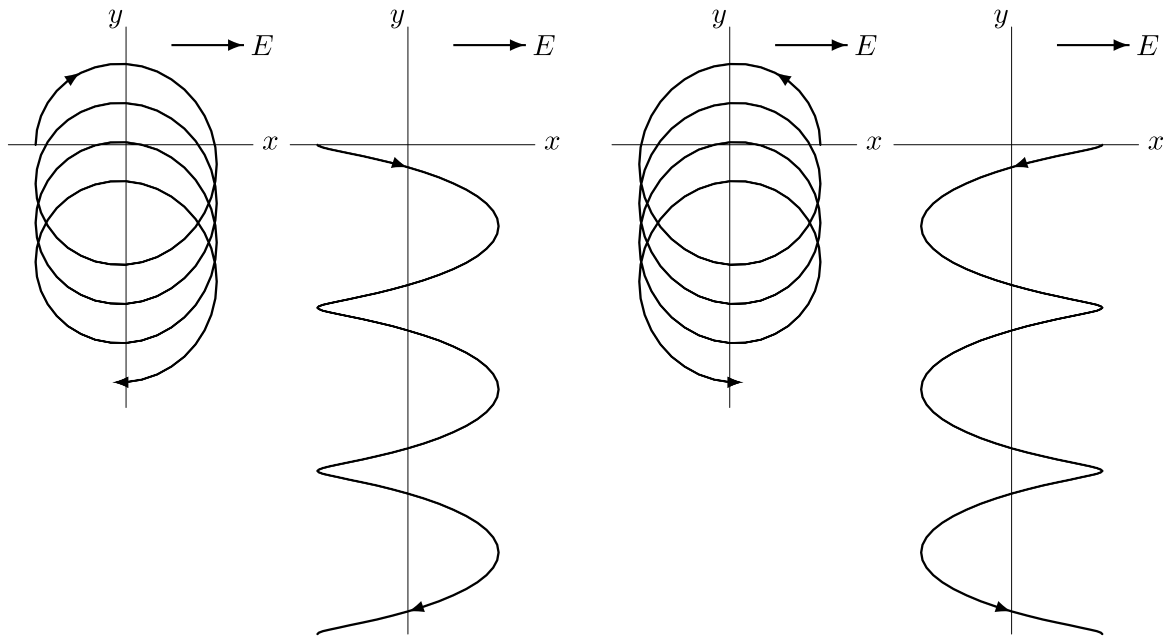
軌道の概形

$\omega_c = \dfrac{qB}{m}$ の正負は q の正負と同じである。$\omega_c < 0$ の場合には次の形に表すとわかりやすい。

$$x = \frac{V_\perp}{|\omega_c|}\cos(|\omega_c|t), \quad y = \frac{V_\perp}{|\omega_c|}\sin(|\omega_c|t) - \frac{E}{B}t$$

サイクロトロン運動の回転の向きは $q>0\,(\omega_c>0)$ の場合は時計まわり，$q<0\,(\omega_c<0)$ の場合は反時計まわりで，回転中心はいずれの場合も $-y$ 方向へ等速直線運動する。ただし $V_\perp < \dfrac{E}{B}$ のときは，つねに $V_y < 0$ となる (前問の結果参照) ので，軌道の形状はら線状にはならない。特に $V_\perp = \dfrac{E}{B}$ のときには，軌道はサイクロイド曲線になる。以下に $q>0$ と $q<0$ のそれぞれの場合に対して $V_\perp > \dfrac{E}{B}$，$V_\perp < \dfrac{E}{B}$ の場合の軌道の例を示す。

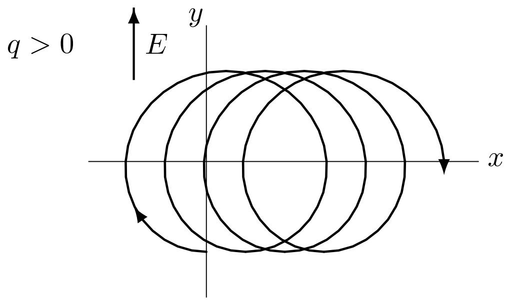
$q>0$, $V_\perp > \dfrac{E}{B}$　　$q>0$, $V_\perp < \dfrac{E}{B}$　　$q<0$, $V_\perp > \dfrac{E}{B}$　　$q<0$, $V_\perp < \dfrac{E}{B}$

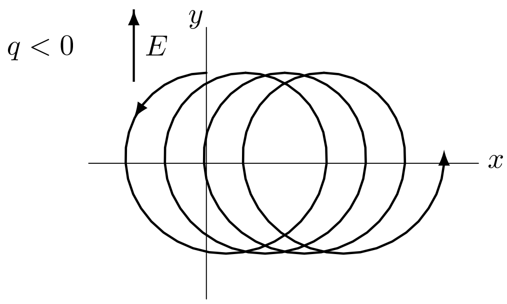


解答合計　　点

問 9　6 点

E が y 方向のときの軌道は，対称性から E が x 方向のときの軌道を z 軸の回りに反時計まわりに 90° 回転したものとなる。すなわち，サイクロトロン運動の回転の向きは E が x 方向のときと同じで，回転中心は q の正負にかかわらず x 方向へ等速直線運動する。$V_\perp > \dfrac{E}{B}$ の場合には軌道は以下のようである (もちろん $V_\perp \leqq \dfrac{E}{B}$ の場合の曲線も可)。





