物理チャレンジ2011
理論問題

2011年8月1日（月）

理論問題にチャレンジ　8：30〜13：30

理論問題にチャレンジする前に下記の**<注意事項>**をよく読んでください。

問題は，大問３題からなります。問題は，一見難問にみえても，よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙，計算用紙，および電卓にも手を触れないこと。
2. 問題冊子は16ページである。解答冊子は15枚である。
3. すべての解答は，解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに，必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は，最終的な答のみではなく，解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき，または質問がある場合は手をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から200分（3時間20分）経過するまでは，原則として，途中退出はできない。200分経過（11:50）後は，退出希望者は手を挙げて監督者に知らせ，すべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は，チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上，机上に置いて退室する。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら，ただちにすべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は，チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上，机上に置いて，監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は，持ち帰ること。

第1問A（65点）

重力のない宇宙空間において，積載している燃料を燃焼させて噴射し，その反動で運動するロケットを考える。ロケットははじめ静止しており，質量は m_0 である。ロケットが直線的に飛行して，質量が m となったときの速さを v とする。また後方に噴射される燃料の，ロケットから見た相対的な速さを u とする。

[I]

燃料の速さ u が，ロケットの速さ v とともに $u = v + u_0$ と制御できるとしよう。ここで u_0 はロケットが静止しているときの燃料噴射の速さである。すると，噴射された燃料はすべて，ロケットの運動方向とは反対方向に，宇宙空間を一定の速さ u_0 で運動することになる。この場合にはロケットの運動は簡単に解析できる。以下の問に答えよ。

問1　ロケットの速さ v と質量 m の関係を求めよ。

問2　ロケットを一定の加速度 a で運動させるとしよう。ロケットが運動を始めてからの時間を t とするとロケットの速さは $v = at$ である。時刻 t におけるロケットの質量 m を求めよ。

問3　ロケットが等加速度で運動を始めてから時間 t の間に燃料を燃やして得たエネルギー E を求めよ。ただしこのエネルギーはすべて運動する物体 (噴射燃料とロケット) の運動エネルギーになったとする。

問4　ロケットの質量がはじめの $\dfrac{1}{4}$ になったときのロケットの速さは u_0 の何倍か。

問5　ロケットの質量がはじめの $\dfrac{1}{4}$ になったときのロケットの運動エネルギーを E_{r} とする $\left(E_{\mathrm{r}} = \dfrac{1}{2}mv^2 \right)$。この間に燃料から得たエネルギー E に対する E_{r} の比の値 $\dfrac{E_{\mathrm{r}}}{E}$ を求めよ。

[II]

一般的なロケットの運動を考えよう。ある瞬間 t にロケットの質量が m，速さが v であるとする (図1)。微小時間 Δt の間に，ロケットの質量が $m + \Delta m$ になり，ロケットの速さが $v + \Delta v$ になったとする。ここで，微小な変化量は増分を正としているので，ロケットから見て相対的に速さ u で噴射された燃料の質量は $-\Delta m$ と表されることに注意されたい (図2)。以下に答えよ。

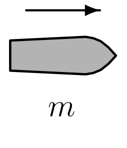

図1　時刻 t

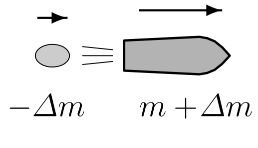

図2　時刻 $t+\Delta t$

$v-u<0$ の場合には噴射された燃料はロケットと逆方向に運動する。

問 6 微小時間 Δt の前後における運動量保存則から Δv と Δm の関係を求めよ。ただし Δv と Δm は微小量であるので，微小量同士の積 $\Delta m \Delta v$ (2 次の微小量) は $m\Delta v$ や $u\Delta m$ (1 次の微小量) に比べて無視してよい。

問 7 微小時間 Δt の間に使用したエネルギー ΔE を求めよ。ただしこのエネルギーはすべて運動する物体 (噴射燃料とロケット) の運動エネルギーになるとする。微小量 Δm，Δv を 2 つ以上含む項 (2 次の微小量 $m(\Delta v)^2$，$v\Delta m\Delta v$，3 次の微小量 $\Delta m(\Delta v)^2$) は微小量を 1 つ含む項 (1 次の微小量 $mv\Delta v$，$v^2\Delta m$) に比べて無視してよい。結果は Δm (< 0) と u のみを使って表せ。

[III]

化学燃料を燃焼させて推進力を得る通常のロケットでは，ロケットから見た噴射燃料の速さ u はロケットの速さに依存せずに一定 u_0 である ($u = u_0$)。この場合に，前問の結果を利用して以下に答えよ。

問 8 ロケットの速さ v と質量 m の関係を求めよ。必要なら次のヒントを参考にせよ。
[ヒント]
y は x の関数であるとする。x が微小量 Δx だけ変化するとき y の変化量 Δy が $\Delta y = cy\Delta x$ の関係にあるとする。ここで c は定数である。このとき y と x の関係は $y = y_0\,\mathrm{e}^{cx}$ と表される。ただし y_0 は任意の定数である。

