物理チャレンジ 2012

第 1 問 A　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 1　8 点

(a) 重心の加速度は，式 (2) の両辺を t で 2 階微分して

$$a_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \frac{-F + F}{m_1 + m_2} = 0$$

すなわち加速度は 0，よって等速運動あるいは静止状態である。

(b) 相対座標を t で 2 回微分すると

$$a = a_2 - a_1 = \frac{F}{m_1} - \frac{-F}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F = \frac{F}{m}$$

したがって $ma = F$ を得る。

問 2　14 点

2 つの物体の間に働く力 F は $F = -k(x_2 - x_1 - R) = -k(x - R)$ である。

相対運動の方程式は $m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,(x - R)$,

したがって角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{(m_1 + m_2)\,k}{m_1 m_2}}$ である。

次に相対速度は $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$ である。

初期条件より $t = 0$ において $x - R = C_1 = r$，$v = C_2\,\omega = 0$，すなわち $C_1 = r$，$C_2 = 0$ である。

2 つの物体の最初の変位 r_1 と r_2 は $r_2 - r_1 = r$，また重心が動かないことから $m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$

以上から $r_1 = -\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\,r$，$r_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\,r$ を得る。

$\omega = \boxed{\sqrt{\dfrac{(m_1 + m_2)\,k}{m_1 m_2}}}$　$C_1 = \boxed{r}$　$C_2 = \boxed{0}$

$r_1 = \boxed{-\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\,r}$　$r_2 = \boxed{\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\,r}$

解答合計　　点

第 1 問 A　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号**　　氏名 ＿＿＿＿＿＿

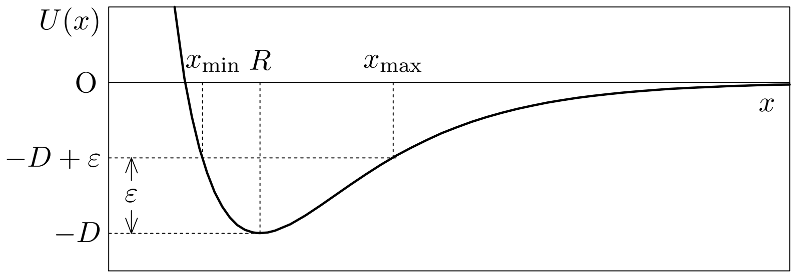
問 3　4 点

$F(x) = -\dfrac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$ と $F(x) = -k\,(x-R)$ より $U(x) = \dfrac{1}{2}k\,(x-R)^2 + U_0$，ただし U_0 は定数。
ポテンシャルエネルギーの極小値を 0 とするように選ぶと $U_0 = 0$

$U(x) = \boxed{\dfrac{1}{2}k\,(x-R)^2}$

問 4　4 点

$\varepsilon < D$ の場合には，相対距離は $x_{\min} \leqq x \leqq x_{\max}$ の範囲で振動する。$\varepsilon \to D$ のとき x の最大値は ∞ となり、解離する。求める範囲は $0 \leqq \varepsilon < D$



ε の範囲：$\boxed{0 \leqq \varepsilon < D}$

問 5　12 点

(a) $\alpha|x-R| \ll 1$ のとき，近似式を使うと

$$U(x) = D\left[\left\{1 - 2\alpha(x-R) + \frac{1}{2}(2\alpha)^2(x-R)^2\right\} - 2\left\{1 - \alpha(x-R) + \frac{1}{2}\alpha^2(x-R)^2\right\}\right]$$
$$= -D + \alpha^2 D\,(x-R)^2 \equiv -D + \frac{1}{2}\,k\,(x-R)^2$$

力の定数 $k = 2\,\alpha^2 D$ である。

(b) 相対運動の運動方程式は $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -k\,(x-R) = -2\alpha^2 D\,(x-R)$ である。

これは単振動の方程式であり，角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\alpha^2 D}{m}}$

(c) 相対座標 x が $X = R \pm r$ のとき，運動エネルギーは 0 となるので $E = -D + \varepsilon = U(R \pm r)$，すなわち $-D + \varepsilon = -D + \alpha^2 D r^2$ が成り立つ。ゆえに $r = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\alpha^2 D}} = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{D}}$ を得る。

(a) $U(x) = \boxed{-D + \alpha^2 D\,(x-R)^2}$　　$k = \boxed{2\,\alpha^2 D}$

(b) $\omega = \boxed{\sqrt{\dfrac{2\alpha^2 D}{m}}}$　　(c) $r = \boxed{\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{D}}}$

解答合計　　点

第 1 問 A　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ____________

問 6　　4 点

$k = m\omega^2$ に $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 6.855\,\mathrm{u} = 1.138 \times 10^{-26}$ kg, $\omega = 4.088 \times 10^{14}\,\mathrm{rad/s}$ を代入して

$k = 1.902 \times 10^3$ N/m，$\alpha = \sqrt{\dfrac{k}{2D}} = 2.311 \times 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}$

$k =$ $\boxed{1.902 \times 10^3 \text{ N/m}}$　$\alpha =$ $\boxed{2.311 \times 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}}$

