

# 物理チャレンジ2013

## 理論問題

2013年8月6日(火)

理論問題にチャレンジ 8:30~13:30

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問3題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

### <注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙、計算用紙、および電卓にも手を触れないこと。
2. 問題冊子は21ページである。解答冊子は16枚である。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答のみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は手をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(11:50)後は、退出希望者は手を挙げて監督者に知らせ、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて退室すること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

## 第1問 A (55点)

ニュートンの運動の法則が成り立つ座標系を慣性座標系（慣性系）という。力学の問題は通常は慣性系において取り扱うが、慣性系に対して加速度運動する座標系（非慣性系）を用いると便利な場合がある。非慣性系においてはニュートンの運動の法則はそのままでは成り立たないが、慣性力と呼ばれる“見かけの力”を考慮すると、ニュートンの運動の法則を用いて問題を扱うことができる。

一定の加速度  $\vec{a}$  で水平に運動している乗り物内で天井から糸で吊るされたおもりを考えよう。地上（慣性系）から見ると、おもりは一定加速度で運動しているため、おもりには加速度と質量の積に等しい力  $m\vec{a}$  が作用していなければならない。このため糸は鉛直方向から傾き、糸の張力の水平成分が  $m\vec{a}$  に等しくなるような傾きをなす（図1(a)参照）。一方、乗り物内（非慣性系）から見ればおもりは静止しているため、おもりに作用する力は釣り合っていなければならない。観測される糸の傾きを説明するためには  $-m\vec{a}$  の力が必要である（図1(b)参照）。この  $-m\vec{a}$  が慣性系に対して等加速度  $\vec{a}$  で移動する加速度座標系における慣性力である。



図1.

次に慣性系において糸に吊された質点が鉛直軸のまわりに一定の角速度  $\omega$  で半径  $r$  の円周上を回転している場合を考えよう。質点が半径  $r$  の等速円運動をするためには大きさ  $mr\omega^2$  の向心力が必要である。このため糸は鉛直方向から傾き、糸の張力の水平成分が  $mr\omega^2$  に等しくなるような傾き角をなす（図2(a)参照）。一方、これを同じ角速度で回転する回転座標系から見ると、質点は静止しているため、質点に作用する力の総和（合力）は0でなければならない（図2(b)参照）。このためには向心力に釣り合う力が外向きに作用していなければならない。この力が回転座標系における慣性力で、遠心力と呼ばれる。

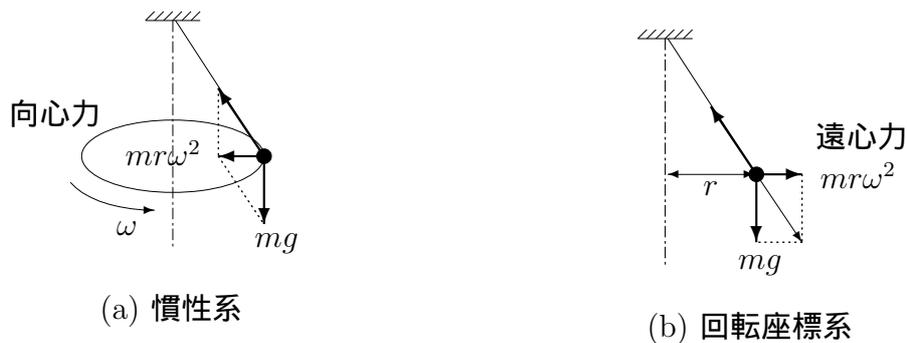


図2.

