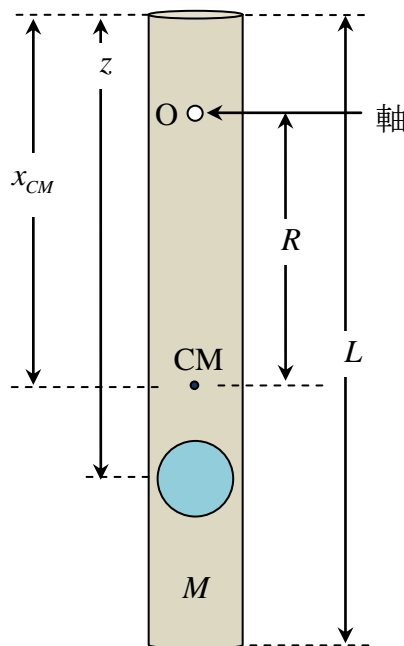


実験問題2 【解答】 力学的ブラックボックス: 中にボールが入った円筒



i, ii, iii で必要とされている値を計算するためには、次の2つがわからなければならない。

- z, m, M によって決まる、円筒にボールを加えた系の質量中心の位置
- そこでの慣性モーメント

CM (質量中心) の位置はつり合いをとることによって求められる。 I_{CM} はボールを加えた円筒の振動の周期から計算できる。

グラフを描くためのパラメータを選択する解析手順

I.
$$x_{CM} = \frac{mz + M \frac{L}{2}}{m + M} \quad \dots(1)$$

L は定規によってすぐに求められる。

x_{CM} は円筒と物体のつり合いの位置を見ることによって決定される。

II. 任意の点 O における振幅の小さい振動について、周期 T は次の式を考えることによって与えられる。

$$\{(M+m)R^2 + I_{CM}\}\ddot{\theta} = -g(M+m)R\sin\theta \approx -g(M+m)R\theta \quad \dots(2)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + (M+m)R^2}{g(M+m)R}} \quad \dots(3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} I_{CM} &= \frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(x_{CM} - \frac{L}{2}\right)^2 + m(z - x_{CM})^2 \\ &= \frac{1}{3}ML^2 + Mx_{CM}^2 - MLx_{CM} + m(z - x_{CM})^2 \end{aligned} \quad \dots(4)$$

また、(3)式より、

$$T^2 \frac{g(M+m)}{4\pi^2} = \frac{I_{CM}}{R} + (M+m)R \quad \dots(5)$$

方法(a): 直線フィットによる方法

(5)式は次の形にすることができる。

$$T^2 R = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)R^2 + \frac{4\pi^2 I_{CM}}{(M+m)g} \quad \dots(6)$$

さらに、 $T^2 R$ と R^2 でプロットすることによって、

$$\text{傾き } \alpha = \frac{4\pi^2}{g} \quad \dots(7)$$

$$y \text{ 切片 } \beta = \frac{4\pi^2 I_{CM}}{(M+m)g} \quad \dots(8)$$

である直線のグラフを得ることができる。

$$\text{したがって、} \quad I_{CM} = (M+m)\frac{\beta}{\alpha} \quad \dots(9)$$

$$g \text{ の値は (7) 式から、} \quad g = \frac{4\pi^2}{\alpha} \quad \dots(10)$$

方法(b): 曲線の最小点をとることによる方法

(5)式より、 R が次の値のとき、 T は最小値をとる。

$$R = R_{\min} \equiv \sqrt{\frac{I_{CM}}{M+m}} \quad \dots(11)$$

R_{\min} は T 対 R のグラフによって求められる。

また,
$$I_{CM} = (M + m)R_{\min}^2 \quad \dots (12)$$

(12)式と(1)式から, z と $\frac{M}{m}$ を計算することができる。

$R = R_{\min}$ のとき, (5)式は,

$$T_{\min}^2 \frac{g(M + m)}{4\pi^2} = (M + m)R_{\min} + (M + m)R_{\min}$$

となり,

$$g = \frac{2R_{\min}}{T_{\min}^2} \times 4\pi^2 = \frac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2} \quad \dots (13)$$