問 7　　4 点

電磁波の波長を λ と置くと $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega} = \dfrac{2\pi \times 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{4.088 \times 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}} = 4.61 \times 10^{-6}$ m

この波長の電磁波は赤外線

波長 = $\boxed{4.61 \times 10^{-6} \text{ m}}$，この波長の電磁波は $\boxed{\text{赤外線}}$ に属する。

解答合計
点

物理チャレンジ2012

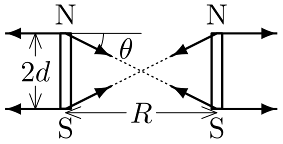
第1問B　解答用紙　1/3　　**第2チャレンジ番号** | | | |　　氏名 ______

問1　　　12点

磁石に作用する力 F は2つの磁石の中心を結ぶ直線に平行である。

以下で $F>0$ は斥力，$F<0$ は引力である。

(a) $F=\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0}\left(\dfrac{1}{R^2}-\dfrac{1}{R^2+4d^2}\times\dfrac{R}{\sqrt{R^2+4d^2}}\right)=\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0}\dfrac{(R^2+4d^2)^{3/2}-R^3}{R^2(R^2+4d^2)^{3/2}}>0$ 斥力



$F_{\mathrm{N-N}}=F_{\mathrm{S-S}}=\dfrac{q^2}{4\pi\mu_0R^2}$，$F_{\mathrm{N-S}}=F_{\mathrm{S-N}}=\dfrac{q^2}{4\pi\mu_0\{R^2+(2d)^2\}}$

$\vec{F}_{\mathrm{N-S}}$ と $\vec{F}_{\mathrm{S-N}}$ の和は2つの磁石の中心をむすぶ直線に平行で

その大きさは $2F_{\mathrm{N-S}}\cos\theta=\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0\{R^2+(2d)^2\}}\times\dfrac{R}{\sqrt{R^2+(2d)^2}}$

(b) (a) の場合と力の向きが逆となるので $F=-\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0}\dfrac{(R^2+4d^2)^{3/2}-R^3}{R^2(R^2+4d^2)^{3/2}}<0$ 引力

(c) $F=\dfrac{q^2}{4\pi\mu_0}\left\{\dfrac{2}{R^2}-\dfrac{1}{(R-2d)^2}-\dfrac{1}{(R+2d)^2}\right\}=-\dfrac{2q^2}{\pi\mu_0}\dfrac{d^2(3R^2-4d^2)}{R^2(R^2-4d^2)^2}<0$ 引力

(d) (c) の場合と力の向きが逆となるので $F=\dfrac{2q^2}{\pi\mu_0}\dfrac{d^2(3R^2-4d^2)}{R^2(R^2-4d^2)^2}>0$ 斥力

(a)	$\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0}\dfrac{(R^2+4d^2)^{3/2}-R^3}{R^2(R^2+4d^2)^{3/2}}$	(b)	$-\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0}\dfrac{(R^2+4d^2)^{3/2}-R^3}{R^2(R^2+4d^2)^{3/2}}$
(c)	$-\dfrac{2q^2}{\pi\mu_0}\dfrac{d^2(3R^2-4d^2)}{R^2(R^2-4d^2)^2}$	(d)	$\dfrac{2q^2}{\pi\mu_0}\dfrac{d^2(3R^2-4d^2)}{R^2(R^2-4d^2)^2}$

問2　　　12点

$\mathit{\Delta}=\dfrac{d}{R}$ とおくと

(a) $F=\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0R^2}\{1-(1+4\mathit{\Delta}^2)^{-3/2}\}\cong\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0R^2}\{1-(1-6\mathit{\Delta}^2)\}=\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0R^2}\times6\mathit{\Delta}^2$

(b) $F=-\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0R^2}\times6\mathit{\Delta}^2$

(c) $F=\dfrac{q^2}{4\pi\mu_0R^2}\{2-(1-2\mathit{\Delta})^{-2}-(1+2\mathit{\Delta})^{-2}\}\cong\dfrac{q^2}{4\pi\mu_0R^2}\{2-(1+4\mathit{\Delta}+12\mathit{\Delta}^2)-(1-4\mathit{\Delta}+12\mathit{\Delta}^2)\}$

$\quad=-\dfrac{q^2}{4\pi\mu_0R^2}\times24\mathit{\Delta}^2=-\dfrac{q^2}{\pi\mu_0R^2}\times6\mathit{\Delta}^2$

(d) $F=\dfrac{q^2}{4\pi\mu_0R^2}\times24\mathit{\Delta}^2=\dfrac{q^2}{\pi\mu_0R^2}\times6\mathit{\Delta}^2$

(a)	$\dfrac{3q^2}{\pi\mu_0R^2}\left(\dfrac{d}{R}\right)^2$	(b)	$-\dfrac{3q^2}{\pi\mu_0R^2}\left(\dfrac{d}{R}\right)^2$
(c)	$-\dfrac{6q^2}{\pi\mu_0R^2}\left(\dfrac{d}{R}\right)^2$	(d)	$\dfrac{6q^2}{\pi\mu_0R^2}\left(\dfrac{d}{R}\right)^2$

