

# 物理チャレンジ2012

## 理論問題

2012年8月6日(月)

理論問題にチャレンジ 8:30~13:30

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問3題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

### <注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙、計算用紙、および電卓にも手を触れないこと。
2. 問題冊子は21ページである。解答冊子は14枚である。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答のみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は手をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(11:50)後は、退出希望者は手を挙げて監督者に知らせ、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて退室すること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

## 第1問 A (50点)

安定点(平衡点)のまわりの微小振動の現象は身の回りに多く見られ、振動に関する情報から振動する系の性質を調べることができる。ここでは、2原子分子の振動という現象を古典力学の立場から考えてみよう。

質量  $m_1$  を持つ原子 A と質量  $m_2$  を持つ原子 B が結合してできる分子を考える。2つの原子はたがいに力を及ぼし合っており、原子 A から原子 B にはたらく力を  $\vec{F}$  とする。なお、簡単のために、2つの原子が互いに及ぼし合う力のほかには、外部からはたらく力はないものとする。

この2つの原子が  $x$  軸上を運動する場合を考える。原子 A の加速度  $a_1$  と原子 B の加速度  $a_2$  を導入すると、それぞれの原子の運動方程式は

$$m_1 a_1 = -F \quad \text{および} \quad m_2 a_2 = F \quad (1)$$

となる。ここで作用反作用の法則を使った。図1の力の方向は引力の場合である。

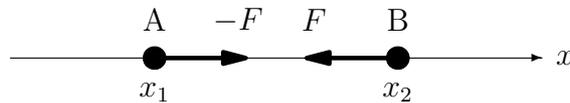


図1

原子 A の位置座標を  $x_1$ 、原子 B の位置座標を  $x_2$  とすると、一般に  $F$  は  $x_2 - x_1$  の関数である。したがって連立方程式(1)はこのままでは個別に解くことができないが、重心座標と相対座標を導入すると、これらはたがいに独立な2つの運動方程式に変換できる。

まず、

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

で定義される  $x_G$  は2つの原子の重心座標を表す。また

$$x = x_2 - x_1 \quad (3)$$

で定義される  $x$  は原子 A から見た原子 B の相対位置を表すが、以下では単に相対座標と呼ぶ。これらの座標の時間変化を、それぞれ重心運動および相対運動と呼ぶ。

ある粒子の加速度は座標の時間に関する2階微分を使って計算できる。例えば、原子 A の加速度は

$$a_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (4)$$

である。重心運動の加速度  $a_G$  も相対運動の加速度  $a$  も重心座標  $x_G$ 、相対座標  $x$  から同様に計算できる。

- 問1 (a) 2つの原子の重心は等速運動するか静止状態にある。その理由を述べよ。  
 (b) 相対運動の方程式

$$m a = F \quad (5)$$

を導け。ただし  $m$  は

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

で定義される量で、換算質量と呼ばれる。

重心の速度は、初期条件を与えると決まる。以後、重心は  $x_G = 0$  に静止している場合について考える。

問2 分子の振動の最も簡単なモデルとして、2つの原子を質量  $m_1$ 、質量  $m_2$  の質点と考え、2つの質点はばね定数  $k$ 、自然長  $R$  のばねでつながれているとしよう。  $t = 0$  でばねを自然長から  $r$  だけ伸ばして静かに放した。相対運動は単振動となり、一般に

$$x - R = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (7)$$

と表される。ここで  $C_1$  と  $C_2$  は定数である。運動方程式より角振動数  $\omega$  を求め、初期条件を満たすように  $C_1$  および  $C_2$  を決めよ。

このとき2つの質点の重心が静止状態を続けるとすれば、各質点の最初の変位  $r_1$  と  $r_2$  はそれぞれいくらか。

一般に力  $F(x)$  が座標の関数  $U(x)$  により

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (8)$$

と表されるとき、 $U(x)$  を力  $F(x)$  のポテンシャルと呼ぶ。  $x$  が相対座標で、 $F(x)$  のポテンシャルが  $U(x)$  であるとき

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x) = E \quad (9)$$

が成り立つ。ここで  $E$  は初期条件で決まる定数である。式(9)は相対運動のエネルギー保存則で、 $E$  は力学的エネルギーを表す。以下では  $U(x)$  を相対運動のポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）と呼ぶ。式(9)の左辺第1項は相対運動の運動エネルギーである。

問3 問2の力の場合に、相対運動のポテンシャルエネルギーを相対座標  $x$  の関数として導け。ただしポテンシャルエネルギーの極小値を0とする。

2原子分子の相対運動のポテンシャルエネルギーの、より現実的なモデルとしてよく使われるモーソ関数

$$U(x) = D \left\{ e^{-2\alpha(x-R)} - 2e^{-\alpha(x-R)} \right\} \quad (10)$$

を図2に示す。ここで  $\alpha$  は正の定数である。  $x = R$  のとき  $U(R)$  は極小値  $-D$  をとる。  $R$  は原子間の平衡距離を表す。

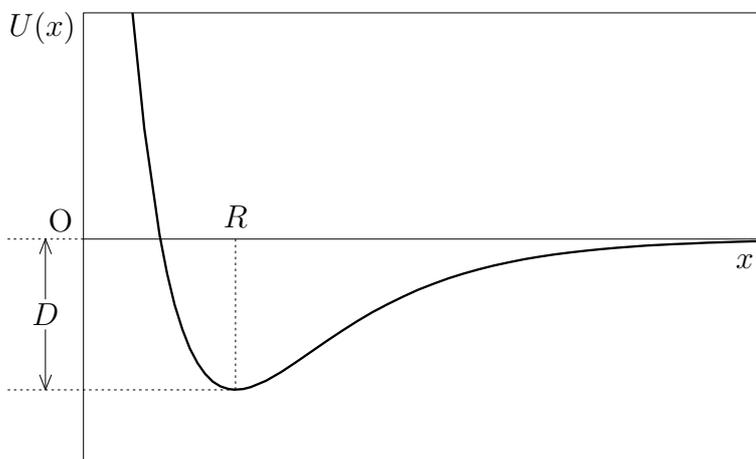


図2

問4 相対運動の力学的エネルギー  $E$  を  $E = -D + \varepsilon$  (ただし  $\varepsilon \geq 0$ ) と表すとき,  $\varepsilon$  がある限界を超えると分子の結合が切れてしまう。分子の結合が切れないための  $\varepsilon$  の範囲を示せ。

問5  $\varepsilon$  が十分小さいとき, 分子の相対運動は平衡点  $x = R$  の近傍における微小振動となる。

- (a)  $\alpha |x - R| \ll 1$  のとき  $U(x)$  の近似式を  $\alpha^2 (x - R)^2$  の項まで導き, 原子間の力の定数 (ばねの場合のばね定数に相当する係数)  $k$  を求めよ。必要なら,  $|z|$  が1に比べて十分小さいときに

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 \quad (11)$$

と近似できることを使え。

- (b) 相対運動の微小振動は単振動である。その角振動数  $\omega$  を換算質量  $m$  と  $\alpha, D$  を用いて表せ。
- (c) 単振動の振幅  $r$  を  $\varepsilon, \alpha, D$  を用いて表せ。

原子 A として炭素原子 (C), 原子 B として酸素原子 (O) を考える。このとき原子の質量  $m_1$  と  $m_2$  はそれぞれ 12.00 u と 15.99 u である。ただし  $1 \text{ u} = 1.660 \times 10^{-27} \text{ kg}$  である (u は統一原子質量単位と呼ばれる)。CO 分子に関して,  $\omega = 4.088 \times 10^{14} \text{ rad/s}$ ,  $D = 1.780 \times 10^{-18} \text{ J}$ ,  $R = 1.128 \times 10^{-10} \text{ m}$  であることが, 観測から知られている。

問6 観測値から, モース関数の定数  $\alpha$  や原子間の力の定数  $k$  を知ることができる。CO 分子の場合に  $\alpha$  および  $k$  の値を求めよ。

問7 微小振動の角振動数に近い角振動数の電磁波を CO 分子の集団に当てると, 共鳴によって CO 分子が振動を始める。そのような共鳴を起こす電磁波の真空中での波長を求めよ。この波長の電磁波は, X 線, 紫外線, 可視光, 赤外線, 電波のいずれに属するか。なお真空中の光速度は  $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$  とする。

## 第1問B (50点)

磁石の振る舞いは古い歴史を持つ物理現象で、電磁気学の研究において重要な役割を担ってきた。この磁石の性質を示す物体は強磁性体と呼ばれる。

どの磁石も「互いに異符号で大きさの等しい磁荷が離れて存在するもの」と考えて、その振る舞いを説明することができる。この場合、正磁荷のあるところがN極、負磁荷のあるところがS極である。磁荷は電荷に対応するものであるが、N極やS極の磁荷は単体では発見されてはならず、つねに対として存在する。磁荷を導入すると磁気を電気と同様に扱うことができる。