問 9 ロケットを一定の加速度 a で運動させるとしよう。ロケットが運動を始めてから時間 t たったときのロケットの質量 m を求めよ。

問 10 ロケットが等加速度で運動を始めてから時間 t の間に燃料を燃やして得たエネルギー E を求めよ。ただしこのエネルギーはすべて運動する物体 (噴射燃料とロケット) の運動エネルギーになったとする。

問 11 ロケットの質量がはじめの $\dfrac{1}{4}$ になったときのロケットの速さは u_0 の何倍か，数値で求めよ。ただし $\log_{\mathrm{e}} 2 = 0.693$ と近似せよ。

問 12 ロケットの質量がはじめの $\dfrac{1}{4}$ になったときのロケットの運動エネルギーを E_{r} とする $\left(E_{\mathrm{r}} = \dfrac{1}{2}mv^2 \right)$。この間に燃料から得たエネルギー E に対する E_{r} の比の値 $\dfrac{E_{\mathrm{r}}}{E}$ を求めよ。結果は数値で表せ。

第１問 B（35 点）

[I]

熱力学では，巨視系（原子分子等の粒子の数が非常に大きい系）の巨視的物理量を取り扱う。それは熱力学第１法則と熱力学第２法則という２つの基本法則に基づいている。まずエネルギー保存則である第１法則から始めることにしよう。

熱力学第１法則：系の内部エネルギーの増加 $\varDelta U$ は外部から加えられた熱 Q と外部からなされた仕事 W との和で与えられる。

$$\varDelta U = W + Q \tag{1}$$

第１法則における内部エネルギーとは，構成粒子の運動エネルギーと構成粒子間の相互作用による位置エネルギーの総和である。

以下，粒子間に相互作用のない理想気体を対象として話を進めることにする。n モルの理想気体の平衡状態では，その体積 V，圧力 P，絶対温度 T の間に次の状態方程式が成立する。

$$PV = nRT \tag{2}$$

ここで R は気体定数と呼ばれ

$$R = 8.31\,\mathrm{J/(K{\cdot}mol)} \tag{3}$$

で与えられる。

状態方程式 (2) により気体の平衡状態は，(P, V, T) のどれか２つを定めれば決まる。気体の状態変化を表すのに，圧力 P と体積 V を選んで P-V 図を用いることがよくおこなわれる。

分子運動論によれば，圧力 P は，分子と壁との衝突により壁が受ける単位面積当たりの撃力の総和で与えられ，単原子分子の理想気体の場合，分子の重心運動の運動エネルギー E を用いて，$P = \dfrac{2E}{3V}$ と表すことができる。単原子分子の理想気体の場合には，内部エネルギー U は E に等しい。このことから (2) 式を使って

$$U = \frac{3}{2}nRT \tag{4}$$

と与えられる。２原子分子の場合には，回転や振動のエネルギーをもちうるが，100〜1000 K の温度範囲では振動のエネルギーは無視でき，内部エネルギーには回転エネルギーのみが加わると考えてよく，

$$U = \frac{5}{2}nRT \tag{5}$$

となる。理想気体の内部エネルギーが体積によらないのは分子同士の相互作用がないからである。実在の気体でも，分子間の距離が十分に離れているので，理想気体とみなすことは広い領域でよい近似となっている。

問１ 体積一定のまま，気体１モルの温度を１K 上昇させるのに必要な熱を定積モル比熱という。空気の定積モル比熱 C_V の値はいくらか。空気は，O_2（20.93%）と N_2（78.10%）からなるので２原子分子気体とみなせる。

問 2 図 1 のように，なめらかに動くピストンをもった円筒状容器内に気体を閉じこめる。ピストンが力 F で押されて，距離 Δx 動き，体積が $|\Delta V|$ 減少する（体積変化 $\Delta V < 0$）。気体の圧力を P として，このとき気体になされた仕事 W が

$$W = -P\Delta V \tag{6}$$

となることを示せ。

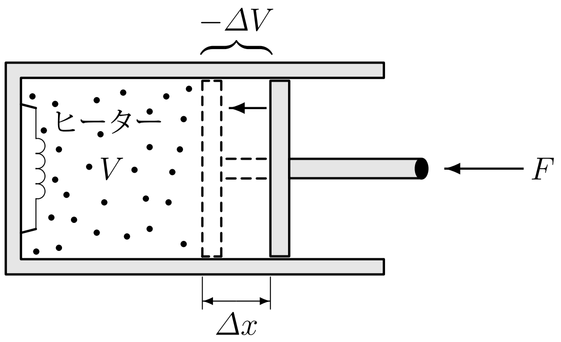

図 1

問 3 図 2 の n モルの理想気体についての P-V 図上で，ア→イは定圧過程，ア→ウは定積過程，ウ→イは等温過程である。定圧過程と定積過程を比較することにより，空気の定圧モル比熱 C_P を求めよ。