解答合計　　点

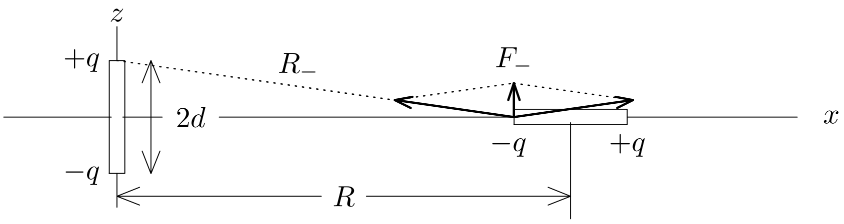
物理チャレンジ 2012

第 1 問 B　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　　氏名 ____________

問 3 8 点

(a) x 軸上の磁荷 $-q$ から z 軸上の磁荷までの距離を $R_- = \sqrt{(R-d)^2+d^2}$，x 軸上の磁荷 $+q$ から z 軸上の磁荷までの距離を $R_+ = \sqrt{(R+d)^2+d^2}$ とする。z 軸上の磁荷 $\pm q$ が x 軸上の磁荷 $-q$ に及ぼす力の和は z 軸正方向で，その大きさは

$$F_- = \frac{q^2}{2\pi\mu_0}\frac{1}{{R_-}^2}\times\frac{d}{R_-} = \frac{q^2}{2\pi\mu_0}\frac{d}{\{(R-d)^2+d^2\}^{3/2}} = \frac{q^2}{2\pi\mu_0}\frac{d}{R^3}\left(1-\frac{2d}{R}+\frac{2d^2}{R^2}\right)^{-3/2} \cong \frac{q^2}{2\pi\mu_0}\frac{d}{R^3}\left(1+\frac{3d}{R}\right)$$



z 軸上の磁荷 $\pm q$ が x 軸上の磁荷 $+q$ に及ぼす力の和は z 軸負方向で，その大きさは同様にして $F_+ = \dfrac{q^2}{2\pi\mu_0}\dfrac{d}{R^3}\left(1-\dfrac{3d}{R}\right)$，したがって合力は z 軸正方向，大きさは $f = F_- - F_+ = \dfrac{3q^2}{\pi\mu_0 R^2}\left(\dfrac{d}{R}\right)^2$

F_-，F_+ は右回りの回転を起こすので，力のモーメントは $N = -d\,(F_+ + F_-) = -\dfrac{q^2}{\pi\mu_0 R}\left(\dfrac{d}{R}\right)^2$

(b) 偶力の大きさ $f_{\rm c}$ は $N = 2df_{\rm c}$ より $f_{\rm c} = \dfrac{N}{2d} = \dfrac{q^2}{2\pi\mu_0 R^2}\dfrac{d}{R}$

(a)　$f = \boxed{\dfrac{3q^2}{\pi\mu_0 R^2}\left(\dfrac{d}{R}\right)^2}$　　$N = \boxed{-\dfrac{q^2}{\pi\mu_0 R}\left(\dfrac{d}{R}\right)^2}$

(b)　$f_{\rm c} = \boxed{\dfrac{q^2}{2\pi\mu_0 R^2}\dfrac{d}{R}}$

問 4 3 点

磁荷 $+q$，$-q$ に作用する力は z 軸正方向，負方向で，その大きさは $F = qH$ である。
また力の作用線間の距離は $2d\sin\theta$ である。したがって偶力のモーメントは

$$N = qH \times 2d\sin\theta = 2qHd\sin\theta$$

$N = \boxed{2qHd\sin\theta}$

問 5 4 点

$\pm q$ の磁荷には一定の力 qH が z 軸の $\pm$ 方向に作用している。一様な重力を受ける振り子のおもりと同様に考えて，磁石が z 方向を向いているとき ($\theta = 0$ のとき) が最も位置エネルギーが低い状態である。角度 θ のとき，磁荷の z 座標は $d\,(1-\cos\theta)$ だけ変化するので，位置エネルギーは $2qH\times d\,(1-\cos\theta)$ だけ増加する。したがって必要な仕事は $2qHd\,(1-\cos\theta)$ である。

必要な仕事 $= \boxed{2qHd\,(1-\cos\theta)}$

解答合計　　　点

第 1 問 B　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号** | | |　氏名 ____________

問 6　4 点

質点の微小振動の運動方程式は $Md\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -qH\sin\theta \cong -qH\theta$，$\therefore\ \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{qH}{Md}\,\theta$

角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{qH}{Md}}$ ，周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Md}{qH}}$

あるいは

$-q$ の磁荷には $-z$ 方向に一定の力 qH が作用しているので，長さ d の振り子と同様に考えて

周期は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{qH/M}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{Md}{qH}}$

$T = \boxed{2\pi\sqrt{\dfrac{Md}{qH}}}$

問 7　3 点

磁石の中心における磁場の強さを H_0 とする。

磁極 $+q$ に作用する力は $+z$ 方向，大きさは $q\left(H_0 + \dfrac{\Delta H}{\Delta z}d\right)$，

磁極 $-q$ に作用する力は $-z$ 方向，大きさは $q\left(H_0 - \dfrac{\Delta H}{\Delta z}d\right)$，

合力は $+z$ 方向，大きさは $f = q\left(H_0 + \dfrac{\Delta H}{\Delta z}d\right) - q\left(H_0 - \dfrac{\Delta H}{\Delta z}d\right) = 2qd\dfrac{\Delta H}{\Delta z} = m\dfrac{\Delta H}{\Delta z}$