[I]

はじめに磁石同士の間にはたらく力について調べてみよう。簡単のために、太さの無視できる棒磁石を考えよう。棒磁石のN極側の磁荷を  $q$  ( $> 0$ )、S極側の磁荷を  $-q$  とする。ある距離において存在する逆符号の磁荷の対を磁気双極子という。

2つの磁荷  $q_1$  と  $q_2$  が距離  $r$  離れて存在するときに、これらの磁荷には互いに

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1)$$

という力が、互いの磁荷を結ぶ直線上にはたらく、 $F$  が正なら斥力、負なら引力である（磁荷に対するクーロンの法則）。ここで  $\mu_0$  は磁気定数（真空の透磁率）である。

磁荷  $\pm q$  が距離  $2d$  だけ離れて対になっている棒磁石はベクトル  $\vec{m}$  で表すことができる。このベクトルは磁荷  $-q$  から磁荷  $q$  を向き、大きさが  $m = 2qd$  である。 $\vec{m}$  を磁気双極子モーメントと呼ぶ。

さて、それぞれ磁荷  $\pm q$  が距離  $2d$  だけ離れて対になっている同じ大きさ  $m$  の磁気双極子モーメントをもつ2つの磁石を考えよう。

問1 2つの磁石を、互いの中心が  $2d$  より離れた距離  $R$  ( $> 2d$ ) に置く。次の場合に2つの磁石の間にはたらく力の大きさを求め、引力か斥力か述べよ。

- (a) 2つの磁石がともに、磁石の中心を結ぶ直線に垂直で、磁気双極子モーメントが平行で同じ向きの場合 (図1 (a))
- (b) 2つの磁石がともに、磁石の中心を結ぶ直線に垂直で、磁気双極子モーメントが平行で反対向きの場合 (図1 (b))
- (c) 2つの磁石がともに、磁石の中心を結ぶ直線上にあり、磁気双極子モーメントが同じ向きの場合 (図1 (c))
- (d) 2つの磁石がともに、磁石の中心を結ぶ直線上にあり、磁気双極子モーメントが反対向きの場合 (図1 (d))

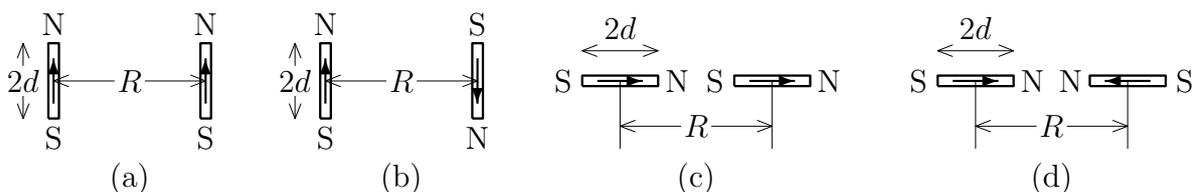


図1

問1で  $R \gg d$  のとき，磁石の間にはたらく力の大きさを近似的に表すことを考えよう。数学公式によれば， $|\Delta| < 1$  のとき任意の  $p$  に対して次のような展開が可能である。

$$(1 + \Delta)^p = 1 + p\Delta + \frac{1}{2}p(p-1)\Delta^2 + \dots \quad (2)$$

これを使うと， $R \gg d$  のときには，力の大きさは

$$\frac{q^2}{4\pi\mu_0 R^2} \left\{ c_1 \left(\frac{d}{R}\right)^2 + c_2 \left(\frac{d}{R}\right)^4 + c_3 \left(\frac{d}{R}\right)^6 + \dots \right\} \quad (3)$$

のように展開できる。ここで  $c_1 (\neq 0)$ ， $c_2$ ， $c_3$ ， $\dots$  は定数である。 $R \gg d$  なので  $\{ \}$  内の第2項以下は第1項に比べて十分に小さく，第1項が主要な項となり，主要な項を用いて力の大きさを近似的に表すことができる。

問2 問1(a)~(d)において  $R \gg d$  のとき，力の大きさの主要な項  $\left(\frac{1}{R^2}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right)$  に比例する項を求め，力の大きさを簡単な式に近似せよ。

一般に棒状の物体の両端に，図2のように，互いに平行で大きさの等しい逆向きの力がかかると，重心に加速度は生じないで棒は回転を始める。このような一対の力を偶力といい，力の大きさ  $F$  と2つの力の作用線間の距離  $l$  との積  $N = Fl$  を偶力のモーメントという。偶力のモーメントは，左回り（反時計回り）の回転を引き起こすときに正にとる。

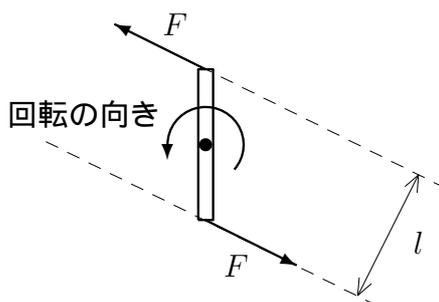


図2

問3 棒磁石が，磁気双極子モーメントを  $z$  軸正方向に向けて，原点に置かれている。もうひとつの棒磁石が，磁気双極子モーメントを  $x$  軸正方向に向けて， $x$  軸上に原点から距離  $R$  ( $\gg d$ ) の位置に置かれている。いずれの棒磁石も磁荷  $\pm q$  が距離  $2d$  だけ離れて対になっている (図3)。

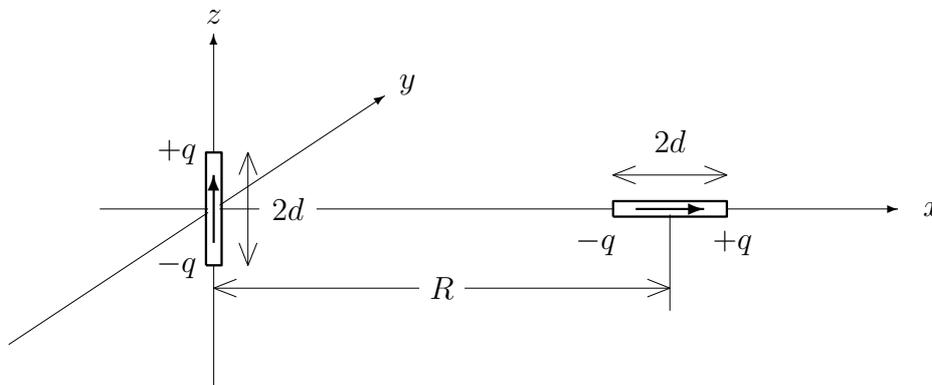


図3

- (a) 図3の右の棒磁石にはたらく力の合力の大きさ  $f$  と、棒磁石の中心を通り、 $y$  軸に平行な回転軸のまわりの力のモーメント  $N$  について問2と同様に主要な項（それぞれ  $\frac{1}{R^2} \left(\frac{d}{R}\right)^2, \frac{1}{R} \left(\frac{d}{R}\right)^2$  に比例する項）を求め、簡単な式に近似せよ。ただし、 $y$  軸正方向を向いて左回りのモーメントを正とする。
- (b) この磁石の両端に  $z$  軸に平行な偶力がはたらくとする。(a)と同じモーメントを与える偶力の大きさ  $f_c$  を求めよ。

[II]

磁荷  $q (> 0)$  は磁場  $\vec{H}$  の中に置かれると、 $\vec{H}$  の方向に大きさ  $F = qH$  の力を受ける。磁場の中に置かれた棒磁石がどのように振る舞うかを考えよう。簡単のため、棒磁石は、長さ  $2d$  の軽い棒の両端に質量  $M$ 、磁荷  $\pm q$  をもつ質点が固定されているというモデルで扱うことにしよう。

- 問4  $z$  軸正方向に大きさ  $H$  の一様な磁場がある。その中に棒磁石が  $z$  軸に対して  $\theta$  の角度を保っている（図4）。この磁石にはたらく偶力のモーメントの大きさ  $N$  を求めよ。

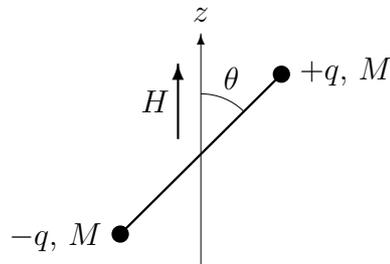


図4

- 問5  $z$  軸正方向の一様な磁場  $H$  の中で、はじめ  $z$  軸方向を向いていた棒磁石を角度  $\theta$  だけゆっくりと回転させた。この回転を行うためには仕事が必要である。この仕事は2つの質点の位置エネルギーを増加させる。一様な重力の作用を受ける質点と同様に考えて、位置エネルギーの増加から必要な仕事を求めよ。
- 問6 棒磁石を磁場の方向から角度  $\theta$  だけ回転させた後、静かに放した。棒磁石は回転振動を始めた。角度  $\theta$  が十分に小さいとして振動の周期  $T$  を求めよ。なお  $|\theta| \ll 1$  のとき  $\sin \theta$   $\theta$  と近似してよい。