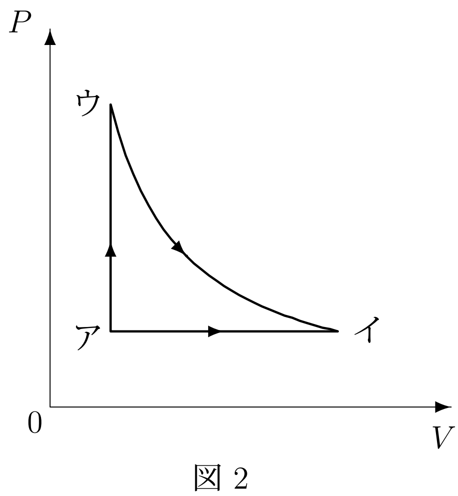

図 2

問 4 等温過程ウ→イにおいて気体が外部からなされた仕事を W，吸収した熱を Q とするとき，その間の関係と，それらの量の正負を書け。

[II]

熱現象は第 1 法則だけでは説明できない。状態の変化の向きについて述べているのが，第 2 法則である。第 2 法則にはいろいろな表現がある。ここではトムソンの原理と呼ばれる表現を挙げておく。

トムソンの原理：一様な温度の熱源から熱を取り，それと等量の仕事をするだけでそれ以外には何の変化も残さない過程は実現できない。

ジュールの羽根車の仕事当量の実験でもわかるように，仕事をすべて熱に変えることはできるのであるから，この原理は熱の伝導を伴う自然現象の不可逆性を示している。

このような不可逆性を簡単な仮想的な例で考察してみよう。最初，下の図 3(a) のように体積 $2V$ の円筒形の断熱容器の中央に仕切りを入れ，体積 V の A の部分に n モルの理想気体を入れ，他方 B の部分は真空にしておく。次に仕切りにあった穴を開き，気体が A から真空にしておいた B に移れるようにすると，やがて図 3(b) のように同じ密度になって平衡状態となる。このとき外部とは熱の出入りも仕事のやりとりもなく，気体の内部エネルギーは変化せず，したがって，温度の変化もない。

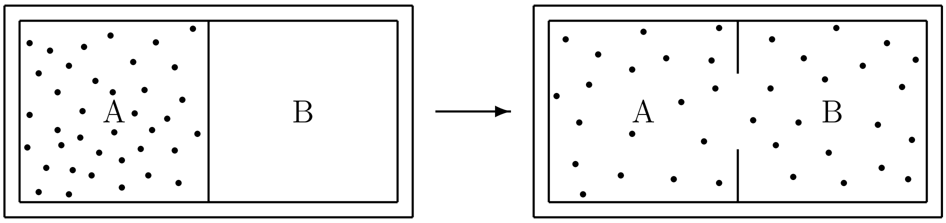

図 3(a)　　　　図 3(b)

問 5　図 3(b) の粒子分布から図 3(a) の分布に戻る確率は限りなく 0 に近い。穴を通して分子が自由に行き来できるとすると，ある瞬間に個々の気体分子が A にいるか B にいるかの確率は $\dfrac{1}{2}$ である。アボガドロ数を N_{A} として，n モルの気体分子すべてが A にいる確率を求めよ。

第 2 法則はエントロピーという量を導入することで，定量的に議論することができる。エントロピーは，系の乱雑度あるいは不確定性の指標ともいえ，自然界の不可逆現象では乱雑になる不確定な方向へと変化する。上の例でいえば粒子を閉じこめていた体積が増し，その位置の不確定性が増し，より乱雑になったということができる。

図 3(b) から図 3(a) に戻すには，図 1 のような容器に気体を封じ，ピストンを押して温度を一定に保ちながら圧縮する必要がある。

ある系に可逆的に流れ込んだ熱を Q，そのときの温度を T とすると，その系のエントロピー S の変化量 $\varDelta S$ は，Q，T と次の関係にある。

$$Q = T\varDelta S \tag{7}$$

また，可逆過程について，第 1 法則 (1) に (6)，(7) 式を代入して

$$\varDelta U = -P\varDelta V + T\varDelta S \tag{8}$$

が得られる。エントロピー S は，内部エネルギー U と同様に平衡状態で決まる状態量であり，2 つの平衡状態の間のエントロピーの変化は，その間に適当な可逆過程を仮定して計算することができる。

問 6　温度を一定に保ちながら，理想気体 n モルを体積 $2V$ から V まで圧縮するときに外部に放出する熱量を求めよ。その計算に必要なら次の積分公式を用いてよい。

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x_2 - \log x_1 = \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

ここで log は自然対数（e= 2.7182 $\cdots$ を底とする対数）である。

問 7　問 6 の過程は，可逆過程であり，(8) 式が成り立つ。このことから，図 3(a) と図 3(b) の状態のエントロピーの差を求め，図 3(a) から図 3(b) への過程でのエントロピーの増大分 ΔS を計算せよ。

一般の過程については，

$$Q \leqq T\Delta S \tag{9}$$

が成り立ち，これはクラウジウスの不等式と呼ばれる。ここで $=$ は可逆過程で，$<$ は不可逆過程に対応する。(9) 式は不可逆過程に関するエントロピーの増大の法則となっており，熱力学第 2 法則を表現している。

このように熱力学は，2 つの基本法則を基に，その巨視量の間の熱的性質の関係を明らかにする。しかし，物質固有の性質，熱容量や状態方程式，その他物質固有の熱力学的・電磁気的巨視量の温度依存性などは，実験によって与えられたものとして取り扱う。これらの物質固有の巨視量をミクロの力学系から計算する理論が，統計力学である。