$f = \boxed{m\dfrac{\Delta H}{\Delta z}}$

問 8　4 点

$\pm m$ の磁気双極子に作用する力は $\pm m\dfrac{\Delta H}{\Delta z}$ ，z 方向の加速度は $a = \pm\dfrac{m}{A}\dfrac{\Delta H}{\Delta z}$

長さ L を通過する時間は $\Delta t = \dfrac{L}{v}$ なので，この間の変位は $z_\pm = \dfrac{1}{2}a\Delta t^2 = \pm\dfrac{m}{2A}\dfrac{\Delta H}{\Delta z}\left(\dfrac{L}{v}\right)^2$

広がりは $l = z_+ - z_- = \dfrac{m}{A}\left(\dfrac{L}{v}\right)^2\dfrac{\Delta H}{\Delta z}$

$l = \boxed{\dfrac{m}{A}\left(\dfrac{L}{v}\right)^2\dfrac{\Delta H}{\Delta z}}$

解答合計　　点

物理チャレンジ 2012

第 2 問　解答用紙　1/4　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 1　5 点

内部エネルギーは状態量であるから 1 サイクル終わったとき始めの状態に戻るので

$$\Delta U = Q_{\mathrm{H}} - W - Q_{\mathrm{L}} = 0$$

である。したがって $W = Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{L}}$ の関係がある。

この熱機関の熱効率 e_{c} は

$$e_{\mathrm{c}} = \frac{W}{Q_{\mathrm{H}}} = \frac{Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}} = 1 - \frac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}}$$

$e_{\mathrm{c}} =$ $\boxed{1 - \frac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}}}$

問 2　10 点

高温の物体が失ったエントロピーは $\dfrac{Q}{T_{\mathrm{H}}}$

低温の物体が得たエントロピーは $\dfrac{Q}{T_{\mathrm{L}}}$

全体のエントロピーの変化量は　$\Delta S = \dfrac{Q}{T_{\mathrm{L}}} - \dfrac{Q}{T_{\mathrm{H}}} = \dfrac{T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{L}} T_{\mathrm{H}}} Q$

$T_{\mathrm{H}} > T_{\mathrm{L}}$ であるから $\Delta S > 0$，従ってこの過程でエントロピーは増大している。

問 3　10 点

各過程での気体のエントロピーの増減は

過程 BC（断熱可逆過程）$\Delta S_{\mathrm{BC}} = 0$　過程 CD（等温可逆過程）$\Delta S_{\mathrm{CD}} = -\dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{L}}}$

過程 DA（断熱可逆過程）$\Delta S_{\mathrm{DA}} = 0$　過程 AB（等温可逆過程）$\Delta S_{\mathrm{AB}} = \dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}}$

1 サイクルの間のエントロピーの変化の合計 ΔS は $\Delta S = \dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}} - \dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{L}}}$ となる。

エントロピーは状態量だから始めの状態にもどれば始めの値に戻るので $\Delta S = 0$ である。

よって $\dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}} - \dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{L}}} = 0$，すなわち $\dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}} = \dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{L}}}$ または $\dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}} = \dfrac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}}$

$\Delta S =$ $\boxed{\dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}} - \dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{L}}}}$　$Q_{\mathrm{H}}, T_{\mathrm{H}}, Q_{\mathrm{L}}, T_{\mathrm{L}}$ の間の関係式 ：$\boxed{\dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}} = \dfrac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}}}$

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　2/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ＿＿＿＿＿＿

問 4　5 点

前問より $\dfrac{Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H}} = \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}$，従ってカルノーサイクルの熱効率 e_c は

$$e_\mathrm{c} = 1 - \frac{Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H}} = 1 - \frac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}$$

なおこの効率は作業物質によらない。

$e_\mathrm{c} = \boxed{1 - \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}}$

問 5　10 点

1 サイクルの間に不可逆性に由来するエントロピーの増加を $S_\mathrm{i}\ (>0)$ とすると

1 サイクルが終了した時点でのエントロピー変化 ΔS は $\Delta S = \dfrac{Q_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} - \dfrac{Q_\mathrm{L}}{T_\mathrm{L}} + S_\mathrm{i}$

エントロピーが状態量であることから $\Delta S = 0$，すなわち $\dfrac{Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H}} = \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}} + \dfrac{T_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H}} S_\mathrm{i}$

熱効率は $e = \dfrac{W}{Q_\mathrm{H}} = 1 - \dfrac{Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H}} = 1 - \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}} - \dfrac{T_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H}} S_\mathrm{i} < 1 - \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}} = e_c$