質量  $M$  , 車軸間距離  $l_1 + l_2$  の自動車がある速度  $v$  で水平な直線道路を走行している。車の重心  $G$  の位置は前輪の車軸から距離  $l_1$  後方で、路面から高さ  $h$  にある (図 3 参照)。この車が急ブレーキをかけて止まった。減速を始めてから止まるまでの加速度の絶対値を  $a$  (一定) とする。なお、実際の自動車では車輪と車体の間にサスペンションと呼ばれるバネ機構が入っているが、以下ではサスペンションのことは考えない。よって重心の位置は変わらないとする。路面とタイヤとの間の静摩擦係数は  $\mu$  , 重力加速度は  $g$  とせよ。

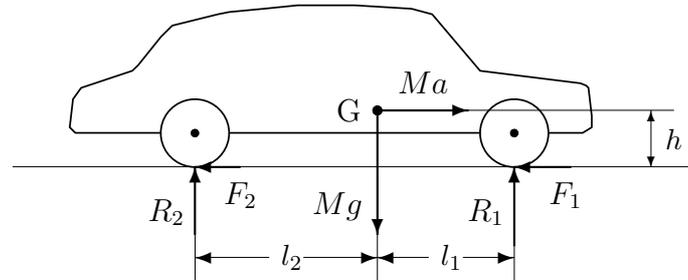


図 3.

- 問 1 車とともに運動する座標系における力の釣り合いと力のモーメントの釣り合いを考えて、前輪 (左右の和) と後輪 (左右の和) の受ける抗力  $R_1, R_2$  を求めよ (図 3 参照)。
- 問 2 減速の際にスリップを起こさない加速度の絶対値の上限  $a_1$  を求めよ。また、この上限の値を実現するには、前輪、後輪の摩擦力  $F_1, F_2$  とそれぞれの垂直抗力  $R_1, R_2$  の間にどのような関係が必要か。
- 問 3 質量  $M = 1540 \text{ kg}$  , 車軸間距離  $l_1 + l_2 = 2.8 \text{ m}$  ,  $l_1 = 1.2 \text{ m}$  , 重心の高さ  $h = 56 \text{ cm}$  , 静摩擦係数  $\mu = 1.0$  ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  とする。制動距離を  $L = 40 \text{ m}$  とするとき、 $a_1$  および  $a_1$  を与える制動前の速度  $v_1$  を計算せよ。

次に、車が水平な円弧状カーブを一定の速さ  $v$  で走行している。車の重心が描く円弧の半径は  $r$  とする。路面は図4のように水平から角度  $\theta$  傾いている。車の重心の高さを  $h$ 、左右の車輪の間隔を  $s$  として以下に答えよ。路面とタイヤとの間の静摩擦係数は  $\mu$ 、重力加速度は  $g$  とせよ。

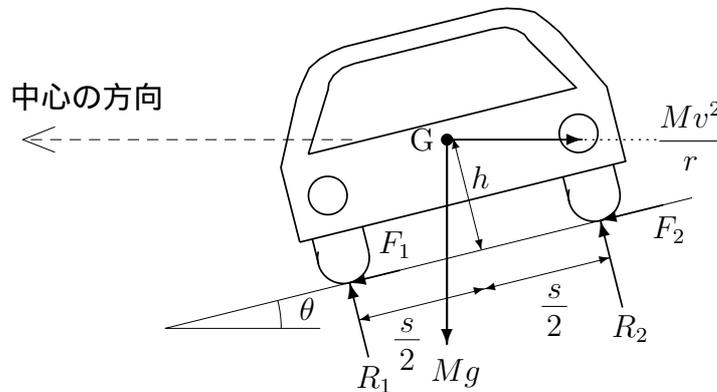


図4.

- 問4 左側の車輪（前後の和）、右側の車輪（前後の和）に作用する垂直抗力  $R_1, R_2$ 、および路面に平行に作用する摩擦力の和  $F_1 + F_2$  を求めよ。
- 問5 横滑りしない速さ  $v$  の上限を求めよ。ただし  $\tan \theta < \frac{1}{\mu}$  であり、横転することはないとする。
- 問6 横転しない速度の上限を求めよ。ただし  $\tan \theta < \frac{2h}{s}$  であり、横滑りは起こらないとする。
- 問7  $s = 1.54 \text{ m}$ 、 $h = 0.56 \text{ m}$ 、 $\mu = 1.0$  とする。路面に傾きがない ( $\theta = 0$ ) 場合に、速度を出しすぎたとき横転するより前に横滑りするか、それとも横滑りする前に横転するか。

## 第1問B (55点)

[I]