第 2 問（100 点）

数値計算に必要なら，本問題末尾の数値表を使ってよい。

量子力学の発展にとって，電磁波と物質の相互作用による次の 3 つの現象は重要な研究テーマだった。

1) 光電効果
2) コンプトン効果
3) 電子・陽電子対の生成

[I]

これらの現象を議論するとき相対性理論を使う必要がある。それによると，運動する粒子のエネルギーは，運動量の大きさを p とすると

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \tag{1}$$

と表される。m はこの粒子の質量で，$c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ は真空中の光速である。(1) 式の E は，$p = 0$ でも $E = mc^2$ という 0 でない値をもつ。このエネルギーを静止エネルギーという。

エネルギーの増分は外からなされた仕事量と等しいから，この粒子が外力 $\overrightarrow{F}$ を受けながら速度 $\overrightarrow{v}$ で運動するとき，

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = (\text{外力}\overrightarrow{F}\text{の仕事率}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{F} \tag{2}$$

という関係が成り立つ。ここに，最右辺に出てきた積は，ベクトル $\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{F}$ の内積と呼ばれるものである。

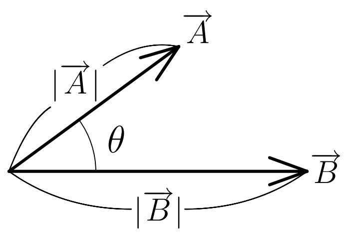

図 1

以下では，ベクトル $\overrightarrow{A}$ の大きさ（絶対値ともいう）を $|\overrightarrow{A}|$ または単に A と表すことにする。いま，2 つのベクトル $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ があり，それらの間の角度を θ とする（図 1 参照）。そのとき

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}|\,|\overrightarrow{B}| \cos\theta \tag{3}$$

で定義される $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ をベクトル $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ の内積と呼ぶ。(3) 式によると

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = |\overrightarrow{A}|^2$$

だから，ベクトルの大きさは，自分自身との内積の平方根を計算すれば求まる。なお，力と運動量の間の運動の第 2 法則

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F} \tag{4}$$

は，相対論でも成り立つ。

問 1 x 軸方向に速度 v で 1 次元運動する質量 m の粒子について考える。この粒子について運動の第 2 法則が成り立つことから，運動量 p が

$$p = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\, v \tag{5}$$

と表されることを示せ。

この式の右辺で $(v/c)^2$ が 1 に比べて十分小さく無視できるとき（これを非相対論的極限という），(5) 式はニュートン力学での運動量の定義式 $p = mv$ になる。

問 2 非相対論的極限をとると，(1) 式の右辺は静止エネルギーと $\dfrac{1}{2}mv^2$ の和になることを示せ。
ヒント：必要なら，α が 1 と比べて十分小さいとき，$(1+\alpha)^{1/2} \approx 1 + \dfrac{1}{2}\alpha$ と近似できることを使え。

問 3 電子の静止エネルギーは何 eV（電子ボルト）か [エネルギーの単位の eV と J の換算については問題文の最後をみよ]。

なお，3 次元運動する一般の粒子の場合，速度ベクトルと運動量ベクトルの間には (5) 式を 3 次元化した

$$\overrightarrow{p} = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\, \overrightarrow{v} \tag{6}$$

という関係が成り立つ。(5) 式や (6) 式は粒子の速さ v が c より大きくなると，平方根記号の中が負になるため，意味のない式になる。したがって，どんな粒子の速さも光速より小さいものとする。

[II]

冒頭の 1) の「光電効果」とは，固体に光を当てると，固体中に束縛されていた電子が光のエネルギーを吸収して固体から解放されて外に飛び出すという現象である。アインシュタインは，1905 年に光量子仮説を導入して光電効果の理論を樹立し，1921 年にノーベル物理学賞を授与された。

光量子仮説に始まる電磁波の量子力学によると，物質に照射される電磁波は光子と呼ばれる粒子集団の流れである。光子は質量をもたないが，エネルギーをもち，1 個の光子がもつエネルギー E は，その電磁波の振動数を ν として，

$$E = h\nu$$

という値をもつ。h はプランク定数と呼ばれ，その値は問題文の最後に書いてある。

光電効果によって物質中の原子に束縛されている電子を解放するには，光子から電子にエネルギーを与える必要がある。また，1 個の電子は一度に 1 個の光子とのみエネルギーと運動量をやり取りできるものとする。

問 4　固体から電子を解放するために必要な光子のエネルギーの最小値をその固体の仕事関数という。仕事関数が 2.0 eV の固体で光電効果を起こすためには，照射する電磁波の波長をいくら以下にしなくてはならないか。有効数字 1 桁で答えよ。

この波長の電磁波は可視光に属する。デジタルカメラで光のもつ情報を電気信号に変えたり，太陽電池で太陽光のエネルギーを電気エネルギーに変えるのも光電効果の一種である。

問 5　光子は質量をもたないが運動量はもち，エネルギーと運動量の関係は，(1) 式で $m = 0$ としたもので与えられる。真空中を伝わる波長 λ の電磁波の光子の運動量の大きさは