問 6　15 点

(a) コンバインドサイクルに入力した全熱量を Q とすると，ガスタービンで仕事に変換された量は $Q\,e_\mathrm{g}$，排熱になった量は $Q\,(1-e_\mathrm{g})$，排熱のうち蒸気タービンで仕事に変換される量は $Q\,(1-e_\mathrm{g})\times e_\mathrm{s}$ である。コンバインドサイクル全体で仕事に変換される量 $Q\,e_\mathrm{cc}$ はこれらの和である。

したがって $Q\,e_\mathrm{cc} = Q\,e_\mathrm{g} + Q\,(1-e_\mathrm{g})\,e_\mathrm{s}$ である。これより $e_\mathrm{cc} = e_\mathrm{g} + (1-e_\mathrm{g})\,e_\mathrm{s}$

(b) 各々をカルノーサイクルと仮定すれば $e_\mathrm{g} = 1 - \dfrac{T_\mathrm{gL}}{T_\mathrm{gH}}$ および $e_\mathrm{s} = 1 - \dfrac{T_\mathrm{sL}}{T_\mathrm{sH}}$ であるから

$$e_\mathrm{cc} = 1 - \frac{T_\mathrm{gL}}{T_\mathrm{gH}} + \frac{T_\mathrm{gL}}{T_\mathrm{gH}}\left(1 - \frac{T_\mathrm{sL}}{T_\mathrm{sH}}\right) = 1 - \frac{T_\mathrm{gL}T_\mathrm{sL}}{T_\mathrm{gH}T_\mathrm{sH}}$$

(c) ガスタービンの熱効率 $e_\mathrm{g} = 1 - \dfrac{T_\mathrm{gL}}{T_\mathrm{gH}} = 1 - \dfrac{873}{1773} = 0.508$

コンバインドサイクルの熱効率 (今の場合 $T_\mathrm{gL} = T_\mathrm{sH}$ である) $e_\mathrm{cc} = 1 - \dfrac{T_\mathrm{sL}}{T_\mathrm{gH}} = 1 - \dfrac{373}{1773} = 0.790$

コンバインドサイクルにより熱効率は $\dfrac{e_\mathrm{cc}}{e_\mathrm{g}} = 1.56$ 倍に改善される。

(a) $e_\mathrm{cc} = \boxed{e_\mathrm{g} + (1-e_\mathrm{g})\,e_\mathrm{s}}$　(b) $e_\mathrm{cc} = \boxed{1 - \dfrac{T_\mathrm{gL}T_\mathrm{sL}}{T_\mathrm{gH}T_\mathrm{sH}}}$　(c) $\dfrac{e_\mathrm{cc}}{e_\mathrm{g}} = \boxed{1.56}$

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　3/4　**第 2 チャレンジ番号**　　氏名 ________

問 7　　5 点

内部エネルギーの変化量は問 1 の場合と同様に $\Delta U = Q_{\mathrm{L}} + W - Q_{\mathrm{H}}$

内部エネルギー U は状態量であるから始めの状態に戻ると $\Delta U = 0$ である。

$\therefore\ Q_{\mathrm{H}} = Q_{\mathrm{L}} + W$

$\Delta U =$ $Q_{\mathrm{L}} + W - Q_{\mathrm{H}}$　　$Q_{\mathrm{H}}, Q_{\mathrm{L}}, W$ の間の関係式：$Q_{\mathrm{H}} = Q_{\mathrm{L}} + W$

問 8　　10 点

1 サイクルの間のエントロピーの変化 ΔS は $\Delta S = \dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{L}}} - \dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}}$ となる。

エントロピーは状態量だから 1 サイクルを経て始めの状態にもどると $\Delta S = 0$ である。

よって $\dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{L}}} - \dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}} = 0$, すなわち $\dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{Q_{\mathrm{L}}} = \dfrac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{L}}}$

$\Delta S =$ $\dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{L}}} - \dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}}$　　$Q_{\mathrm{H}}, T_{\mathrm{H}}, Q_{\mathrm{L}}, T_{\mathrm{L}}$ の間の関係式：$\dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{Q_{\mathrm{L}}} = \dfrac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{L}}}$

問 9　　5 点

ヒートポンプの効率は $\varepsilon_{\mathrm{rc}} = \dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{W} = \dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{L}}}$ と表される。

前問の結果を用いて

$$\varepsilon_{\mathrm{rc}} = \frac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{L}}} = \frac{1}{\dfrac{Q_{\mathrm{H}}}{Q_{\mathrm{L}}} - 1} = \frac{1}{\dfrac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{L}}} - 1} = \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{L}}}$$

$\varepsilon_{\mathrm{rc}} =$ $\dfrac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{L}}}$

解答合計　　点

第 2 問　解答用紙　4/4　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ________

問 10　10 点

問 5 と同じく不可逆過程に由来するエントロピー S_i (>0) を考慮すれば，1 サイクルの間のエントロピーの増減は

$$\Delta S = \frac{Q_\mathrm{L}}{T_\mathrm{L}} - \frac{Q_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} + S_\mathrm{i}$$

S が状態量であることから $\Delta S = 0$，したがって $\dfrac{Q_\mathrm{H}}{Q_\mathrm{L}} = \dfrac{T_\mathrm{H}}{T_\mathrm{L}} + \dfrac{T_\mathrm{H}}{Q_\mathrm{L}} S_\mathrm{i}$

