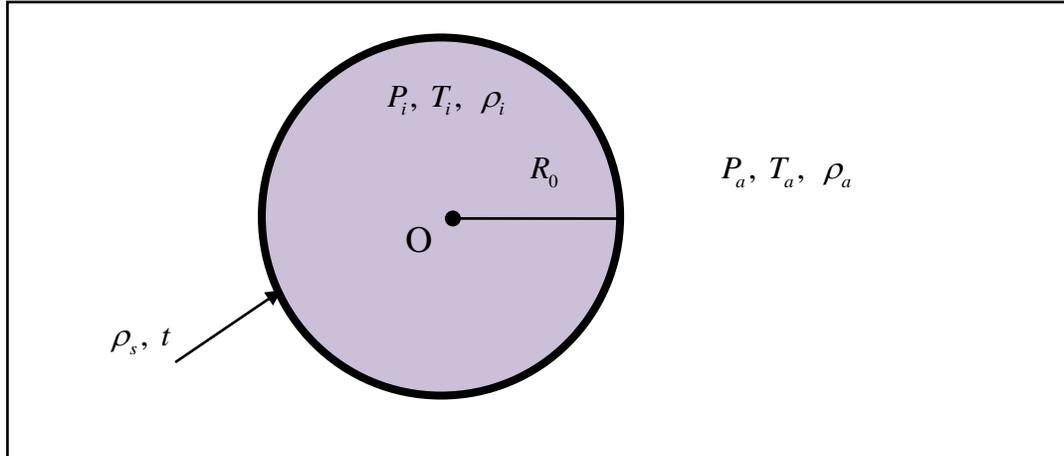


2. 解答

2.1 空気に囲まれたシャボン玉



球を半分に切り，射影領域での力のつり合いを考えると，

$$P_i \pi R_0^2 = P_a \pi R_0^2 + 2(2\pi R_0 \gamma) \quad \dots(1)$$

$$P_i = P_a + \frac{4\gamma}{R_0}$$

圧力と密度の関係は理想気体の状態方程式から導かれる：

$$PV = nRT \quad \therefore \quad P = \frac{\rho RT}{M} \quad (M \text{ は空気の分子量}) \quad \dots(2)$$

この式をシャボン玉の内側と外側に適用すると，

$$\rho_i T_i = P_i \frac{M}{R}$$

$$\rho_a T_a = P_a \frac{M}{R},$$

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = \left[1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] \quad \dots(3)$$

2.2 $\gamma=0.025\text{Nm}^{-1}$, $R_0=1.0\text{ cm}$, $P_a=1.013\times 10^5\text{ Nm}^{-2}$ を使うとこの比の値は,

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} = 1 + 0.0001 \quad \dots(4)$$

(表面張力による影響は非常に小さい。)

2.3 W をシャボン玉の全質量, B をシャボン玉の周りの空気による浮力とおくと,

$$\begin{aligned} W &= (\text{シャボン玉の膜と内部空気の質量})g \\ &= \left(4\pi R_0^2 \rho_s t + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_i \right) g \\ &= 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left[1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] g \end{aligned} \quad \dots(5)$$

シャボン玉の周りの空気による浮力は,

$$B = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g \quad \dots(6)$$

シャボン玉が静止した大気中で浮くとき,

$$\begin{aligned} B &\geq W \\ \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g &\geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left[1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] g \end{aligned} \quad \dots(7)$$

整理して,

$$\begin{aligned} T_i &\geq \frac{R_0 \rho_a T_a}{R_0 \rho_a - 3 \rho_s t} \left[1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] \\ &\geq 307.1 \text{ K} \end{aligned} \quad \dots(8)$$

内部の空気は約 7.1°C 温かくなければならない。

2.4 半径の変化は無視 \rightarrow 半径は $R_0=1.0\text{ cm}$ のまま

(実際は温度が 307.1 K から 300 K に下がったとき, 半径は 0.8% 小さくなる。石鹼膜自体も少し薄くなる。)

ストークスの法則によると, 空気抵抗力は,

$$F = 6\pi\eta R_0 u \quad \dots(9)$$

と表される。

シャボン玉が上昇気流の中で浮くとすると,

$$\begin{aligned} F &\geq W - B \\ 6\pi\eta R_0 u &\geq \left(4\pi R_0^2 \rho_s t + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_i \right) g - \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g \end{aligned} \quad \dots(10)$$

シャボン玉が熱平衡状態 $T_i = T_a$ にあるとき,

$$6\pi\eta R_0 u \geq \left(4\pi R_0^2 \rho_s t + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a \left[1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] \right) g - \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g$$

整理して,

$$u \geq \frac{4R_0 \rho_s t g}{6\eta} + \frac{\frac{4}{3} R_0^2 \rho_a g \left(\frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right)}{6\eta} \quad \dots(11)$$

2.5 数値は $u \geq 0.36 \text{ m/s}$

第2項は第1項よりも3桁ほど小さい

以下では表面張力の項を無視する

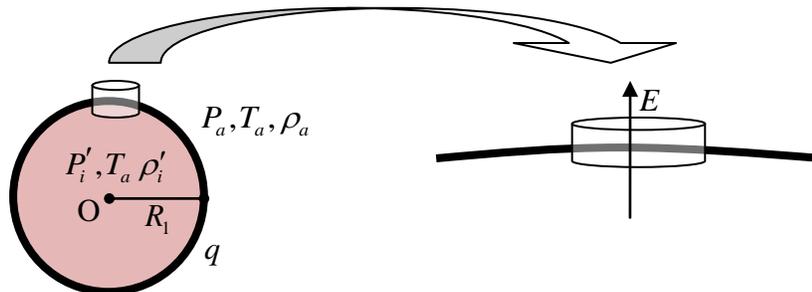
2.6 シャボン玉が帯電したとき, 電気的な斥力によりシャボン玉は膨張し, それにより浮力が大きくなる。