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{7}$$

となることを導け。

[III]

光子のエネルギーが大きくなると，すべてのエネルギーを電子に与えなくとも電子を固体から解放できるようになり，はじめのエネルギーより小さなエネルギーの光子が飛び去っていく (図 2)。これは，光子が固体と非弾性衝突することによる電磁波の散乱であるが，コンプトンがこれを使って量子力学の基本的な関係の 1 つの (7) 式が成り立つことを証明したためにコンプトン散乱と呼ばれる。

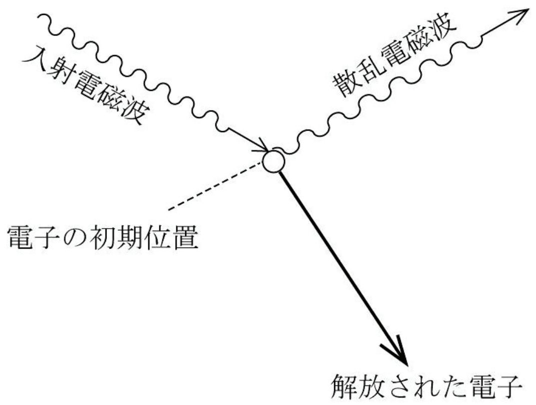

図 2

問 6　物質から解放された後の電子のエネルギー E を，電子の質量 m_{e}，光速 c，プランク定数 h，入射電磁波の波長 λ と散乱された後の電磁波の波長 λ' を使って表せ。ただし，仕事関数が E と比べて十分小さく無視できるため，散乱が起きる前の電子のエネルギーは静止エネルギーに等しいとせよ。

問 7　光子の運動量ベクトル $\overrightarrow{p}$ の向きは電磁波の進行方向である。この向きに平行で大きさが 1 のベクトルを $\overrightarrow{n}$ と表すことにすると，大きさが (7) 式で表される運動量ベクトル $\overrightarrow{p}$ は

$$\overrightarrow{p} = \frac{h}{\lambda}\overrightarrow{n} \tag{8}$$

と表される。図 2 の散乱の前後で光子と電子がもつ運動量の総和が保存するということを放出される電子の運動量 $\overrightarrow{P}$，散乱前後の電磁波に関する λ，λ'，$\overrightarrow{n}$，$\overrightarrow{n}'$ およびプランク定数 h を使って表せ。

問 8　以上のことを使って，次の式を導け。

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{\mathrm{e}}c}(1 - \cos\theta) \tag{9}$$

ただし，θ は $\vec{n}$ と $\vec{n}'$ の間の角度である。なお，$\vec{n}$ と $\vec{n}'$ は大きさが 1 であるため $\vec{n}\cdot\vec{n} = \vec{n}'\cdot\vec{n}' = 1$ である。

問 9　(9) 式が成り立つことを実験によって確認するためには，測定に適した入射電磁波を用意しなくてはならない。$\lambda = \dfrac{1}{2}\lambda'$ かつ $\theta = 60^\circ$ となる入射電磁波の波長 λ はいくらか。有効数字 1 桁で答えよ。また，このとき解放された電子のエネルギーを eV を単位として求めよ。

ここで求めた波長の電磁波は X 線に属する。コンプトンは，X 線を使って電磁波の量子論の構築に貢献した。また，(9) 式の右辺の長さの次元をもつ因子 $\dfrac{h}{m_{\mathrm{e}}c}$ はコンプトン波長と呼ばれる。

[IV]

さらに，波長の短い電磁波を使うと，1 個の光子が消滅すると同時に 1 対の粒子と反粒子が作られる対生成という現象が起きることがある。粒子と反粒子の例としては，電子と陽電子の対があげられる。陽電子は，質量が電子と等しく電気量は反対符号の粒子で，電子の電気量を $-e$，質量を m_{e} とすると陽電子の電気量と質量は，それぞれ，e および m_{e} となる。そのため，陽電子の運動量 p とエネルギー E の間には電子と同じ (1) 式の関係が成り立つ。

まず，対生成は，図 3(a) に示したような反応であったとする。この図の反応では，反応前に光子がもっていたエネルギーは反応後に電子と陽電子に等分されるものとする。また，光子がもっていた運動量 $\vec{p}_{\gamma}$ は，陽電子と電子の運動量 $\vec{p}_{+}$，$\vec{p}_{-}$ の和に変換されるものとする。これらの運動量の間には，$|\vec{p}_{+}| = |\vec{p}_{-}|$ の関係が成り立ち，$\vec{p}_{+}$ と $\vec{p}_{-}$ の向きは $\vec{p}_{\gamma}$ の向きに関して対称であるため，$\vec{p}_{+} + \vec{p}_{-}$ は $\vec{p}_{\gamma}$ と同じ向きである。また，$\vec{p}_{+}$ と $\vec{p}_{-}$ の間の角度を θ とする。