さて、一様な磁場中では棒磁石のような磁気双極子にはたらく力の合力は0である。しかし、磁場が一様でなく  $+q$  の場所の磁場と  $-q$  の場所の磁場が異なっている場合には、磁気双極子にはたらく力の合力は0ではない。

- 問7 棒磁石の磁気双極子モーメントが  $z$  軸の正方向を向いている。 $z$  軸方向の磁場の強さ  $H$  が  $z$  とともに変化しており、その変化率  $\frac{\Delta H}{\Delta z}$  は考えている範囲内では一定であるとする。このとき棒磁石にはたらく合力の向きと大きさ  $f$  を求めよ。 $f$  は磁気双極子モーメントの大きさ  $m (= 2dq)$  を用いて表せ。ただし  $\frac{\Delta H}{\Delta z} > 0$  とする。

[III]

強磁性体の磁石は細かく分けていってもそれぞれが小さな磁気双極子である。それらはやがてミクロな原子・分子の世界へ至る。このミクロな世界で、強磁性をもたらしているものは電子であり、電子はそれ自体が小さな磁石となっている。

電子が小さな磁石であることを示したのは、1922年のシュテルンとゲルラッハによる巧妙な実験である。彼らは銀の蒸気を原子ビームとして、特有な形の電磁石の間を通過させると、2本の線に分離することを示した。

シュテルンとゲルラッハによる実験では、奥行きが長さ  $L$  で、N極とS極を断面が図5(a)のような中央付近で上下に一樣ではない磁場を作る電磁石を用いて、中央に細い銀の原子ビームを通過させた。その結果、後方のスクリーン上に中央が上下に2つに分離した銀原子が付着した(図5(b))。

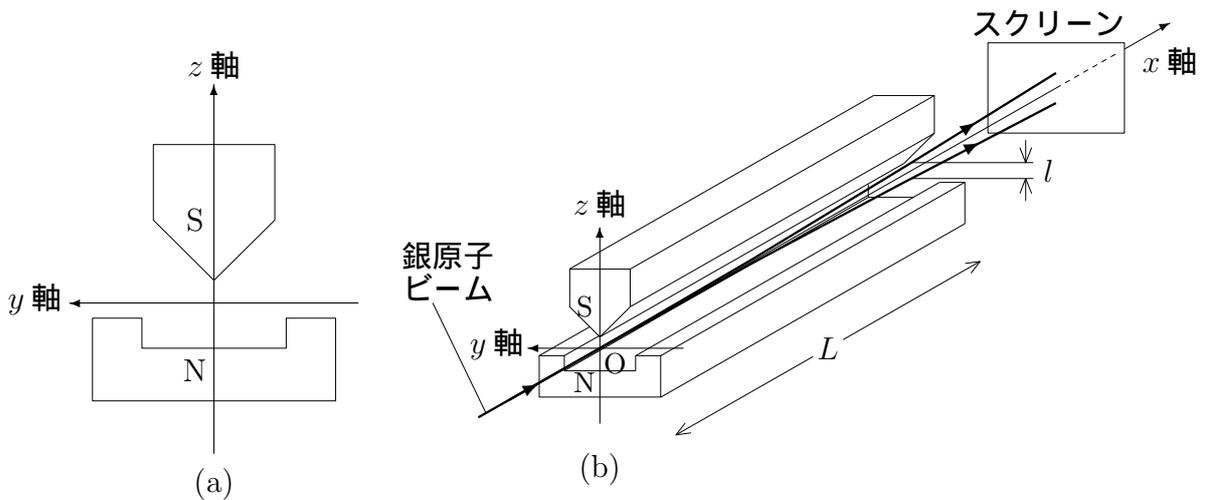


図5

問8 N極からS極へ向かう方向を  $z$  軸とする図5のような座標軸をとり、銀の原子ビームを  $x$  軸に沿って入射させる。銀原子の質量を  $A$  としよう。入射する銀原子ビームは  $z$  軸に対して正負の方向の磁気双極子モーメント  $\pm m$  をもった銀原子の集まりとする。銀原子の初速度を  $v$  とするとき、長さ  $L$  を通過したとき、分離した距離  $l$  を求めよ。ただし、ビームの経路で  $\frac{\Delta H}{\Delta z}$  は一定であるとする。

銀の原子は最外殻の1個の電子を除くと閉殻となっており、閉殻の電子は磁氣的性質はもたない。したがって銀原子ビームが2つに分離した原因は最外殻の1個の電子によるものと考えられる。この実験から電子は電荷を持っているだけでなく、小さな磁石であること、しかもその磁気双極子モーメントは磁場の方向または磁場とは逆方向の2つの方向だけしか向かないということがわかった。

一般には、電子の軌道運動は磁気双極子モーメントを生じるが、銀原子の最外殻電子の場合の軌道運動は、その寄与を生じないことが知られているので、観測された磁気双極子モーメントは電子自体(自転)に由来するものである。

この実験は、素粒子である電子が磁気双極子モーメントをもっていることを示すものとして、電子の磁氣的な性質だけでなく、量子力学の発展への重要な足がかりを与えた。

## 第2問 (100点)

昨年3月の東日本大震災以後，我が国におけるエネルギー事情は厳しい状況にある。当面は火力発電に頼ることが多いと思われる。火力発電では天然ガス，石油といった化石燃料を燃焼させ，その熱（熱エネルギー）を仕事（力学的エネルギー）に変換し，発電する。この際の熱効率を上げることが望ましい。一方，日常の生活で電力を冷暖房，冷却や給湯などに使用する場合には，熱の移動のための仕事（電気エネルギー）の利用効率を高めることが重要である。この熱と仕事間のエネルギー変換の問題は熱力学の問題である。

[I]

一般に，熱を仕事に変換する装置を熱機関と呼ぶ。熱機関では，図1に示すように高温熱源から熱  $Q_H$  を受け取り外部に対して仕事  $W$  をし，低温熱源に熱  $Q_L$  を放出する。熱機関はこれを周期的に繰り返す。このとき熱機関の効率，すなわち熱効率は

$$e = \frac{W}{Q_H}$$

で定義される。

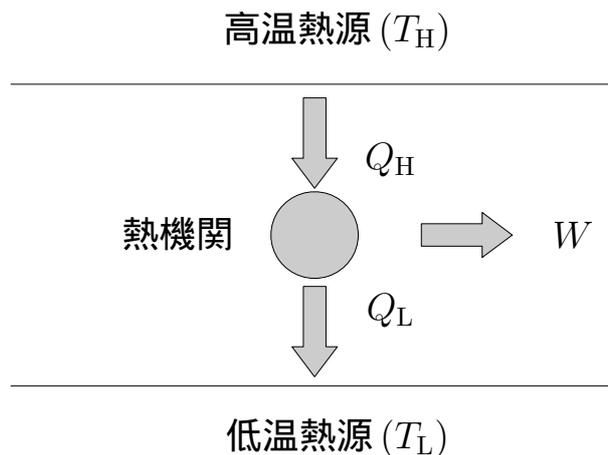


図1

熱機関の例として，なめらかに動くピストンで気体を閉じこめた図2のようなシリンダーを考える。左側の壁は熱を通すことができ，それを一定温度の熱源に接触させることによりシリンダー内の気体の温度を制御できるものとする。シリンダーの側壁やピストンは熱を通さない断熱材でできているものとする。この気体のように熱機関で使われる物質を作業物質という。シリンダーの中の気体の状態は圧力  $P$ ，体積  $V$ ，絶対温度  $T$ （以下，単に温度という。なお  $0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$  である。）で指定される。この気体もつエネルギーを内部エネルギーと呼ぶ。

気体の内部エネルギー  $U$  は気体の状態を指定すれば決まる物理量で， $P, V, T$  と同様に状態量と呼ばれる。気体の状態がどのような道筋を経て変化してもそれが始めの状態に戻れば，状態量の値は始めの値に戻る。ある系が状態変化をしたとき，「内部エネルギーの変化  $\Delta U$  は状態変化の間に系に吸収された熱量と外部からなされた仕事の和に等しい」。これを熱力学第1法則と呼ぶ。熱はエネルギーの一形態であり，この法則はエネルギーの保存則に他ならない。