物体の中に小さな平面を考えると、平面で分けられた2つの部分は互いに力を及ぼしあっている。単位面積あたりに作用するこのような力を応力という。圧力は応力的一种で、面に垂直に互いに押し合う力である。物体を構成する分子はまわりの分子と結びついていて、結びついた分子から力を受けるが、これらの力のうち平面の反対側にある分子から受ける単位面積あたりの力が応力となる。

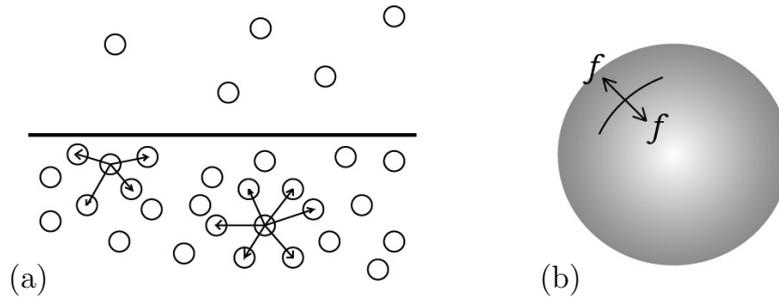


図1.

物体の表面（界面）付近では、分子間の結びつきは物体内部とは異なっている（図1(a)）。したがって、表面を小さな線分で2つに分けると（図1(b)）、線分の両側は（物体内部の応力とは異なる）表面に固有な力を及ぼしあう。これを表面張力という。表面張力は線分に垂直で、表面に沿って互いに引き合う方向であり、短い線分の長さを  $s$  とすると、大きさ  $f$  は次のように表される。

$$f = \gamma s. \quad (1)$$

定数  $\gamma$  を表面張力係数と呼ぶ。表面張力係数の値は表面（界面）の種類によって異なる。（表面張力係数のことを表面張力と呼ぶこともある。）

表面張力は引き合う力であるから、物体は許された条件の範囲で表面積ができるだけ小さな形をとろうとする。水滴が球に近い形になったり、ミススマシや1円玉が水面に浮かぶのは表面張力の効果である。

問1 図2のように可動枠のついた針金の枠に表面張力係数  $\gamma$  の液体膜を張り、微小な長さ  $\Delta y$  だけ引き延ばすときの仕事を求めよ。枠の幅は  $x$  である。膜の表と裏に表面があることに注意せよ。

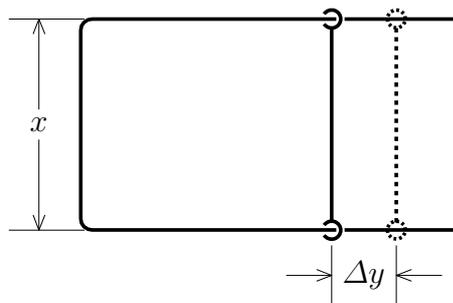


図2.

問2 表面張力係数  $\gamma$  の液体の表面上に領域  $\mathcal{R}$  を考える (図3参照)。液体を変形させてこの領域の面積が微小量  $\Delta S$  だけ増加するとき領域  $\mathcal{R}$  の外周に働く力がした仕事  $\Delta W$  が  $\gamma \Delta S$  で与えられることを示せ。

ヒント：領域の外周の微小部分  $AB$  が液体の変形によって  $A'B'$  に移動したとする。 $\overline{AB}$  が短ければ、これらの微小部分は直線と見なせる。また、移動距離が小さければ、この移動は平行移動と見なしてよい。

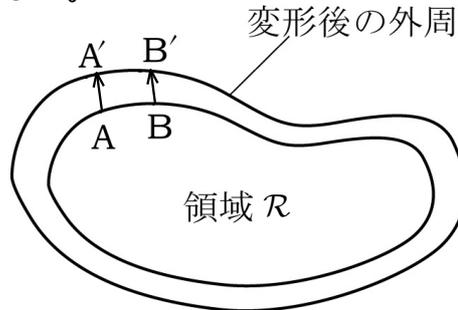


図3.