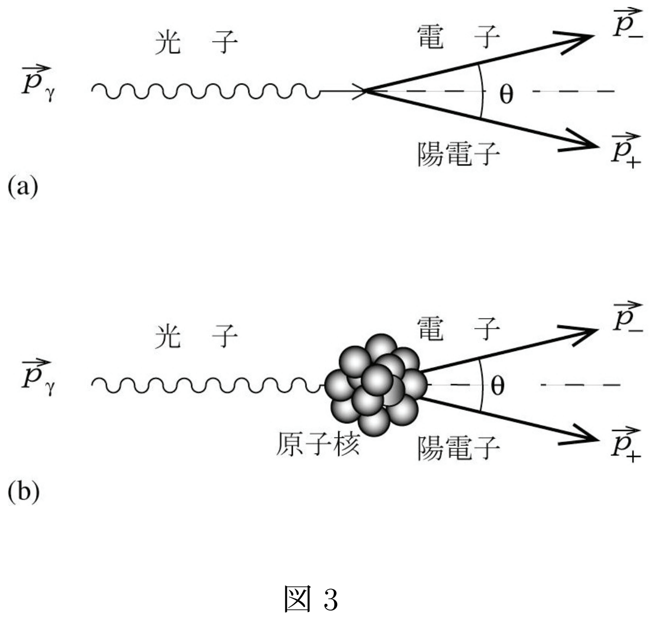

図 3

問 10 図 3(a) の反応で $|\overrightarrow{p}_+| = 0$ の陽電子と $|\overrightarrow{p}_-| = 0$ の電子の対を作るために必要な光子のエネルギーを eV を単位として求めよ。

電子・陽電子対生成の実験には，少なくともここで求めたエネルギーの電磁波を使う必要がある。

前問のように，初め光子が運動量をもっていたのに，生成された電子と陽電子の運動量が 0 だったとすると，運動量保存則が満たされない。

問 11 より高いエネルギーの光子を使っても，図 3(a) の反応では $|\overrightarrow{p}_+ + \overrightarrow{p}_-| < |\overrightarrow{p}_\gamma|$ となって運動量が保存しないことを示せ。
ヒント：$|\overrightarrow{p}_+ + \overrightarrow{p}_-|^2$ と $|\overrightarrow{p}_\gamma|^2$ を比較すると計算しやすい。

したがって，対生成が起きるためには光子がもっていた運動量と電子・陽電子対の運動量の差を受け取る他の粒子の存在が必要である。そのため，対生成の実験をするときは γ 線を物質に当て，光子の運動量をその物質中の原子核にも与えるようにする。図 3(b) はその様子を示す。以下では，光子から運動量をもらった原子核の質量を M，運動量を $\overrightarrow{q}$ とせよ。また原子核のエネルギーに関しては非相対論的極限での式を使え。

問 12 図 3(b) の反応で $|\overrightarrow{p}_+| = |\overrightarrow{p}_-| = 0$ の電子・陽電子対を作るために必要な光子のエネルギー $h\nu$ を m_e，M，c またはその一部の文字を用いて表せ。また，反応後の原子核の速さを求め，原子核のエネルギーに非相対論的極限の式を使ったことが妥当であったことを確かめよ。

(参考)

光の速さ	$c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$
電子の質量	$m_\mathrm{e} = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
陽子の質量	$m_\mathrm{p} = 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
プランク定数	$h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$
エネルギーの換算	$1\,\mathrm{eV} = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$

第3問（100点）

必要があったら，問題の最後にある微分・積分の公式と物理定数を使え。

地球の電離層の外側にある磁気圏や太陽系の惑星間に広がる希薄なガスは，多くの場合，電子と陽イオンに電離したプラズマ（電離ガス）となっている。これらのプラズマは磁場や電場の強い影響を受けて運動している。ここでは，プラズマの運動の基礎となる磁場や電場中の荷電粒子の運動を考えてみよう。

[I]

一様で x 方向を向く電場 $\overrightarrow{E} = (E,\,0,\,0)$ と一様で z 方向を向く磁束密度 $\overrightarrow{B} = (0,\,0,\,B)$ の磁場中にある電荷 q，質量 m の荷電粒子の運動を考える。このとき，荷電粒子の位置を $(x,\,y,\,z)$，速度を $(V_x,\,V_y,\,V_z)$ と表すと，

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} &= q(E + BV_y) \\ m\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} &= -qBV_x \\ m\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

と書けることが知られている。このような方程式は運動方程式と呼ばれ，この式の左辺は加速度に質量をかけたもの，右辺は電磁場が荷電粒子に及ぼす力である。なお，ここに出てきた E および B はともに時間的にも一定であるとする。また，3番目の式によると z 方向には等速運動することが簡単にわかるので，[I] では，z 軸に垂直な面内の運動のみを詳しく考察する。

まず，電場 $E = 0$ とする。このとき，運動方程式 (1) から

$$m\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = qBV_y, \qquad m\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} = -qBV_x \tag{2}$$

が導かれる。

問1 (2) 式から

$$\frac{\mathrm{d}^2V_x}{\mathrm{d}t^2} = -{\omega_\mathrm{c}}^2V_x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2V_y}{\mathrm{d}t^2} = -{\omega_\mathrm{c}}^2V_y \tag{3}$$