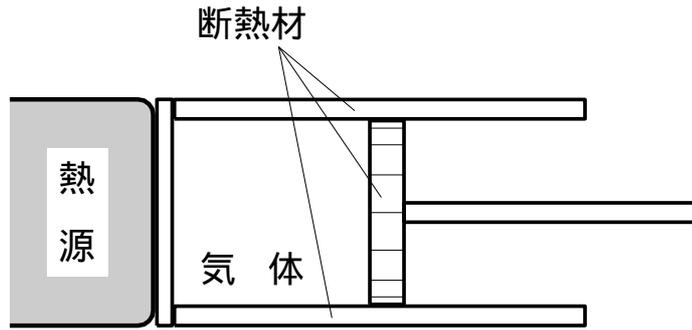


図 2

さて、図 2 のシリンダー内の気体の状態を図 3 で示すように、準静的に（平衡状態を保ちながらきわめてゆっくりと）変化させることを考える。すなわち

- A B: シリンダーの左側の壁を高温熱源（温度  $T_H$ ）に接触させ、気体の温度を  $T_H$  に保ったまま膨張（等温膨張）させる。このとき気体は正の熱量  $Q_H$  を高温熱源から吸収する。
- B C: シリンダーを熱源から離し、気体を断熱膨張させ、温度を  $T_L$  まで下げる。
- C D: シリンダーの左側の壁を低温熱源（温度  $T_L$ ）に接触させ、気体の温度を  $T_L$  に保ったまま圧縮（等温圧縮）する。このとき気体は正の熱量  $Q_L$  を低温熱源に放出する。
- D A: シリンダーを熱源から離し、気体を断熱圧縮し、温度を  $T_H$  まで上げる。

この 4 つの過程のうち、最初の 2 つの膨張の過程では気体は外部に仕事をし、最後の 2 つの圧縮の過程では外部から仕事をされる。差し引き外部にした正味の仕事  $W$  は図 3 の図形 ABCD の面積で表される。

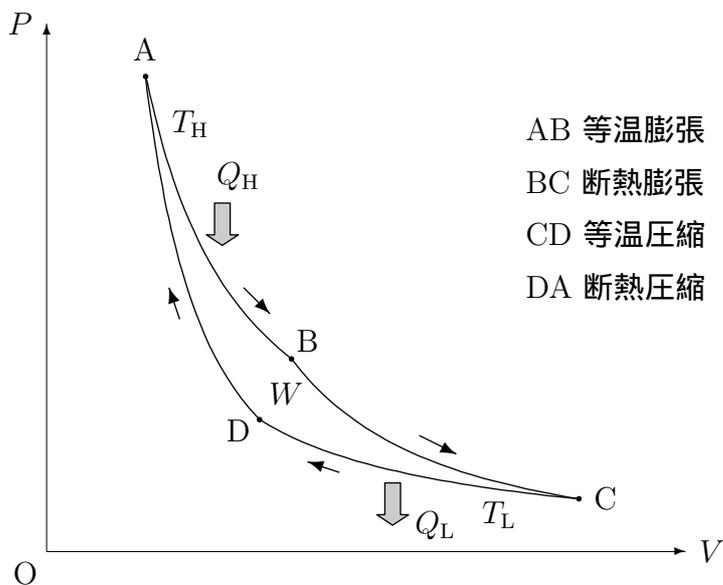


図 3

一般に、熱機関の周期的運動や作業物質の周期的変化をサイクルという。特に、ここで考察しているサイクルはカルノーによって最初に研究されたのでカルノーサイクルと呼ばれてい

る。カルノーサイクルを利用する熱機関をカルノー熱機関という。気体の状態が1サイクル変化する間に出入りする熱や仕事とその間の内部エネルギーの変化  $\Delta U$  の間には熱力学第1法則により

$$\Delta U = Q_H - W - Q_L \quad (1)$$

の関係がある。

問1 内部エネルギーが状態量であることを考慮し、式(1)の  $Q_H$ ,  $Q_L$ ,  $W$  の間に成り立つ関係を求めよ。これによりカルノー熱機関の効率  $e_c \left( = \frac{W}{Q_H} \right)$  を  $Q_H$ ,  $Q_L$  で表せ。

前述の準静的な変化は逆向きの変化も起こり得る可逆過程である。一方、高温の物体と低温の物体とを接触させると、やがて2つの物体は同じ温度になるが、熱が逆の方向に流れて物体の温度がもとに戻ることはない。このような、温度差のある2物体の間の熱の流れは、逆向きの変化が起こらない不可逆過程である。

われわれはこれと類似のことを多く経験している。熱現象の不可逆性はクラウジウスとトムソン(後のケルビン卿)により研究され、熱力学第2法則として以下の互いに同等な2つの原理として記述される。

#### クラウジウスの原理

「低温の物体(低温熱源)から高温の物体(高温熱源)に熱を移すほかに、外に対してなにも変化を残さないような過程は不可能である」

#### トムソンの原理

「一つの熱源から熱をとり、外に対して正の仕事をするだけでほかになにも変化をもたらさない過程は不可能である」

クラウジウスは不可逆性を定量的に記述するために以下のように定義されるエントロピー  $S$  を導入し、 $S$  が状態量であることを示した。温度が  $T$  である系に熱量  $Q$  が吸収されたとき、この系のエントロピーの変化  $\Delta S$  は次の式で与えられる。

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad (2)$$

また温度の異なるいくつかの部分からなる系のエントロピーは各部分のエントロピーの和である。

閉じた系(熱や仕事などのエネルギーの出入りも、物質の出入りもない系)ではエントロピーは増大するか不変にとどまり、減少することはない。これをエントロピー増大の法則という。カルノーサイクルにおけるように断熱膨張過程や断熱圧縮過程が可逆的に行われれば、エントロピーは変化しないが、不可逆的であればエントロピーは増大する。詳しい議論によるとエントロピー増大の法則は熱力学第2法則のもう一つの表現になっている。

問2 温度が  $T_H$  と  $T_L$  ( $T_H > T_L$ ) の2つの物体を短時間接触させたところ、微小な熱  $Q$  が移動した。このときの2つの物体を合わせた全体のエントロピー変化  $\Delta S$  を  $T_H$ ,  $T_L$ ,  $Q$  で表し、この不可逆過程でエントロピーが増大することを確かめよ。ただし、2つの物体の熱容量が十分大きいので、この熱の移動の間に両物体の温度は変わらないものとする。

ここでカルノーサイクルに戻ろう。カルノーサイクルのすべての過程は可逆過程である。図3の等温膨張過程 AB では、この気体は高温熱源（温度  $T_H$ ）から熱量  $Q_H$  を受け取るから、上述のエントロピーの定義 (2) によれば、この気体のエントロピーは  $\Delta S_{AB} = \frac{Q_H}{T_H}$  だけ増加することになる。

- 問3 BC, CD, DA の各過程における気体のエントロピーの変化  $\Delta S_{BC}$ ,  $\Delta S_{CD}$ ,  $\Delta S_{DA}$  をそれぞれ計算した後、1 サイクルが終了し、始めの状態 A に戻るまでの間の、この気体のエントロピーの変化の合計  $\Delta S$  を  $Q_H, T_H, Q_L, T_L$  を用いて表せ。エントロピー  $S$  が状態量であることを考慮すると、 $Q_H, T_H, Q_L, T_L$  の間にどのような関係が成立するか。
- 問4 前問の結果を用いてカルノー熱機関の効率  $e_c$  を高温熱源の温度  $T_H$  と低温熱源の温度  $T_L$  のみを用いて表せ。

上記のカルノーサイクルのように状態変化の各過程が可逆であるサイクルを可逆サイクルという。現実の熱機関では不可逆性が各過程においてつねに存在し、作業物質中に余分なエントロピーが発生する。もし図3の状態変化 A B, B C, C D, D A が不可逆過程を含むとき、1 サイクルの間に不可逆性由来して作業物質中に発生するエントロピーの総和を  $S_i (> 0)$  としよう。

以下に出てくるエントロピーは、すべてこれまでのように、作業物質である気体中のエントロピーである。

- 問5 この熱機関が1サイクルを行う間のエントロピーの変化の合計  $\Delta S$  を  $Q_H, T_H, Q_L, T_L$  および  $S_i$  を用いて表せ。再びエントロピー  $S$  が状態量であることを考慮することにより、この熱機関の効率  $e = \frac{W}{Q_H}$  は、同じ温度の熱源を使うカルノー熱機関の効率  $e_c$  より小さいことを示せ。

一般に、可逆サイクルを利用した熱機関の効率は熱効率の理論的上限であることが知られている。

ここで最近の火力発電の熱効率について考えよう。特に液化天然ガス (LNG) を燃料とする発電においてはその熱効率は近年著しく改善されてきており、発電における熱効率は60%程度に近づいている。この高効率は、ガスタービンと蒸気タービンを組み合わせたコンバインドサイクル (Combined Cycle) 発電によって達成された。この発電では、ガスタービンは燃料の燃焼等で生成された高温のガスでタービンを回し、発電する。ガスタービンの排気ガスも十分高温であるので、この高温ガスを高温熱源として再利用し、蒸気タービンによる発電を行う。