この式から g を計算することができる。

結果

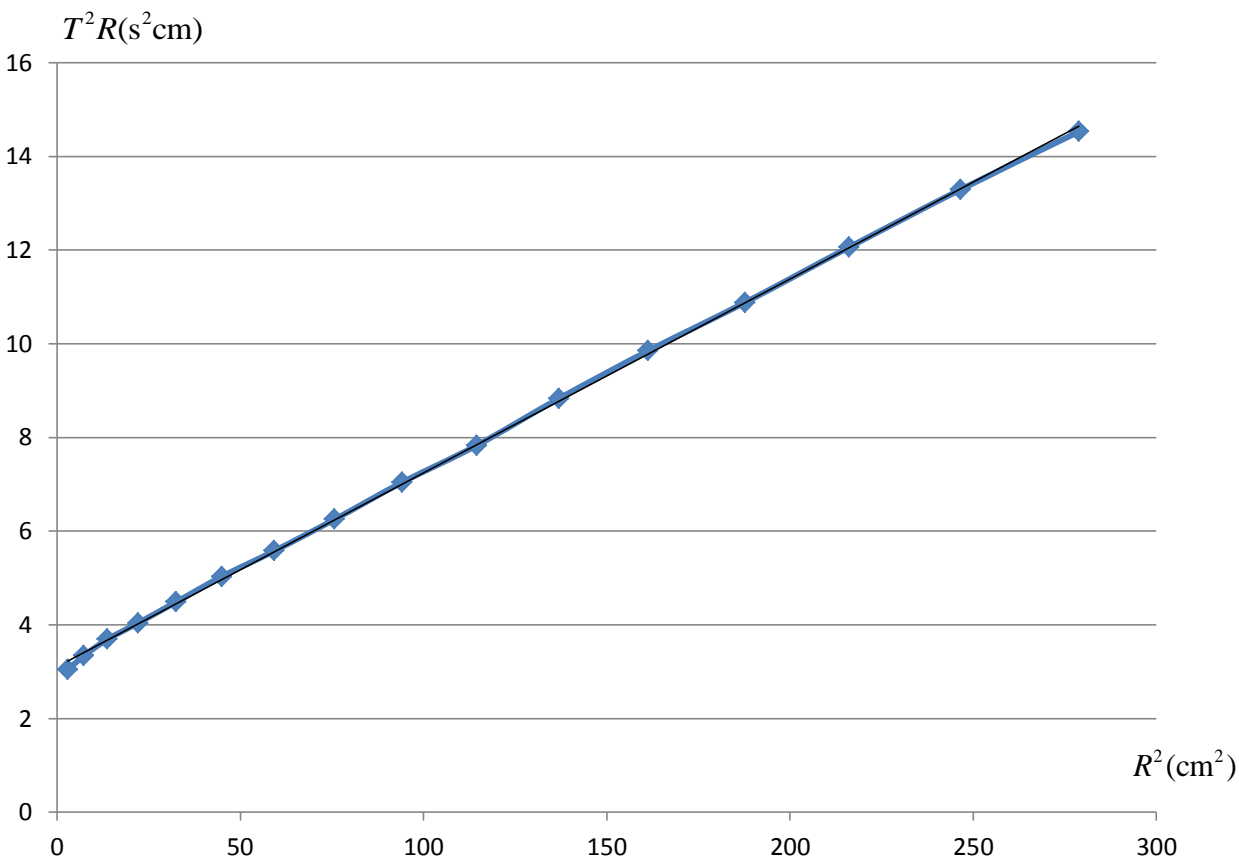
$$L = 30.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$x_{CM} = 17.8 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm} \text{ (一端から)}$$

$x_{CM} - R$ (cm)	20 周期 (s)			T (s)	R (cm)	R^2 (cm ²)	$T^2 R$ (s ² cm)
1.1	18.59	18.78	18.59	0.933	16.7	278.9	14.53
2.1	18.44	18.25	18.53	0.920	15.7	246.5	13.29
3.1	18.10	18.09	18.15	0.906	14.7	216.1	12.06
4.1	17.88	17.78	17.81	0.891	13.7	187.7	10.88
5.1	17.69	17.50	17.65	0.881	12.7	161.3	9.85
6.1	17.47	17.38	17.28	0.869	11.7	136.9	8.83
7.1	17.06	17.06	17.22	0.856	10.7	114.5	7.83
8.1	17.06	17.00	17.06	0.852	9.7	94.1	7.04
9.1	16.97	16.91	16.96	0.847	8.7	75.7	6.25
10.1	17.00	17.03	17.06	0.852	7.7	59.3	5.58
11.1	17.22	17.37	17.38	0.866	6.7	44.9	5.03
12.1	17.78	17.72	17.75	0.888	5.7	32.5	4.49
13.1	18.57	18.59	18.47	0.927	4.7	22.1	4.04
14.1	19.78	19.90	19.75	0.991	3.7	13.7	3.69
15.1	11.16	11.13	11.13	1.114	2.7	7.3	3.34
16.1	13.25	13.40	13.50	1.338	1.7	2.9	3.04

メモ: $x_{CM} - R = 15.1, 16.1 \text{ cm}$ では, 10 周期分の時間をとった

方法(a)