を導け。ただし，

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{qB}{m} \tag{4}$$

である。

問2 (3) 式は荷電粒子が x 方向にも y 方向にも角振動数 $|\omega_\mathrm{c}|$ で単振動することを示している。$|\omega_\mathrm{c}|$ は，サイクロトロン角振動数と呼ばれる。$t = 0$ で $V_x = 0$，$V_y = V_\perp > 0$ としたとき，時刻 t における V_x，V_y が

$$V_x(t) = V_\perp \sin(\omega_\mathrm{c}t), \qquad V_y(t) = V_\perp \cos(\omega_\mathrm{c}t)$$

となることを示せ。

問 3 また，$t = 0$ で $x = -\dfrac{V_\perp}{\omega_c}$，$y = 0$ にあった粒子の時刻 t での位置 $x(t), y(t)$ を求め，荷電粒子が半径

$$r_c = \frac{V_\perp}{|\omega_c|} \tag{5}$$

の円運動をすることを示せ。この円運動はサイクロトロン運動と呼ばれ，r_c はサイクロトロン半径と呼ばれる。なお，荷電粒子の位置座標 (x, y) を用いると，その速度ベクトルは

$$V_x(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad V_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

と書ける。

問 4 地磁気の大きさは場所によって異なるが，東京付近ではおよそ 3×10^{-5} T（テスラ）である。東京での電子のサイクロトロン角振動数を求めよ。

問 5 速さが 3.2×10^7 m/s（約 3000 ボルトの電圧で加速された電子の速さ）の電子の東京におけるサイクロトロン半径 r_c を求めよ。6.4×10^6 m の地球の半径に対するこのサイクロトロン半径の比を求めよ。

地球磁場は地球半径のスケールで眺めると場所によって変化している。しかし，このようにサイクロトロン半径が地球の半径よりはるかに小さければ，荷電粒子は一様な磁場中で円運動していると見なすことができる。

次に (1) 式の E が 0 でない場合を考える。

問 6 このとき $U_x = V_x$，$U_y = V_y + \dfrac{E}{B}$ とおくと，運動方程式 (1) は

$$m\frac{dU_x}{dt} = qBU_y, \qquad m\frac{dU_y}{dt} = -qBU_x$$

と書きかえられることを示せ。

問 7 初期条件を $U_x(0) = 0$，$U_y(0) = V_\perp > 0$ として，$V_x(t)$，$V_y(t)$ を $V_\perp$，ω_c，E，B，t を用いて表せ。

問 8 この結果より，$t = 0$ で $x = -\dfrac{V_\perp}{\omega_c}$，$y = 0$ にあった粒子の時刻 t での位置 $x(t)$，$y(t)$ を求め，軌道 $(x(t), y(t))$ の概形を，$q > 0$ と $q < 0$ のそれぞれの場合について図示せよ。

問 9 上記の例では，電場は x 方向であった。電場の向きが y 方向のときには軌道はどうなるか。$q > 0$ と $q < 0$ のそれぞれの場合について，軌道の概形を図示せよ。

以上の結果は，互いに直交する一様な磁場と電場中の荷電粒子の磁場に垂直な面内の運動は，サイクロトロン運動と電場と磁場に垂直な方向の等速直線運動を重ね合わせたものになることを示している。この等速直線運動は円運動の回転中心の移動と考えることができ，$E \times B$ ドリフトと呼ばれる。

問 10 磁場中のプラズマ（電子と陽イオンが電気的に中和しているガス）に磁場に垂直な電場がかかったとき，プラズマが全体としてどのような運動をするか説明せよ。

[II]

　次に，図 1 に示したように，湾曲した磁力線に巻き付くような荷電粒子の運動について考える。荷電粒子のサイクロトロン運動の回転中心の進む方向に z 軸を取る。磁力線の分布は z 軸に関して対称である。このように磁力線が湾曲しているとき，z 軸方向に磁束密度の値は一様ではない。この場合，その中の荷電粒子は z 方向に加速度運動する。粒子が z 方向に移動するとき，サイクロトロン運動 1 周期の間の磁束密度の変化がその点の B の値より十分小さい場合には，その中での運動は，x-y 面内のサイクロトロン運動とその回転中心の z 軸方向の運動の重ねあわせとして近似できる。

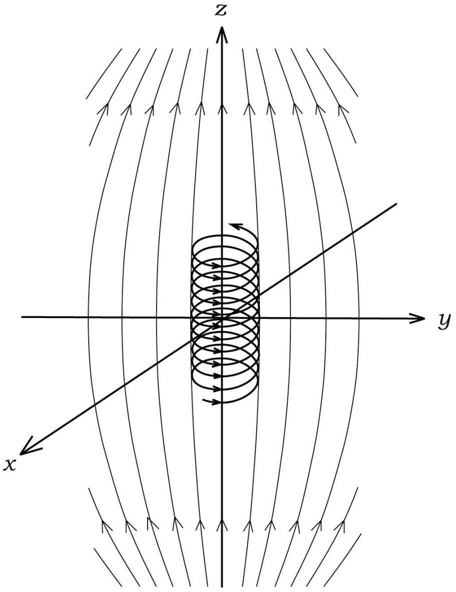

図 1

ただし，サイクロトロン運動の角振動数は，円の中心での磁束密度 $B_z(z)$ を使って，

$$\omega_{\mathrm{c}}(z) = \frac{qB_z(z)}{m} \tag{6}$$

のように変化する。

　一方，[I] では一定だった V_z が z 依存性をもつ。そこで荷電粒子の z 方向の加速度運動について考える。そのために使うのは，サイクロトロン半径 r_{c}，円運動の速さ $V_\perp > 0$ と ω_{c} の間に成り立つ関係式（問 3 の (5) 式）と次の 2 つの法則である。