- 問6 簡単のためにコンバインドサイクル発電を理想化し、ガスタービンと蒸気タービンを2つの可逆カルノー熱機関として扱い、ガスタービンの低温熱源に排出される熱はすべて蒸気タービンで利用されるとする。ガスタービンの高温熱源の温度を  $T_{gH}$ 、低温熱源の温度を  $T_{gL}$  とし、その熱効率を  $e_g$  とする。また蒸気タービンの高温熱源の温度を  $T_{sH}$ 、低温熱源の温度を  $T_{sL}$ 、その熱効率を  $e_s$  とする。
- (a) コンバインドサイクル全体を一つの可逆サイクルと見なしたときの熱効率  $e_{cc}$  を  $e_g$  および  $e_s$  により表せ。
- (b)  $e_{cc}$  を  $T_{gH}, T_{gL}, T_{sH}, T_{sL}$  により表せ。

- (c) ガスタービンの燃焼温度を  $1500^{\circ}\text{C}$  , 発電後の排気ガスの温度を  $600^{\circ}\text{C}$  とする。また蒸気タービンに対する高温熱源の温度は  $600^{\circ}\text{C}$  とし, その低温熱源の温度は  $100^{\circ}\text{C}$  とする。コンバインドサイクルの熱効率はガスタービンのみを用いた場合の熱効率の何倍か。

## [II]

前項では理想的な熱機関を構成するカルノーサイクルの熱効率を求め, 現実的な熱機関として不可逆過程の存在するサイクルの熱効率について考察した。次にシリンダー中の気体に外部から仕事を行い, 低温熱源から高温熱源へ熱をくみ上げる装置(ヒートポンプ)を考えよう(図4)。例として逆カルノーサイクルを利用するヒートポンプを取り上げよう。逆カルノーサイクルとは, 図2のシリンダーの中の気体に外部から仕事  $W(> 0)$  を行い, 低温熱源 ( $T_L$ ) から熱  $Q_L$  を吸収し, 高温熱源 ( $T_H$ ) に熱  $Q_H$  を放出するサイクルである。カルノーサイクルでは図3において気体の状態変化の過程は時計まわりに行われたが, 逆カルノーサイクルでは反時計まわりに行われる。気体はDの状態から出発し, 次の4つの準静的過程を経て始状態Dに戻る。

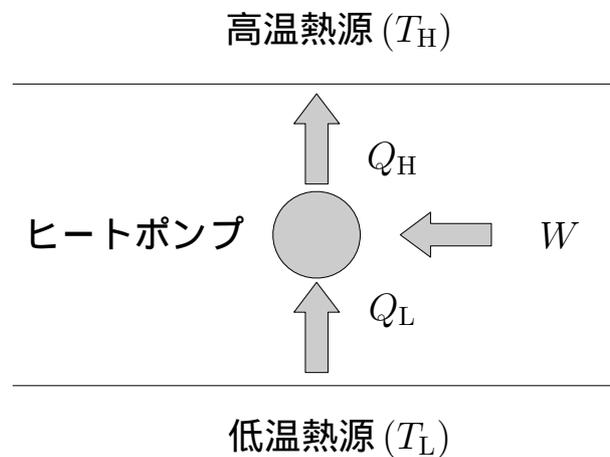


図4

- D C: シリンダーの左側の壁を低温熱源(温度  $T_L$ )に接触させ, 気体の温度を  $T_L$  に保ったまま膨張(等温膨張)させる。このとき気体は正の熱量  $Q_L$  を吸収する。  
 C B: シリンダーを熱源から離し, 気体を断熱圧縮し, 温度  $T_H$  まで上げる。  
 B A: シリンダーの左側の壁を高温熱源(温度  $T_H$ )に接触させ, 気体の温度を  $T_H$  に保ったまま, 圧縮(等温圧縮)する。このとき気体は正の熱量  $Q_H$  を放出する。  
 A D: シリンダーを熱源から離し, 気体を断熱膨張させ, 温度を  $T_L$  まで下げる。

逆サイクルの場合は, シリンダー中の気体はC B, B Aの圧縮過程では外部から仕事をされ, D C, A Dの膨張過程では外部に仕事をする。この差し引きが気体に対して外部からされた正味の仕事  $W$  であり, 図3の図形 ABCD の面積で表される。

逆カルノーサイクルは準静的過程からなるから, カルノーサイクルと同じように可逆サイクルである。

- 問7 逆カルノーサイクルの1サイクルの間の気体の内部エネルギーの変化  $\Delta U$  を  $Q_H$ ,  $Q_L$ ,  $W$  で表せ。内部エネルギーが状態量であることを考慮し, これらの3つの量の間の関係を求めよ。

- 問 8 逆カルノーサイクルの 1 サイクルの間の各過程におけるエントロピーの変化の合計  $\Delta S$  を  $Q_H, T_H, Q_L, T_L$  を用いて表せ。次に、エントロピーが状態量であることを考慮し、 $Q_H, T_H, Q_L, T_L$  の間の関係を求めよ。
- 問 9 室内を低温熱源とし、屋外を高温熱源として、ヒートポンプを冷房装置として使う。一般の冷房装置の冷房の効率を  $\varepsilon = \frac{Q_L}{W}$  と定義し、特に逆カルノーサイクルによる可逆なヒートポンプの効率を  $\varepsilon_{rc}$  とする。 $\varepsilon_{rc}$  を温度  $T_H, T_L$  のみで表せ。

これまではすべての過程が可逆過程であると仮定してきた。現実には不可逆性に起因するエントロピーがサイクルの各過程でつねに発生する。

- 問 10 1 サイクルの間に不可逆性に由来して作業物質中に発生するエントロピーを  $S_i (> 0)$  とする。逆カルノーサイクルの 1 サイクルの間の全過程のエントロピーの変化の合計  $\Delta S$  を  $Q_H, T_H, Q_L, T_L$  および  $S_i$  で表せ。エントロピーが状態量であることを考慮し、 $Q_H, T_H, Q_L, T_L$  および  $S_i$  の間に成り立つ関係を求めよ。この場合、不可逆過程を含む一般の冷房装置の効率  $\varepsilon$  は同じ温度の熱源を使う逆カルノーサイクルによるヒートポンプの冷房の効率  $\varepsilon_{rc}$  よりも小さいことを示せ。

可逆サイクルによる熱機関が熱効率に関して理想的であるのと同様に、逆カルノーサイクルのような可逆サイクルを用いたヒートポンプは、冷房の効率に関していえば、理想的な冷房装置である。

- 問 11 屋外を温度  $30^\circ\text{C}$  の高温熱源とし、室内を温度  $25^\circ\text{C}$  の低温熱源とするとき、冷房の効率の理論的上限  $\varepsilon_{rc}$  を計算せよ。室内の温度を高めめに設定し、 $27^\circ\text{C}$  に変更したとき  $\varepsilon_{rc}$  はいくらになるか。また室内から毎秒  $1000\text{ J}$  の熱を取り出すための必要な最小の電力はそれぞれ何  $W$  か。
- 問 12 上記の議論は冷蔵庫による冷却の場合についても、冷蔵庫内を低温熱源とし、冷蔵庫の置かれている室内を高温熱源とすれば、まったく同様に成立する。すべての過程を可逆的とした場合、冷蔵庫内の温度を  $0^\circ\text{C}$  とし、室内の温度を  $27^\circ\text{C}$  とするとき、この理想的冷蔵庫の冷却の効率  $\varepsilon_{rc}$  を求めよ。低温熱源である冷蔵庫の中から、毎秒  $1000\text{ J}$  の熱を取り去るために必要な最小の電力は何  $W$  か。

参考：暖房給湯の場合も、冷房冷却についての考察と同様な議論が可能である。例えば、暖房に関しては、室内を高温熱源、屋外を低温熱源とし、逆カルノーサイクルによる可逆なヒートポンプの暖房の効率（気体に仕事  $W$  をして屋外から室内に熱  $Q_H$  をくみ上げる効率  $Q_H/W$ ）について、冷房の場合と同様な考察をすればよい。なお、ヒートポンプの効率を実用上はエネルギー消費効率（Coefficient of Performance：略称 COP、または成績係数ともいう）と呼び、我々が日常、家庭で使用しているエアコンの性能を示す重要な指標である。最近のデータによれば、エネルギー消費効率は最も良い場合でも  $6 \sim 7$  程度で、可逆なヒートポンプの効率に比べてかなり低い。エネルギーの有効利用を行うために、排熱等を有効に再利用することに加えて、熱機関の熱効率やヒートポンプの効率をそれらの理論的上限に近づける（すなわち、不可逆性に起因する損失を減らす）技術的な側面からの努力が必要である。

### 第3問 (100点)

[I]