問 10　6 点

問 7 の結果からわかるように，$E \times B$ ドリフトの方向 (サイクロトロン運動の回転中心の移動方向) は，電場の方向から磁場の方向へ回した右ねじの進む方向である。しかも，このドリフトの速さは電荷にも質量にも依存しない。
したがって，電子とイオンからなるプラズマは全体として形状を保ったまま $E \times B$ の方向に移動する。

問 11　6 点

(7) 式，(8) 式より

$$C_1 = r_\mathrm{c} V_\perp = \frac{V_\perp}{|\omega_\mathrm{c}|} V_\perp = \frac{m}{|q|B_z} {V_\perp}^2 = \frac{m}{|q|B_z(0)} V_\perp(0)^2$$

$$C_2 = \frac{1}{2} m \left({V_z}^2 + {V_\perp}^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(V_z(0)^2 + V_\perp(0)^2 \right)$$

$C_1 = \boxed{\dfrac{m}{|q|B_z(0)} V_\perp(0)^2}$　$C_2 = \boxed{\dfrac{1}{2} m \left(V_z(0)^2 + V_\perp(0)^2 \right)}$

解答合計　点

第 3 問　解答用紙　5/6　**第 2 チャレンジ番号** 0　　氏名

問 12　6 点

問 11 の導出過程より

$$C_1 = \frac{m}{|q|B_z(z)}V_\perp(z)^2 = \frac{m}{|q|B_z(0)}V_\perp(0)^2$$

したがって

$$\frac{1}{2}mV_\perp(z)^2 = \frac{mV_\perp(0)^2}{2B_z(0)}B_z(z)$$

問 13　5 点

問 12 の結果は $\frac{1}{2}mV_\perp(z)^2 = U(z)$ と表すことができるので，(8) 式は

$$\frac{1}{2}mV_z(z)^2 + U(z) = C_2$$

となる。

問 14　6 点

問 11〜13 より

$$\frac{1}{2}mV_z(z)^2 + \frac{1}{2}mV_\perp(0)^2\frac{B_z(z)}{B_z(0)} = \frac{1}{2}V_z(0)^2 + \frac{1}{2}mV_\perp(0)^2$$

すなわち

$$V_z(z)^2 = V_z(0)^2 + V_\perp(0)^2 - V_\perp(0)^2\frac{B_z(z)}{B_z(0)}$$

荷電粒子が壁に到る前に速度の向きを変えるためには $|z| < L$ において $V_z(z)$ が 0 になればよい。このためには

$$V_z(0)^2 + V_\perp(0)^2 < V_\perp(0)^2\frac{B_z(L)}{B_z(0)} = V_\perp(0)^2 M$$

であればよい。すなわち次の条件式を得る。

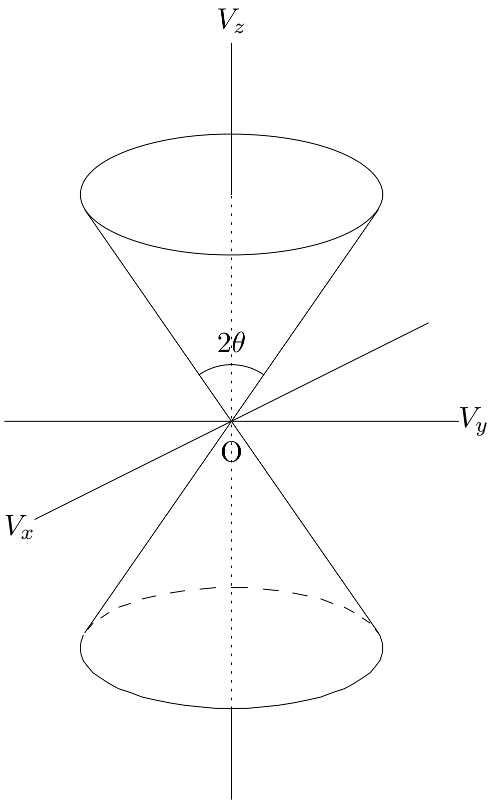
$$\left|\frac{V_z(0)}{V_\perp(0)}\right| < \sqrt{M-1}$$

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　6/6　**第 2 チャレンジ番号** 0　氏名

問 15　12 点

速度空間において $\left|\dfrac{V_z(0)}{V_\perp(0)}\right| < \sqrt{M-1}$ の領域は以下のような円錐の外側である。



ロスコーンの頂角を 2θ とすると

$$\tan\theta = \left|\frac{V_\perp(0)}{V_z(0)}\right| = \frac{1}{\sqrt{M-1}}$$

すなわち

$$M = 1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$\sin\theta =$ $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{M}}}$

解答合計　点