効率は $\varepsilon = \dfrac{Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H} - Q_\mathrm{L}} = \dfrac{1}{\dfrac{Q_\mathrm{H}}{Q_\mathrm{L}} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{T_\mathrm{H}}{T_\mathrm{L}} + \dfrac{T_\mathrm{H}}{Q_\mathrm{L}} S_\mathrm{i} - 1} < \dfrac{1}{\dfrac{T_\mathrm{H}}{T_\mathrm{L}} - 1} = \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{L}} = \varepsilon_\mathrm{rc}$ である。

問 11　10 点

屋外 30°C，室内 25°C のとき $T_\mathrm{H} - T_\mathrm{L} = 5\,\mathrm{K}$，$T_\mathrm{L} = 298\,\mathrm{K}$，効率 $\varepsilon_\mathrm{rc} = \dfrac{298}{5} = 59.6$

屋外 30°C，室内 27°C のとき $T_\mathrm{H} - T_\mathrm{L} = 3\,\mathrm{K}$，$T_\mathrm{L} = 300\,\mathrm{K}$，効率 $\varepsilon_\mathrm{rc} = \dfrac{300}{3} = 100$

室内から毎秒 1000 J の熱を取り出すだすために必要な電力は

室内 25°C のとき $\dfrac{1000}{\varepsilon_\mathrm{rc}} = \dfrac{1000}{59.6} \cong 16.8$ (W)，室内 27°C のとき $\dfrac{1000}{\varepsilon_\mathrm{rc}} = \dfrac{1000}{100} = 10$ (W)

ε_rc(室温 25°C) =	59.6　or　60	ε_rc(室温 27°C) =	100
電力 (室温 25°C) =	16.8 W　or　17 W	電力 (室温 27°C) =	10 W

問 12　5 点

両熱源の温度差 27 K であるから理想的な冷蔵庫の冷却の効率は $\varepsilon_\mathrm{rc} = \dfrac{273}{27} \cong 10.1$

毎秒 1000 J の熱を取り出すに必要な電力は $\dfrac{1000}{\varepsilon_\mathrm{rc}} = 1000 \times \dfrac{27}{273} \cong 98.9$ (W)

一般の冷蔵庫では少なくとも 99 W の電力を要する。

ε_rc =	10.1　or　10	電力 =	98.9 W or　99 W，　100 W

解答合計
点

第3問　解答用紙　1/4　**第2チャレンジ番号**　　　　氏名 ____________

問1　10点

速度 v で遠ざかる銀河から来た光の波長 $\lambda' = \lambda\left(1 + \dfrac{v}{c}\right)$

$\varDelta\lambda = \lambda' - \lambda$ と置くと $\dfrac{\varDelta\lambda}{\lambda} = \dfrac{v}{c}$，観測結果から $\dfrac{\varDelta\lambda}{\lambda} = \dfrac{2}{100} = \dfrac{1}{50}$　$\therefore\ \dfrac{v}{c} = \dfrac{1}{50}$

銀河までの距離は $D = \dfrac{v}{H_0} = \dfrac{c}{H_0}\,\dfrac{v}{c} = 140$ 億光年 $\times \dfrac{1}{50} = 2.8$ 億光年

銀河までの距離 ＝ 2.8 億光年

問2　10点

C から見た A の速度 $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{D}_{\mathrm{CA}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{D}_{\mathrm{EA}}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{D}_{\mathrm{EC}}}{\mathrm{d}t}$

ここで $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{D}_{\mathrm{EA}}}{\mathrm{d}t} = H_0\overrightarrow{D}_{\mathrm{EA}}$，$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{D}_{\mathrm{EC}}}{\mathrm{d}t} = H_0\overrightarrow{D}_{\mathrm{EC}}$

$\therefore\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{D}_{\mathrm{CA}}}{\mathrm{d}t} = H_0\,(\overrightarrow{D}_{\mathrm{EA}} - \overrightarrow{D}_{\mathrm{EC}}) = H_0\,\overrightarrow{D}_{\mathrm{CA}}$

すなわち，C から見てもハッブルの法則は同じである。

問3　10点

$E = \dfrac{1}{2}\,v^2 - \dfrac{GM}{D}$ とおき，これを時間で微分すると $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{GM}{D^2}\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = v\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{GM}{D^2}\right)$

一方，式 (9) から $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{GM}{D^2} = 0$，これを上式に代入すると $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$

ゆえに $E = \dfrac{1}{2}\,v^2 - \dfrac{GM}{D} = (一定)$ を得る。

【 別解 】

運動方程式 (9) の両辺を m で割って $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{GM}{D^2}$

この式と $v = \dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$ と，辺々掛けあわせて $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -GM\,\dfrac{1}{D^2}\,\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$，　$\therefore\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}\,v^2 - \dfrac{GM}{D}\right) = 0$

したがって $\dfrac{1}{2}\,v^2 - \dfrac{GM}{D} = (一定)$ を得る。

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　2/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ____________