今から約80年前にハッブルは遠方の銀河が、地球からその銀河までの距離に比例する速度で遠ざかっていることを発見した。これはハッブルの法則と呼ばれ、銀河が遠ざかる速度を後退速度という。遠い銀河からの可視光の波長が長い(赤い)方へずれていること(赤方偏移と呼ばれている)を発見し、波長が長くなる理由を光のドップラー効果と解釈して、銀河が後退する速度に結び付けた結果である。宇宙膨張の発見だった。銀河までの距離  $D$  と後退速度  $v$  の間には、 $v$  が光速  $c$  に比べ十分小さければ、比例関係、

$$v = H_0 D \quad (1)$$

があり、比例係数  $H_0$  はハッブル定数と呼ばれる(数値は表1参照)。なお、天体までの距離( $D$ )の単位として、1光年(光が1年間に進む距離)が使われることがある(例えば  $\frac{c}{H_0}$  は約140億光年となる)。

表1. 物理定数

$c$ (光速)	$3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$
$H_0$ (ハッブル定数)	$1 / (140 \text{ 億年})$
$G$ (万有引力定数)	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$

問1 原子は高温で原子に固有の波長の光を出す。例えば実験室で水素原子から放出される光には、波長が  $\lambda_\alpha = 656.28 \text{ nm}$ ,  $\lambda_\beta = 486.13 \text{ nm}$ ,  $\lambda_\gamma = 434.05 \text{ nm}$  などの固有の光がある。ある銀河から出て地球に届いた種々の固有の光の波長の比が地上の実験室の値と同じで、波長の大きさがどれも地上の実験室の値より2.0%長くなっていた。これは光のドップラー効果であると考え、音のドップラー効果との類推から、式(1)を用いて、この銀河までの距離は何光年と推定されるか答えよ。ただし後退速度はとても速いので、それに比べて地球や太陽の運動は無視してよい。

ハッブルの法則(1)は観測者の位置の選び方によらず成り立つことを確かめてみよう。

問2 地球Eを原点として銀河Aの位置ベクトルを  $\vec{D}_{EA}(t)$  とすると、式(1)は  $\vec{v}_{EA} = \frac{d\vec{D}_{EA}(t)}{dt} = H_0 \vec{D}_{EA}(t)$  と表される。別の銀河Cの位置ベクトルを  $\vec{D}_{EC}(t)$  とし、仮に銀河Cに観測者がいるとすると、そこから見た銀河Aの位置ベクトル  $\vec{D}_{CA}(t)$  は  $\vec{D}_{CA}(t) = \vec{D}_{EA}(t) - \vec{D}_{EC}(t)$  と表されるだろう(図1)。このとき銀河Cの観測者から見た銀河Aの速度と銀河までの距離の関係も、ハッブルの法則(1)が同じ形で成り立つことを示せ。

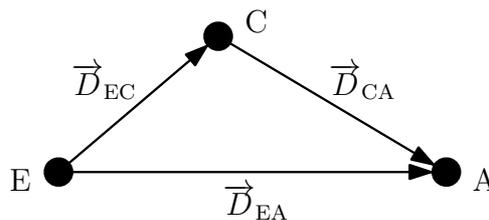


図1

さて，ハッブルの法則 (1) をもう少し詳しく見てみよう。風船で作った地球儀のような球面を想像しよう (図 2)。風船を膨らませると，時刻  $t$  における球表面の任意の 2 点  $AB$  間の距離  $D_{AB}(t)$  は風船の膨張とともに増大する。 $D_{AB}(t)$  は，時間だけによる係数  $a(t)$  と時間によらない距離  $r_{AB}$  (例えば緯度の差などで表される膨張に依存しない値) を用いて， $D_{AB}(t) = a(t) r_{AB}$  と表されるだろう。

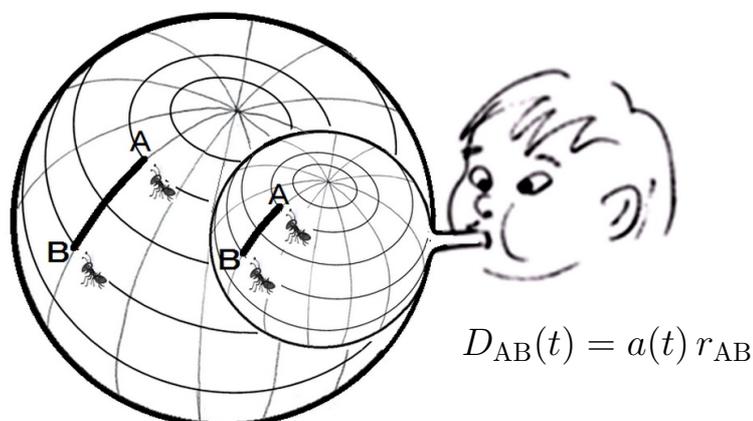


図 2. 風船球の膨張

$AB$  が互いに遠ざかることは，宇宙の膨張と解釈する。蟻の大きさは変わらないが，互いの距離  $D_{AB}$  は増加する。一方  $r_{AB}$  は緯度の差のように膨張するだけでは変わらない。

これと同様に，宇宙が一様な膨張をすると，時刻  $t$  における任意の 2 点  $A, B$  間の距離  $D_{AB}(t)$  は，時間によらない距離  $r_{AB}$  と，時間だけの関数  $a(t)$  を用いて，

$$D_{AB}(t) = a(t) r_{AB} \quad (2)$$

と表される。宇宙が膨張しても変化しない  $r_{AB}$  は共動距離と呼ばれる。時刻  $t$  の実際の距離  $D_{AB}(t)$  は固有距離と呼ばれる。 $a(t)$  は宇宙のスケール因子と呼ばれる。以下では現在の時刻を  $t_0$  と表す。現在のスケール因子の値  $a(t_0)$  を  $a_0$  と略記することがある。

(実際の宇宙空間は 3 次元だが，上ではわかりやすいように宇宙を風船球の表面の 2 次元空間になぞらえた。そのため宇宙の大きさは有限になってしまったが，実際の宇宙は有限か無限かわからない。しかし，ごく狭い領域を考えれば，球面は平面で近似できるように，空間の曲りは無視できるだろう。実際の宇宙は広い領域まで曲がりほぼ無視できることが観測で確かめられている。)

## [II]

宇宙膨張と深く関係している宇宙のエネルギー密度を考察しよう。

質量  $m$  の静止した物体は，光速  $c$  を用いて，アインシュタインの関係

$$E = mc^2 \quad (3)$$

で表されるエネルギー  $E$  をもつ。そのため，物質のエネルギー密度  $\rho_m$  (添え字  $m$  は matter = 物質を意味する) は，質量密度  $\mu$  を用いて，

$$\rho_m = \mu c^2 \quad (4)$$

と表される。ここで物質とは、原子や分子のほかに、我々には未知の粒子もあり得るが、それらも含めて粒子の質量や数は宇宙が膨張しても変わらないと考える。すると質量密度  $\mu$ 、したがって物質のエネルギー密度  $\rho_m$  は宇宙膨張と共に、膨張する体積に反比例して減少する。体積は固有距離の 3 乗に比例するので、スケール因子の 3 乗に比例して増加する。ゆえに  $\rho_m$  は現在の時刻  $t_0$  における値を  $\rho_m(t_0)$  として、

$$\rho_m(t) = \rho_m(t_0) \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^3 \quad (5)$$

と変化するだろう。

もう一つの重要なエネルギー密度に「真空のエネルギー密度」がある。最近の研究から、真空には実際にエネルギー密度があること、そして、その影響で宇宙膨張の速度が増大しつつあることが発見され、その発見の功績で 2011 年に S. Perlmutter 等 3 人がノーベル賞を受賞した。

真空の性質は宇宙が膨張しても変わらず、真空のエネルギー密度は宇宙が膨張しても変わらず一定と考えられる。このことは、真空のエネルギー密度を  $\rho_v$  (添え字  $v$  は vacuum = 真空を意味する) と書くと、

$$\rho_v(t) = \rho_v(t_0) = (\text{一定}) \quad (6)$$

と表される。以下では真空のエネルギー密度について、この性質 (6) を使う。

宇宙の全エネルギー密度  $\rho$  は  $\rho_m(t)$  と  $\rho_v(t)$  の和となる。

宇宙のスケール因子  $a(t)$  は、その時間変化率  $\frac{da}{dt}$  と共に、宇宙のエネルギー密度  $\rho$  と関係し、次の式が知られている。

$$\left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^2 + K \quad (7)$$

ここで  $G$  は万有引力定数 (表 1 参照)、 $K$  は後で論じる別の定数である。

式 (7) は、宇宙の真空のエネルギー密度がない場合 ( $\rho = \rho_m$ ) には、式 (4) と古典的なニュートンの法則を用いて以下のように理解される。

一般に 2 つの物体の間には万有引力がはたらき、その大きさは万有引力の法則「力は両物体の質量  $m_1, m_2$  の積に比例し、物体間の距離  $D_{12}$  の 2 乗に反比例する」にしたがう。