直線グラフによる計算: 傾き $\alpha = 0.04108 \pm 0.0007 \text{ s}^2/\text{cm}$, y 切片 $\beta = 3.10 \pm 0.05 \text{ s}^2\text{cm}$

$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha} \text{ より, } g = (961 \pm 20) \text{ cm/s}^2$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3.10}{0.04108} = 75.46 \text{ cm}^2 (\pm 2.5 \text{ cm}^2)$$

$$I_{CM} = (M + m) \frac{\beta}{\alpha} = (75.46)(M + m)$$

(4)式から,

$$I_{CM} = \frac{1}{3} M \left(\frac{L}{2}\right)^2 + M \left(x_{CM} - \frac{L}{2}\right)^2 + m(z - x_{CM})^2$$

よって,

$$(75.46)(M + m) = 75.0M + 7.84M + m(z - 17.8)^2$$

$$-7 \cdot \frac{M}{m} + 75 \left(z - 17.8 \right)^2 \quad \dots (14)$$

質量中心の位置は,

$$17.8(M + m) = 15.0M + mz$$

$$\frac{M}{m} = \frac{z - 17.8}{2.8} \quad \dots (15)$$

(14), (15)式から,

$$-\frac{7.38}{2.8}(z - 17.8) + 75.46 = (z - 17.8)^2$$

$$(z - 17.8) = 7.47$$

$$z = 25.27 = 25.3 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$\frac{M}{m} = 2.68 = 2.7$$

誤差解析

g の誤差を求める。

(10)式から,

$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha}$$

$$\Delta g = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} g = 16.3 \text{ cm/s}^2 \approx 20 \text{ cm/s}^2$$

i) z の誤差を求める

まず, $r = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3.10}{0.04108} = 75.46 \text{ cm}^2$ の誤差を求めると,

$$\Delta r = \left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta \beta}{\beta} \right) r = 2.5 \text{ cm}^2$$

r による誤差が最も影響が大きい ($\frac{\Delta r}{r} \sim 0.03$ に対し, $\frac{\Delta L}{L}, \frac{\Delta x_{CM}}{x_{CM}} \sim 0.005$) ので, 誤差の

伝播の見積もりは r によるものだけを考慮して, その最小値と最大値を(4)式に代入することで解析を簡単にすることができる。

ここで, $r_{\min} = r - \Delta r = 75.46 - 2.5 = 72.96$ を使うと, 対応する2次方程式は,

$$(z - 17.8)^2 + 3.529(z - 17.8) - 72.96 = 0$$

である。対応する解は, $(z - 17.8)_{\min} = 6.96 \text{ cm}$ である。

よって,

$$\Delta(z-17.8) = \frac{7.55-6.96}{2} = 0.3 \text{ cm}$$

また, $\frac{\Delta(z-17.8)}{z-17.8} \sim 0.04$ であるので, $\Delta L, \Delta x_{CM}$ による誤差の伝播は確かに無視できる。