問 4　10 点

式 (10) に (11) を代入して $\dfrac{1}{2}v^2 - \dfrac{4\pi}{3c^2}G\rho_{\mathrm{m}}D^2 = C$ (C は定数)

ここで $\rho = \rho_{\mathrm{m}}$ と式 (8) の $D(t) = a(t)\,r$ を用いると $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 r^2 - \dfrac{4\pi}{3c^2}G\rho a^2 r^2 = C$

$\therefore\ \left(\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \dfrac{8\pi G}{3c^2}\,a^2\rho = \dfrac{2C}{r^2}$

この式の右辺は時間 t に依らず一定で，左辺は共動距離 r に依存しない。したがって，両辺は t にも r にもよらない定数でありそれを K と置けば式 (7) $\left(\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{8\pi G}{3c^2}\,a^2\rho + K$ を得る。

問 5　10 点

1 年 $= 3.156 \times 10^7$ s なので $H_0 = \dfrac{1}{140 \times 10^8\,\text{年} \times 3.156 \times 10^7\,\mathrm{s}/\text{年}} = 2.263 \times 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}$

式 (15) より $\rho_0 = \dfrac{3c^2H_0^2}{8\pi G} = 9.165 \times 10^{-27}\,c^2\,\mathrm{kg/m^3} = 8.248 \times 10^{-10}\,\mathrm{J/m^3}$

水素 1 原子の静止エネルギーは $E_{\mathrm{H}} = \dfrac{10^{-3}c^2\,\mathrm{kg/mol}}{N_{\mathrm{A}}} = 1.495 \times 10^{-10}$ J

よって $\dfrac{\rho_0}{E_{\mathrm{H}}} = 9.165 \times 10^{-27}\,c^2\,\mathrm{kg/m^3} \times \dfrac{6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}}{10^{-3}c^2\,\mathrm{kg/mol}} = 5.52\,\mathrm{m^{-3}}$

あるいは $\dfrac{\rho_0}{E_{\mathrm{H}}} = \dfrac{8.248 \times 10^{-10}\,\mathrm{J/m^3}}{1.495 \times 10^{-10}\,\mathrm{J}} = 5.52\,\mathrm{m^{-3}}$

$\rho_0 = \boxed{8.25 \times 10^{-10}\,\mathrm{J/m^3}}$　　1 m^3 あたりの水素原子数に換算した数 $= \boxed{5.5\ \text{個}/\mathrm{m^3}}$

問 6　10 点

式 (16) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{c}{a(t)}$ より $\varDelta r_1 = \dfrac{c\varDelta t_1}{a(t_1)}$,　$\varDelta r_0 = \dfrac{c\varDelta t_0}{a(t_0)}$

ここで $\varDelta r_1 = \varDelta r_0$ と置けば $\dfrac{\varDelta t_1}{a(t_1)} = \dfrac{\varDelta t_0}{a(t_0)}$ を得る。

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　3/4　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名 ＿＿＿＿＿＿

問 7　10 点

超新星を固有距離 D の球面で囲むと，この球面を光子が通過する頻度は，時間の遅れのため，超新星の放出する頻度に比べ $\dfrac{1}{1+z}$ だけ減少する。

したがって，単位面積当たりの頻度は，$\dfrac{1}{4\pi D^2(1+z)}$ になる。

また，光子 1 個当たりのエネルギーが $\dfrac{1}{1+z}$ に比例して減るので，単位時間・単位面積を通過する光子のエネルギーは $D^2(1+z)^2$ に反比例する。

問 8　10 点

$z \ll 1$ のとき式 (25) $D = \dfrac{cz}{H_0}$ を式 (24) に代入し

$$m_\mathrm{D} = 5\log_{10}\frac{c/H_0}{D_{32.6}} + 5\log_{10}\{(1+z)\,z\}$$

ここで $5\log_{10}\dfrac{c/H_0}{D_{32.6}} = 5\log_{10}\dfrac{140\text{ 億光年}}{32.6\text{ 光年}} = 5\log_{10}(4.29\times10^8) = 43.16$

$z = 0.01$ を代入して $5\log_{10}\{(1+z)\,z\} = -9.98$

以上から $m_\mathrm{D} = 43.16 - 9.98 = 33.18$ を得る。

対応する点 ($z = 0.01$，$m_\mathrm{D} = 33.2$) は図○印。

$m_\mathrm{D} =$ 33.2

問 9　10 点

$x = 0$ のとき式 (28) は $D = \dfrac{c}{H_0}\displaystyle\int_0^z \mathrm{d}z = \dfrac{cz}{H_0}$，これを式 (24) に代入して

$$m_\mathrm{D} = 5\log_{10}\frac{c/H_0}{D_{32.6}} + 5\log_{10}\{(1+z)\,z\} = 43.16 + 5\log_{10}\{(1+z)\,z)\}$$

(右辺第 1 項は問 9 と共通)。

右辺第 2 項に $z = 1.0$，1.4 を代入し，それぞれ $5\log_{10}\{(1+z)\,z\} = 1.51$，2.63,

したがって $m_\mathrm{D} = 44.7$，45.8 を得る。対応する 2 点は図●印

$z = 1.0$ のとき $m_\mathrm{D} =$ 44.7　　$z = 1.4$ のとき $m_\mathrm{D} =$ 45.8

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　4/4　**第 2 チャレンジ番号**　|　|　|　氏名 ＿＿＿＿＿＿