今、観測者が原点  $O$  にいて (図 3)、宇宙膨張と共に周囲の物質は均一に点  $O$  から遠ざかると想定し、宇宙膨張と共に  $O$  から離れて行く任意の物体  $A$  の運動を考えよう。 $A$  の質量を  $m$ 、 $OA$  の距離を  $D$  とする。ここに  $D$  は宇宙膨張と共に増大し、式 (2) から定数  $r$  を使って

$$D(t) = a(t)r \quad (8)$$

と表される。 $A$  より外側にある物質が物体  $A$  に及ぼす万有引力は全ての方向から  $A$  を引っ張り、相殺し合い、 $A$  には力を及ぼさないだろう。一方、 $A$  より内側にある半径  $D$  の中の物質が  $A$  に及ぼす万有引力は、半径  $D$  内の物質の総質量  $M$  が、中心  $O$  に集中している場合と等しい大きさで  $A$  を引っ張ることになる。したがって、 $A$  の受ける万有引力は、万有引力の法則により

$$f = -\frac{GmM}{D^2}$$

と表される。比例係数  $G$  は万有引力定数である。力の符号は、力が距離  $D$  を大きくする方向 (斥力) を正とし、負の場合は引力を表す。物体  $A$  の遠ざかる速度は  $v = \frac{dD}{dt}$ 、加速度は  $\frac{dv}{dt}$

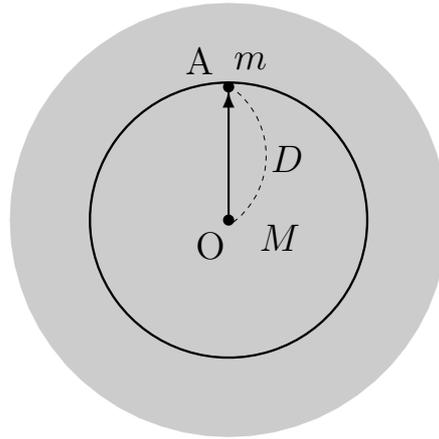


図 3

である。ニュートンの運動の法則「物体の質量と加速度の積は、物体の受ける力に等しい」から、物体 A の運動は、

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{GmM}{D^2} \quad (9)$$

にしたがう。上式で質量  $M$  が膨張にもかかわらず時間的に一定であることを注意すると

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{D} = C \text{ (一定)} \quad (10)$$

が導かれる。

問 3 式 (10) を導け。

ヒント：式 (10) の左辺を時間で微分してみよ。なお  $v = \frac{dD}{dt}$  に注意せよ。

ところで  $M$  は宇宙の質量密度  $\mu$  を用いると  $M = \frac{4\pi}{3} \mu D^3$  であり、式 (4) から、それは

$$M = \frac{4\pi}{3c^2} \rho_m D^3 \quad (11)$$

と表される。

問 4  $\rho = \rho_m$  の場合に、式 (8) , (10) , (11) から、式 (7) を導け。

上の議論で、エネルギー密度  $\rho$  が物質のエネルギーだけである場合に式 (7) を導くことができた。実は、式 (7) はエネルギー密度  $\rho$  が真空のエネルギー密度を含めた一般の場合にも成り立つことが一般相対性理論によって知られている。以下では一般に式 (7) を仮定しよう。

さて、式 (10) は、 $C > 0$  なら物体 A は無限に遠く  $\left(D \rightarrow \infty, \frac{GM}{D} \rightarrow 0\right)$  まで行っても速度が  $v = \sqrt{2C}$  で有限に残り、宇宙は膨張し、 $C < 0$  なら物体は無限に遠く  $\left(\frac{GM}{D} \rightarrow 0\right)$  へは行けず、宇宙はいつか膨張を止め、そこから収縮へ向かうことを意味する。最近の宇宙の観測から、宇宙は膨張し続けるか将来止まるかの境界の  $C = 0$  に近いこと、そのため定数  $K$  がほぼゼロ

であることが知られている。以下では  $K = 0$  を仮定しよう。すると式 (7) は  $\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^2$  となるが、

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (12)$$

を導入して

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3c^2}} \quad (13)$$

と書くことができる。また、式 (8) を時間で微分して

$$v = \frac{da}{dt} r = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right) (ar) = HD \quad (14)$$

となる。地球近傍でこの式を考え、式 (1) と (14) を比較すると、 $H(t)$  の現在の値  $H(t_0)$  が  $H_0$  であり、式 (13) に現在の宇宙のエネルギー密度  $\rho_0$  と現在の  $H$  の値  $H_0$  を用いると次の関係が成り立つことがわかる。

$$H_0 = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3c^2}} \quad (15)$$

問5 式 (15) と表1の数値を用い、現在の宇宙のエネルギー密度  $\rho_0$  を求めよ。また、その値は、体積  $1 \text{ m}^3$  当たり水素原子何個分の静止エネルギー (3) に相当するか求めよ (有効数字2桁でよい)。ただしアボガドロ定数は  $N_A = 6.022 \times 10^{23} / \text{mol}$  とする。

### [III]

1つの光子が時刻  $t$  に星から出て、地球へ向かい、現在の時刻  $t_0$  に地上の観測者へ届いたとする。このときの宇宙膨張の影響を考えよう。光が微小な時間  $\Delta t$  の間に共動距離  $\Delta r$  を移動すると、光の実際に移動する距離 (固有距離) は、光速度  $c$  を用いて

$$\Delta D = a(t) \Delta r = c \Delta t \quad \frac{dr}{dt} = \frac{c}{a(t)} \quad (16)$$

となる。星までの共動距離  $r$  は  $r = \int_0^r dr = \int_t^{t_0} \frac{dr}{dt} dt$  で、ここに (16) を用い、 $r = \int_t^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt$  となるので、星までの現在の固有距離  $D$  は、現在のスケール因子  $a_0 = a(t_0)$  を用いて、

$$D = a_0 r = c \int_t^{t_0} \frac{a_0}{a(t)} dt \quad (17)$$

と表される。ここで、赤方偏移パラメータと呼ばれる量  $z$  を

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z \quad (18)$$

で定義する。 $z$  は時刻  $t$  の関数で、現在の時刻  $t_0$  では  $z = 0$  である。式 (18) を時間で微分して得られる関係  $\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0}{a^2} \frac{da}{dt} = -H \frac{a_0}{a}$  (式 (12) 参照) を用いると、

$$\int_0^z \frac{dz}{H} = \int_{t_0}^t \frac{1}{H} \frac{dz}{dt} dt = \int_{t_0}^t \frac{a_0}{a} dt \quad (19)$$

となるので，式 (17) と比較し

$$D = c \int_0^z \frac{dz}{H} \quad (20)$$

と表されることがわかる。

次に，遠方の星から地球に向かって放射される 2 つの光子を考えよう。時刻  $t_1$  に星から放射された光子 1 が時刻  $t_0$  に地球に到着し，一方，時刻  $t_1 + \Delta t_1$  に星から放射された光子 2 は時刻  $t_0 + \Delta t_0$  に地球に到着したとする（図 4）。宇宙膨張の影響で， $\Delta t_1$  と  $\Delta t_0$  は等しくない。ここで  $\Delta t_1$  と  $\Delta t_0$  の関係を求めてみよう。(i) 考えている星と地球の間の共動距離は時間によらず一定なので，2 つの光子の移動した共動距離は等しい。また (ii) 2 つの光子は時刻  $t_1 + \Delta t_1 \leq t \leq t_0$  の間は共に地球へ向かって飛んでいる。この間，時間  $\delta t$  に移動する固有距離は共に  $c \delta t$  であり，移動する固有距離と移動する共動距離の比  $a(t)$  も共通で等しいため，2 つの光子が  $\delta t$  に移動する共動距離は等しい。そのため  $t_1 + \Delta t_1$  から  $t_0$  の間に 2 つの光子が移動する共動距離は等しい。

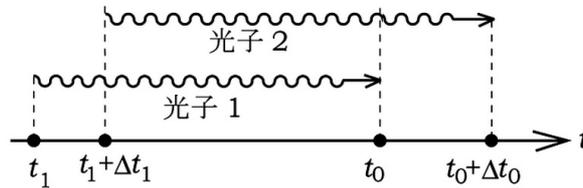


図 4

問 6 (i)(ii) を考慮し，初めの  $\Delta t_1$  に光子 1 が移動した共動距離と最後の  $\Delta t_0$  に光子 2 が移動した共動距離を考え，次の関係を導きなさい。

$$\frac{\Delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} \quad (21)$$

式 (21) によれば，星で起きた 2 つの現象の時間間隔が  $\Delta t_1$  のとき，地上ではその時間間隔は  $\Delta t_0 = \Delta t_1 (1 + z)$  に伸びて観測される。