図4のように、圧力  $p_0$  の大気中で、表面張力係数  $\gamma$  の液体が半径  $R$  の球状の液滴になっているとしよう。このとき、液滴内外の圧力差はどれだけであろうか。

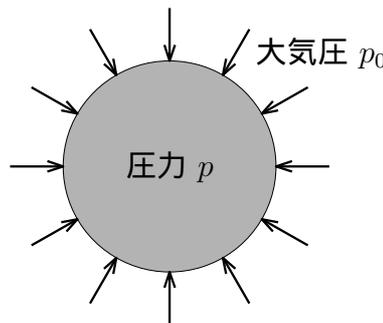


図4.

図5(a)のように、この液滴を2つの半球に分ける平面を考え、一方の半球に着目すると、この半球に働く力は、半球面において大気から働く力と液滴断面において反対側の半球の液体から働く力である。

このうち大気圧から働く力は、半球面に垂直・内向きで、半球面全体に働く力は左向きに  $\pi R^2 p_0$  である。なぜなら、圧力  $p_0$  の一様な大気中で大気を、液滴の半球と同じ形の空気の半球とその外側とに分けたと想像すると (図5(b)参照)、空気の半球に働くのは半球面に大気から働く力と断面で右向きに働く大気からの力であるが、後者は  $\pi R^2 p_0$  で、前者と釣り合っているから、半球面全体に働く力は左向きに  $\pi R^2 p_0$  となっているはずである。

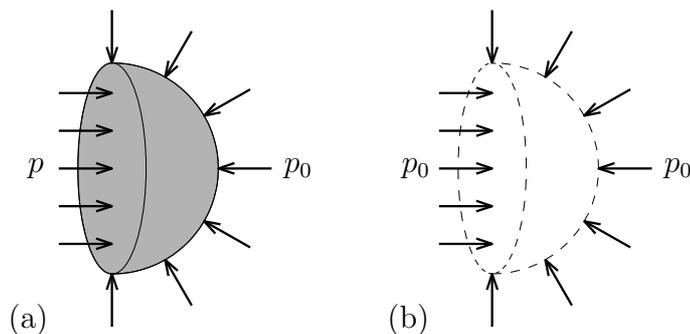


図5.

一方、液滴内の圧力を  $p$  とすると、断面で反対側の半球から受ける力は右向きに  $\pi R^2 p$  である。したがって、もし表面張力がなければ、釣り合いの条件は  $p = p_0$  となって圧力差はない。

しかし、液滴の表面は大円によって2つに分けられるから表面張力が働く。着目する半球に働く表面張力は図6のように表面に沿って引き合う向き（図の左向き）であり、大円の長さは  $2\pi R$  だから、表面張力の和は左向きに  $2\pi\gamma R$  である。表面張力を含めると、着目する半球に働く力の釣り合いは

$$\pi R^2 p_0 + 2\pi\gamma R = \pi R^2 p$$

となり、液滴内の圧力は大気圧より  $p - p_0 = \frac{2\gamma}{R}$  だけ大きいことがわかる。

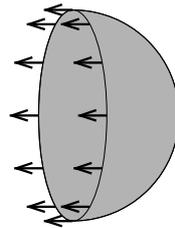


図6.

問3 表面張力係数  $\gamma$  のせっけん液で半径  $R$  の球状のシャボン玉をつくった。シャボン玉内外の圧力差を求めよ。シャボン玉は液滴ではなく、せっけん液の膜から作られていることに注意せよ。

問4 問3のシャボン玉に空気を吹き込んで、半径を  $R$  から微小量  $\Delta R$  だけ増加させるのに必要な仕事を求めよ。また、このうちシャボン玉の膜に蓄えられるエネルギーになるのはどれだけか。ただし大気圧を  $p_0$  とする。

(重力の下では、図4の液滴内部の圧力は一定でなく、液滴は球とは少し異なる形になる。問3の上の説明では、重力の効果は無視でき、圧力は一定で液滴を球と近似できるとした。)