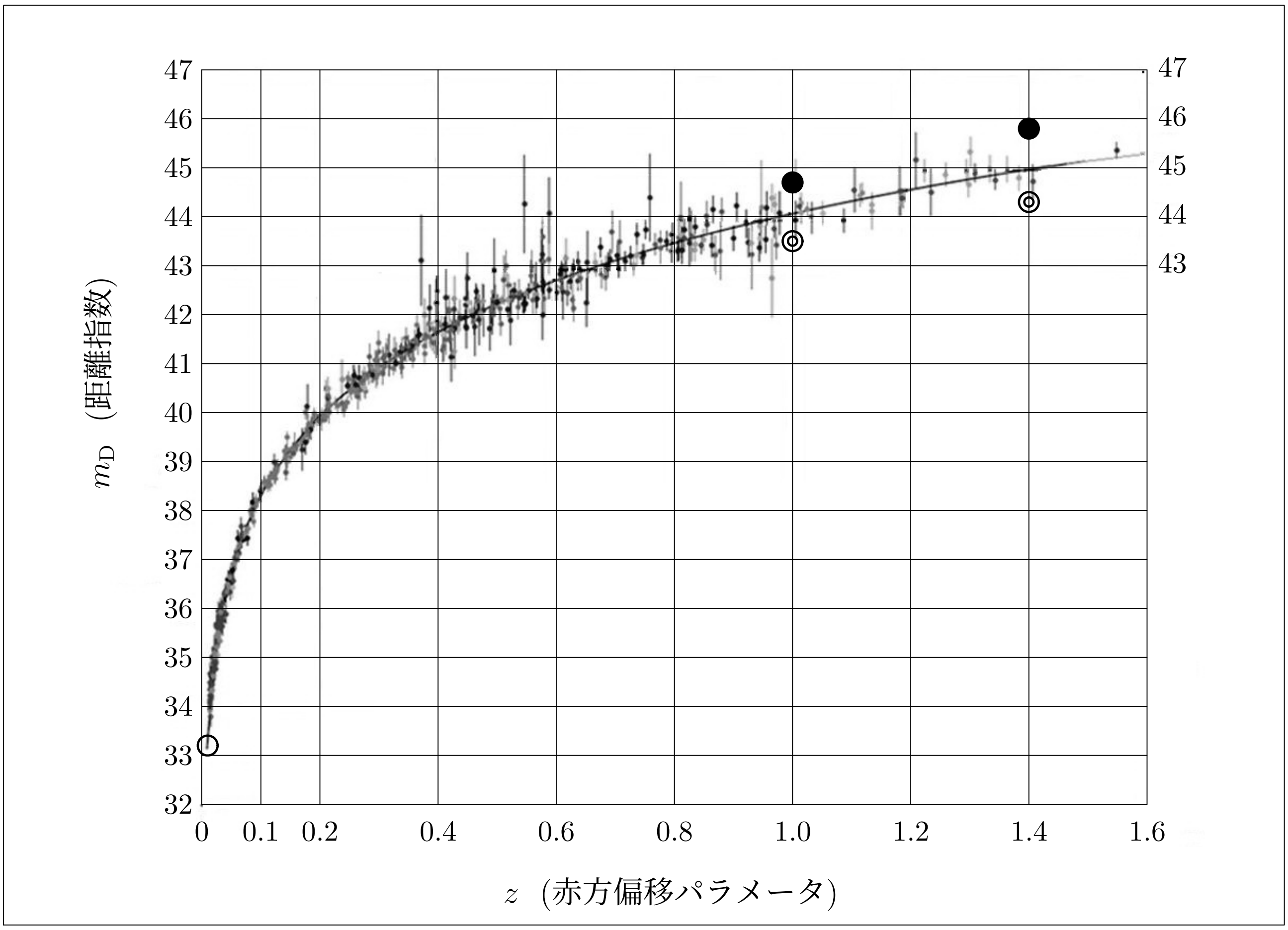
問 10　10 点

$x=1$ のとき式 (28) は $D = \dfrac{c}{H_0}\displaystyle\int_0^z \dfrac{\mathrm{d}z}{(1+z)^{3/2}} = \dfrac{c}{H_0}\times 2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$，これを式 (24) に代入して

$$m_\mathrm{D} = 5\log_{10}\frac{c/H_0}{D_{32.6}} + 5\log_{10}\left\{2(1+z)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)\right\} = 43.16 + 5\log_{10}\left\{2(1+z)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)\right\}$$

右辺第 2 項に $z=1.0$，1.4 を代入し，それぞれ $5\log_{10}\left\{2(1+z)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}\right)\right\} = 0.34$，$1.15$，したがって $m_\mathrm{D} = 43.5$，44.3 を得る。対応する 2 点は下図◎印

$z=1.0$ のとき $m_\mathrm{D} =$ 43.5　　$z=1.4$ のとき $m_\mathrm{D} =$ 44.3



観 測 図

解答合計　　点