誤差 Δz の見積もりは,

$$\Delta z \approx \Delta(z-17.8) = 0.3 \text{ cm}$$

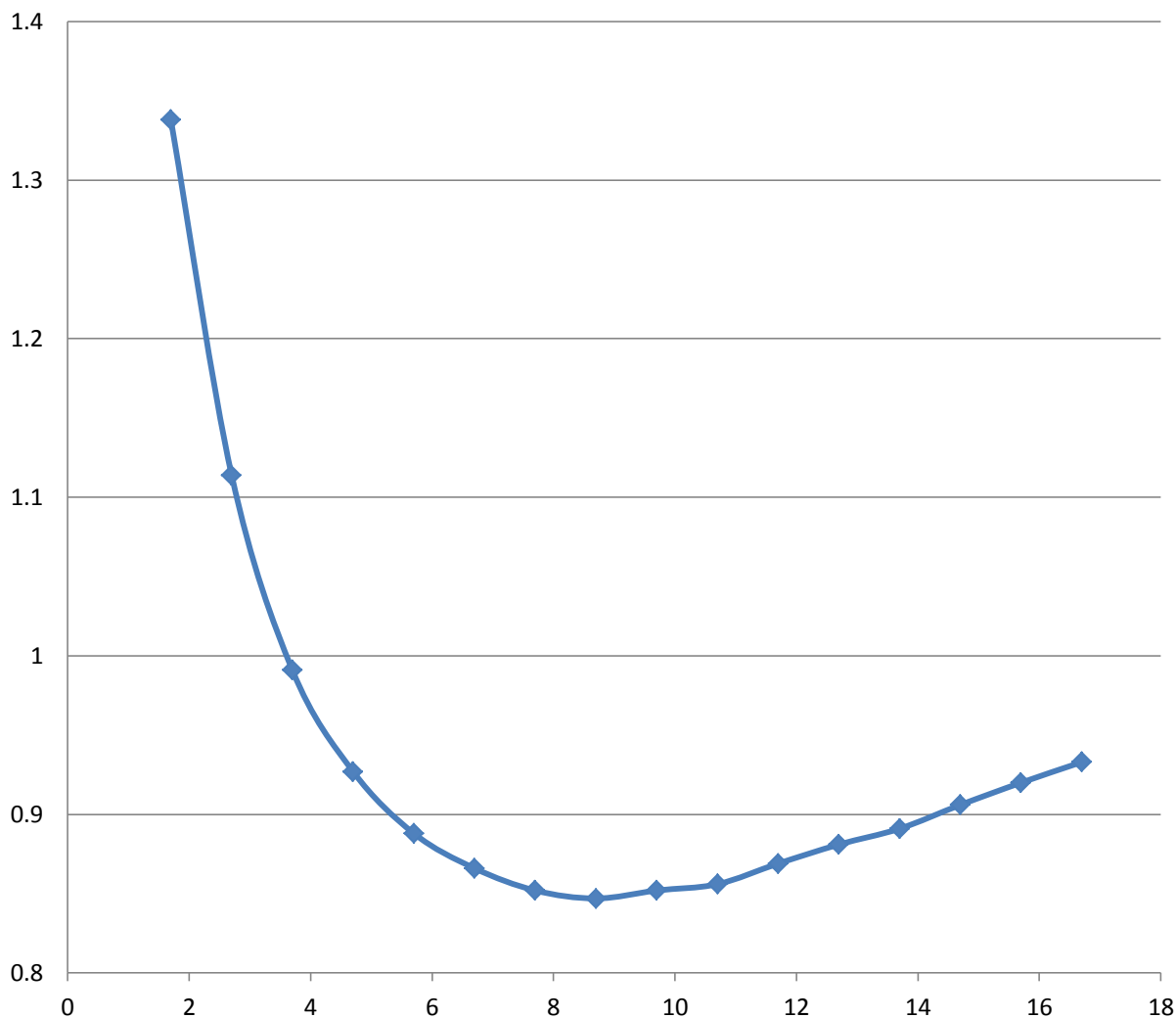
ii) $\frac{M}{m}$: の誤差を求める

$\frac{M}{m} = \frac{z-17.8}{2.8}$ であるので,

$$\Delta\left(\frac{M}{m}\right) = \frac{\Delta(z-17.8)}{2.8} = 0.11$$

方法(b)

T - R のプロットの計算:



グラフの最小点において, $T = T_{\min}$ となるとき, $I_{CM} = (M+m)R_{\min}^2$, $g = \frac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2}$

グラフから, $R_{\min} = 8.9 \pm 0.2$, $T_{\min} = 0.846 \pm 0.005$

$$\therefore g = 982 \pm 40 \text{ cm/s}^2$$

$$I_{CM} = (M+m)(8.9)^2 = (79.21)(M+m) \quad \dots (16)$$

(14), (15), (16) 式から,

$$(79.21)(M+m) = 75.0M + 7.84M + m(z-17.8)^2$$

$$-3.63M + 79.21m = m(z-17.8)^2$$

$$(z-17.8)^2 + \frac{3.63}{2.8}(z-17.8) - 79.21 = 0$$

$$(z-17.8) = 8.28$$

よって,

$$z = 26.08 \pm 0.1$$

$$\frac{M}{m} = 2.96 \pm 0.1$$

誤差の見積もり

i) g の誤差を求める。

最小点において, $g = \frac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2}$ なので,

$$\Delta g = \left(\frac{\Delta R_{\min}}{R_{\min}} + 2 \frac{\Delta T_{\min}}{T_{\min}} \right) g = 34 \approx 30 \text{ cm/s}^2$$

ii) z の誤差を求める。

まず, $r = R_{\min}^2 = 79.21 \text{ cm}^2$ の誤差は,

$$\Delta r = 2R_{\min} \Delta R_{\min} = 3.56 \text{ cm}^2$$

この r は方法(a)での r と同等であるから, 方法(a)と同様の誤差解析をすればよい。

その結果は

$$z = 26.08 \approx 26.1 \text{ cm}, \quad \Delta z = 0.8 \text{ cm}$$

ii) $\frac{M}{m}$ の誤差を求める。

方法(a)と同様にして, $\frac{M}{m} = 2.96; \quad \Delta\left(\frac{M}{m}\right) = 0.15$

なお, 曲線の最小点をとるこの方法より直線フィットによる方法の方が誤差は小さい。