斥力/面積は, 表面の電場×電荷/面積と表せる。

石鹸膜の表面の電場を計算するには2つの方法がある。

A. ガウスの法則による方法

石鹸膜表面に非常に薄い小さな箱を考える。



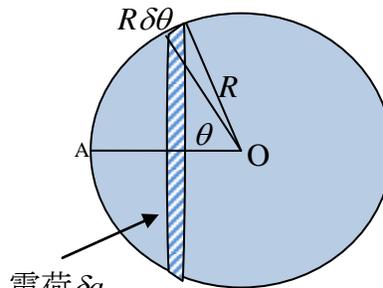
E は膜上の他の部分(箱の中自身を除く)によって作られる電場である。

$$\begin{aligned} E_q &= \text{箱のちょうど外側の電場} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ &= E + \text{表面の電荷 } \sigma \text{ による電場} \\ &= E + E_\sigma \end{aligned}$$

ガウスの法則から $E_\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ で、対称性からこれは膜に垂直である。

$$\text{よって, } E = E_q - E_\sigma = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q}{4\pi R_1^2} \quad \dots(12)$$

B. 積分を直接用いる方法



$$\delta q = \left(\frac{q}{4\pi R^2} \right) 2\pi R \sin \theta \cdot R \delta \theta$$

電気的な斥力の大きさを知るためには表面上の(外側ではない)の点での電場 E の強さをまず求める必要がある。

点 A 上での電場の \overrightarrow{OA} 成分は,

$$\delta E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q/4\pi R_1^2) 2\pi R_1^2 \sin \theta \delta \theta}{\left(2R_1 \sin \frac{\theta}{2} \right)^2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{(q/4\pi R_1^2)}{2\epsilon_0} \cos \frac{\theta}{2} \delta \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$$E_A = \frac{(q/4\pi R_1^2)}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=180^\circ} \cos \frac{\theta}{2} d \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{(q/4\pi R_1^2)}{2\epsilon_0} \quad \dots(13)$$

シャボン玉の表面での単位面積あたりの斥力は,

$$\left(\frac{q}{4\pi R_1^2}\right)E = \frac{(q/4\pi R_1^2)^2}{2\epsilon_0} \quad \dots(14)$$

シャボン玉が帯電した時の変化後の圧力と密度を P'_i , ρ'_i とおく。

この電気的な斥力は気体の圧力 P'_i を変化させる。

理想気体の法則から P'_i と P_i は次の関係を満たす。

$$P'_i \frac{4}{3}\pi R_1^3 = P_i \frac{4}{3}\pi R_0^3$$

$$P'_i = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 P_i = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 P_a \quad \dots(15)$$

最後の式では表面張力の項を無視した。

半球を射影した領域での力のつり合いから次のようになる。(ここでも表面張力の項は無視する。)

$$P'_i + \frac{(q/4\pi R_1^2)^2}{2\epsilon_0} = P_a \quad \dots(16)$$

$$P_a \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 + \frac{(q/4\pi R_1^2)^2}{2\epsilon_0} = P_a$$

整理して,

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right) - \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R_0^4 P_a} = 0 \quad \dots(17)$$

(17) 式から $q=0$ の時に期待通り $\frac{R_1}{R_0}=1$ となることに注意する。

2.7 $\frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R_0^4 P_a} \ll 1$ より, R_1 について近似計算を行う。

$R_1 = R_0 + \Delta R$, $\Delta R \ll R_0$ とする。ゆえに,

$$\frac{R_1}{R_0} = 1 + \frac{\Delta R}{R_0}, \quad \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 \approx 1 + 4\frac{\Delta R}{R_0} \quad \dots(18)$$

(17)式から,

$$\Delta R \approx \frac{q^2}{96\pi^2 \epsilon_0 R_0^3 P_a} \quad \dots(19)$$

$$R_1 \approx R_0 + \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 R_0^3 P_a} \approx R_0 \left(1 + \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 R_0^4 P_a} \right) \quad \dots(20)$$

2.8 シャボン玉が浮く条件は,

$$B \geq W$$

$$\frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_i g \quad \dots(21)$$

$\gamma \rightarrow 0$, $T_i = T_a$ から $\rho_i = \rho_a$ である。これと, $R_1 = R_0 \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0} \right)$ を代入して,

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0} \right)^3 \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g$$

$$\frac{4}{3} \pi (3\Delta R) \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g$$

$$\frac{4}{3} \pi \frac{3q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 R_0 P_a} \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g$$

$$q^2 \geq \frac{96\pi^2 R_0^3 \rho_s t \varepsilon_0 P_a}{\rho_a} \quad \dots(22)$$

$$q \approx 256 \times 10^{-9} \text{ C} \approx 256 \text{ nC}$$

ちなみに表面張力の項も考えると,

$$R_1 \approx \left(1 + \frac{q^2 / 96\pi^2 \varepsilon_0 R_0^4 P_a}{\left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right) \right]} \right) R_0$$