その結果，星から出た時の光の周期（振動数の逆数）が  $\Delta t_1$  の場合に，それより 1 周期遅れて出た光と比較すれば，地上へ届いたときの周期は  $\Delta t_0 = \Delta t_1 (1 + z)$  に伸びていることがわかる。したがって，星を出た時の光の波長が  $\lambda_1 = c \Delta t_1$  であったとき，地上で観測される波長  $\lambda = c \Delta t_0$  は

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{a_0}{a} = 1 + z \quad (22)$$

に伸びる。これが，可視光が赤い方に波長がずれる「赤方偏移」の一般的な理由である。元素に固有の既知の波長  $\lambda_1$  をもった光が星で放射され，地上で波長  $\lambda$  の光として観測されると，(22) から  $z$  が観測できる。

さて，星にはその一生の最後に大爆発を起こすものがあり，超新星と呼ばれる。特定の型の (Ia 型と呼ばれる) 超新星には著しい特徴があって，それらは，もし等しい距離から観測すれば，最高に明るくなった時の明るさはどれもほぼ等しく，また，明るさの時間変化もほぼ同じ経過をたどる。そのためこの種の超新星は場所や時間によらない明るさの標準となっている。

天文学では星を仮に  $D_{32.6} \equiv 32.6$  光年の距離に置いた場合の明るさを絶対光度と呼ぶ。ここでは Ia 型超新星の最高光度の絶対光度を  $L_{32.6}$  とおく。

ところで、星の明るさ  $L$  は、星からの光が進行方向に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギーとして表される。そのため、 $L$  は (i) 星からの固有距離  $D$  の<sup>べき</sup>に依存して減少するだけでなく、(ii) 星が単位時間に放出する光子の数に比例する。単位時間に放出する数は、放出する平均の時間間隔  $\Delta t$  に反比例するが、地上の観測者が見た時間間隔は、式 (21) から、星の近くで観察した時間間隔と比べて  $(1+z)$  倍に延びる。このため、地上の観測者には単位時間に放出する光子の数は  $\frac{1}{1+z}$  に減少して見える。さらに  $L$  は (iii) 光子 1 個の平均エネルギーに比例するが、光子 1 個のエネルギーは光の振動数（周期の逆数）に比例し波長に反比例することが知られている。したがって地上の観測者が見た光子 1 個の平均エネルギーは、波長が式 (22) のように変わるので、星の近くで見た平均エネルギーに比べ減ることになる。

問 7 Ia 型超新星がどの方向にも均等に光を放出すると仮定し、以上の (i), (ii), (iii) を考慮して、固有距離が  $D$  の Ia 型超新星の明るさ  $L$  が  $(1+z)^2 D^2$  に反比例することを導け。

このように、Ia 型超新星の見かけの明るさ  $L$  は  $(1+z)^2 D^2$  に反比例するため、

$$\frac{L}{L_{32.6}} = \frac{D_{32.6}^2}{(1+z)^2 D^2} \quad (D_{32.6} = 32.6 \text{ 光年}) \quad (23)$$

となる。見かけの明るさ  $L$  を表すには、「距離指標」と呼ぶ量

$$m_D = -\frac{5}{2} \log_{10} \frac{L}{L_{32.6}} = 5 \log_{10} \frac{(1+z) D}{D_{32.6}} \quad (24)$$

が使われる。多数の超新星を観察し、その  $z$  と  $m_D$  を表示したものが、図 5 の観測図である。さて、 $z \ll 1$  のときは  $H = H_0$  である。したがって式 (20) から次の式を得る。

$$D = \frac{cz}{H_0}, \quad (z \ll 1) \quad (25)$$

問 8 赤方偏移が十分小さい  $z = 0.01$  の場合の超新星の距離指標  $m_D$  を、式 (24), (25) および表 1 のハッブル定数の値を用いて求め、結果を解答用紙最終ページの観測図に印で記入しなさい。

現在の宇宙のエネルギー密度  $\rho_0$  のうち「物質のエネルギー密度」を  $\rho_m(t_0) = x\rho_0$ 、残りの「真空のエネルギー密度」を  $\rho_v(t_0) = (1-x)\rho_0$  と置こう ( $0 \leq x \leq 1$ )。真空のエネルギー密度は式 (6) から時間的に一定である。

$$\rho_v(t) = (1-x)\rho_0 \quad (26)$$

一方、物質のエネルギー密度は宇宙膨張のため、式 (5), (18) より、

$$\rho_m(t) = (1+z)^3 x\rho_0 \quad (27)$$

である。したがって、全エネルギー密度は  $\rho(t) = \{(1+z)^3 x + (1-x)\} \rho_0$  である。これと、式 (13), (15) から得られる関係  $H = H_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$  を使い、 $H = H_0 \sqrt{x(1+z)^3 + (1-x)}$  を得るので、式 (20) は

$$D = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{x(1+z)^3 + (1-x)}} \quad (28)$$

となる。したがって物質のエネルギー密度  $\rho_m$  の現在の比率  $x$  が与えられれば、(24), (28) から赤方偏移パラメータ  $z$  の Ia 型超新星の距離指標  $m_D$  が求められ、それを観測と比較することができる。

- 問9 宇宙のエネルギー密度がすべて真空のエネルギー密度である場合 ( $x = 0$ ) のとき、 $z = 1$ 、および  $z = 1.4$  における距離指標  $m_D$  を求め、結果を解答用紙最終ページの観測図に印で記入しなさい。
- 問10 宇宙のエネルギー密度がすべて物質のエネルギー密度である場合 ( $x = 1$ ) のとき、 $z = 1$ 、および  $z = 1.4$  における距離指標  $m_D$  を求め、結果を解答用紙最終ページの観測図に印で記入しなさい。

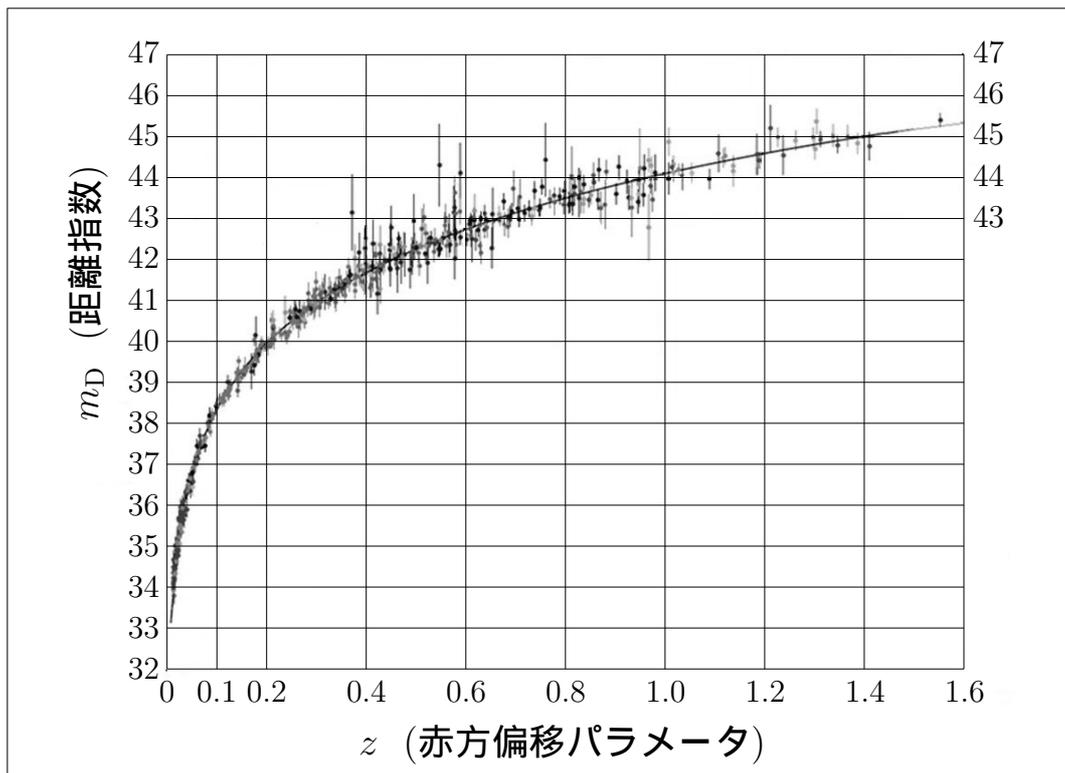


図5. 超新星の赤方偏移パラメータと距離指数の観測値

以上の結果と観測図5との比較から、宇宙には明らかに真空のエネルギー密度（しばしば、暗黒エネルギーの密度と呼ばれる）が存在していることが理解されるだろう。詳しい解析から、 $x = 0.27$  と求められている。真空のエネルギー密度が大きいため宇宙のスケール因子  $a(t)$  の増加（宇宙膨張）は  $\frac{d^2 a}{dt^2} > 0$  となり加速されている。