(1) ここでは，磁場変化が十分ゆっくりであるので，荷電粒子にはたらく磁場からの力は常に回転中心の方を向くとみなせる。したがって，円運動について面積速度一定の法則

$$r_{\mathrm{c}} V_\perp = C_1 \quad (\text{一定}) \tag{7}$$

が成り立つとする。

(2) 磁場による力は速度に垂直で仕事をしないため，運動エネルギーは一定で

$$\frac{1}{2} m \left({V_z}^2 + {V_\perp}^2 \right) = C_2 \quad (\text{一定}) \tag{8}$$

が成り立つ。

問 11 (7) 式と (8) 式に出てきた C_1 と C_2 を $V_\perp(0)$，$V_z(0)$，$B_z(0)$，q，m を用いて表せ。

問 12 円運動の中心が z 方向に移動して B_z が変化するとき，$\dfrac{1}{2}mV_\perp(z)^2$ が $B_z(z)$ に比例して変化することを示せ。

問 13 いま，z についての関数

$$U(z) = \frac{mV_\perp(0)^2 B_z(z)}{2B_z(0)}$$

を導入すると，z 方向の粒子の運動では，

$$\frac{1}{2}mV_z(z)^2 + U(z) = C_2 \tag{9}$$

という関係が成り立つことを示せ。

(9) 式は，$U(z)$ を z についての位置エネルギーとみなすと，荷電粒子の z 方向の 1 次元運動における力学的エネルギー保存則と考えることができる。これは，磁束密度が変化するとき磁力線方向に荷電粒子に力がはたらくことを示している。

以下では，磁束密度 $B_z(z)$ は，$z = 0$ に最小値をもち $|z|$ と共に増加する $z = 0$ に関して対称な関数であるとする。図 1 で表される磁場はこのような磁場の例である。

問 14 図 2 のように，磁場中の $z = \pm L$ に板があり，板に当たる荷電粒子は吸収されて消滅するとする。磁束密度の最大値 $B_z(L)$ と最小値 $B_z(0)$ の比を

$$M = \frac{B_z(L)}{B_z(0)}$$

とするとき，荷電粒子が板に当たることなく往復運動するための $V_\perp(0)$ と $V_z(0)$ に対する条件を M を用いて表せ。

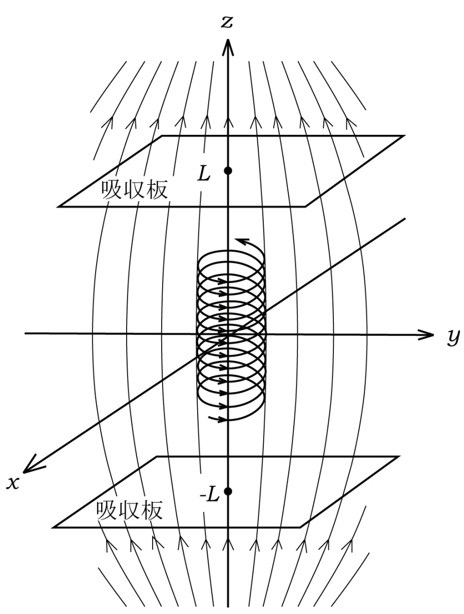

図 2

ここで，V_x，V_y，V_z を3つの座標とする空間（速度空間）を考えよう。前問の結果は，荷電粒子の $z=0$ における速度を表す点が V_z 方向を軸にする円錐形の領域には存在しないことを示している。この円錐は，ロスコーンと呼ばれ，地球磁気圏に閉じ込められたプラズマなどに特徴的である。速度空間におけるロスコーンの外側の領域の荷電粒子が図2のように磁束密度が最小となる点の周辺に閉じ込められることを「磁気ミラー効果」と呼ぶ。

問15 速度空間においてロスコーンの形状を図示し，ロスコーンの頂角を 2θ とするとき $\sin\theta$ を磁束密度の最大値と最小値の比 M を用いて表せ。

地球磁場の磁気ミラー効果により閉じ込められた荷電粒子群（磁気圏プラズマ）は，ときどき太陽から吹き出すプラズマの風によって揺すられ，荷電粒子が磁気ミラー（磁気圏）から漏れ出し，磁気圏の磁力線が地表におりてきている南極や北極に近いところで電離層に突入する。その結果オーロラが起きることが知られている。

（参考）

以下の公式で a は定数であるとする。

$$\frac{\mathrm{d}\sin(ax)}{\mathrm{d}x} = a\cos(ax), \qquad \frac{\mathrm{d}\cos(ax)}{\mathrm{d}x} = -a\sin(ax)$$

$$\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C, \qquad \int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$

電子の質量　$m_{\mathrm{e}} = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

電気素量　　$e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$