以下では重力加速度の大きさを  $g$  とする。

問5 図7のように、断面の内径（直径）が  $2r$  の細い円管を液体に鉛直に入れた。液体の密度を  $\rho$ 、表面張力係数を  $\gamma$ 、円管と液面の角度を  $\theta$  とするとき、円管から十分離れた液面を基準として、円管内における液面の高さ  $H$  を求めよ（図は  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の場合である）。ただし、円管内の液面の高さの変化は  $H$  に比べて無視できるとする。また、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  の場合にはどうなるか図示せよ（図のみでよい）。

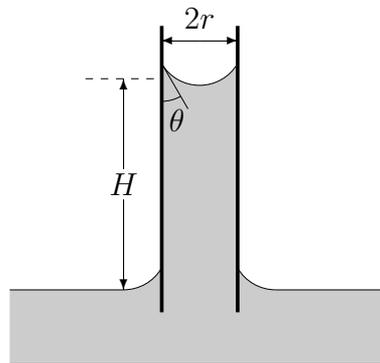


図7.

このように細管内では液面が高くあるいは低くなる現象を毛(細)管現象とよぶ。

- 問6 図8のように、大気圧  $p_0$  の下で液体が鉛直平面の容器壁にある高さまで付着している。液体の密度を  $\rho$ 、表面張力係数を  $\gamma$ 、壁と液面の角度を  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とし、図のように  $x$  軸、 $z$  軸をとるとき、壁から十分離れた液面を基準 ( $z = 0$ ) とし、液体が付着する高さ  $h$  を求めよ。 $z \geq 0$  にある液体に働く  $x$  方向の力の釣り合いに着目し、液体には、大気圧、壁からの力に加えて、表面と壁の交線および壁から十分離れた所で表面に沿って表面張力が働くことに注意せよ。また、高さ  $z$  の水圧を  $p(z)$  とすると、 $z \sim z + dz$  の間にあり、 $y$  方向に単位長さの長方形の壁の部分を水が押す力は  $-x$  方向に  $p(z) dz$  である。

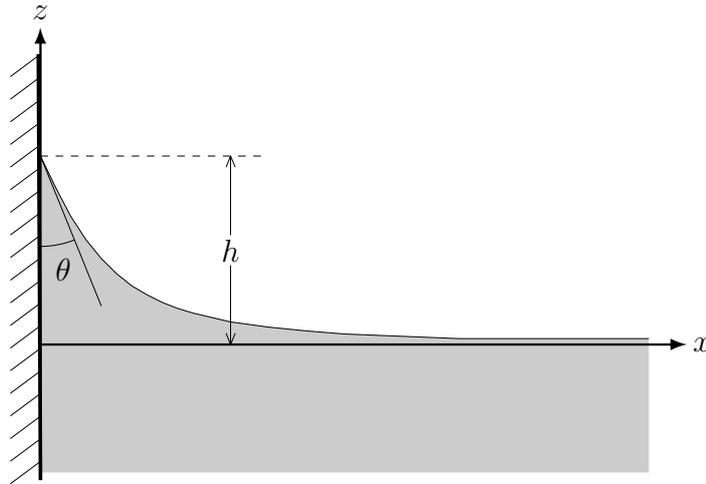


図8.

[II]

ゴムに力を加えると変形するが、ゴムの変形は普通のバネの振る舞いとは異なっている。ゴムの中では、多数の長い糸状の高分子が、互いに結び目をつくりながら折りたたまれた乱雑な構造をなし、構造の乱雑さが変形により変化することが力と関係するからである。ゴムが体積  $V_0$  の自然な状態から  $x, y, z$  方向にそれぞれ  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  倍に伸びた(あるいは縮んだ)とき、エネルギーの増加  $E$  は  $a$  を定数として次のように表されるとする。

$$E = a V_0 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3). \quad (2)$$

ただし、変形しても体積がほとんど変わらないので、 $\lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1$  としよ。

- 問7  $x-y$  面に平行なゴム膜を  $x, y$  方向にそれぞれ  $\lambda$  倍に広げる場合には、 $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ 、 $\lambda_z = \frac{1}{\lambda^2}$  である。 $\lambda = 1$  のときに面積  $S_0$ 、厚さ  $\delta_0$  のゴム膜の面積を、 $S_0 \lambda^2$  から微小量  $\Delta S$  だけ広げるのに必要なエネルギーを  $\Gamma \Delta S$  と表すとき、 $\Gamma$  を求め、横軸に  $1 \leq \lambda \leq 3$  をとってグラフを描け。

- 問8 圧力  $p_0$  の大気中に、厚さ  $\delta_0$  のゴム膜でできた球状の風船がある。ゴム膜の伸縮がないときの半径は  $R_0$  である。半径を  $\lambda$  倍に膨らませたときの風船の内外の圧力差を求め、横軸に  $1 \leq \lambda \leq 3$  をとってグラフを描け。また、問3のシャボン玉の圧力差の振る舞いと最も大きな違いと考えられるのは何か。

## 第2問 A (55点)

ファラデーの電磁誘導の法則によると、コイルを貫く磁束の時間変化率に比例して、コイルには、磁束の変化を妨げる向きに誘導起電力  $V$  が生じる。これは、一般に（コイルなどの導線がない空間でも）時間変化する磁場は電場を伴うからである。この問題では奥の深いこの法則を使っているいろいろな問題を解く。そのために、まず、時間変化する磁場と電場の間の1つの数学的な関係を表す方法について説明する。

空間に閉曲線  $C$  を考え、それに適当に向きをつけておく（図1(a)）。

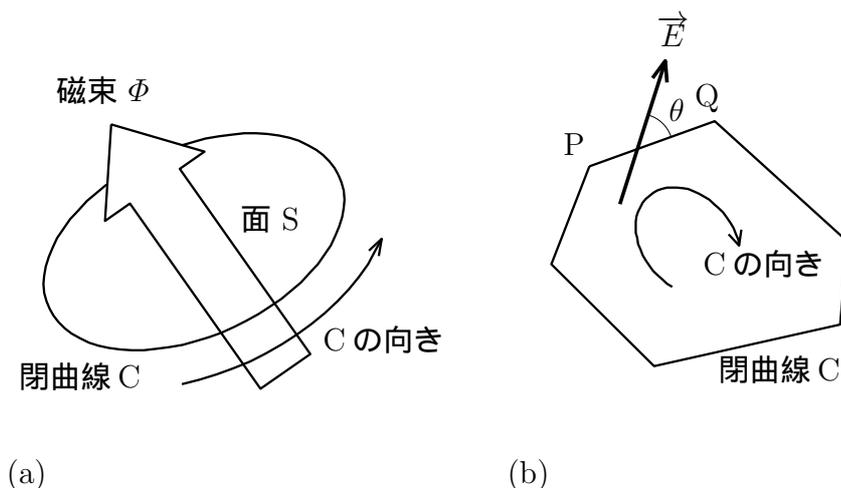


図1.

閉曲線  $C$  を縁とする面を  $S$  と表し、面  $S$  を貫く磁束を  $\Phi(S)$  とする。  $S$  を貫く磁束の符号は、  $C$  の向きに回した右ねじが進行する向きの磁束を正とする。面  $S$  が面積  $A$  の平面で、場所によらない磁束密度  $\vec{B}$  が面  $S$  を垂直に貫いているとき、その磁束は

$$\Phi(S) = BA$$

と表される。

閉曲線  $C$  に重ねておかれた導線を考え、その中に生じる起電力を  $V(C)$  と表すことにする。閉曲線  $C$  は図1(b)のような直線が連なったものでもよい。その場合、  $P$  から  $Q$  に向かう1本の線分の上で電場  $\vec{E}$  が一定のとき、導線のその部分に生じる起電力  $V(\overrightarrow{PQ})$  は、  $\overrightarrow{PQ}$  の向きと電場の向きとの角度を  $\theta$ 、線分の長さを  $l_{PQ}$  として、

$$V(\overrightarrow{PQ}) = |E| l_{PQ} \cos \theta = E_C l_{PQ}$$

となる。ここに、  $|E|$  は電場の大きさ、  $E_C = |E| \cos \theta$  は閉曲線  $C$  の向きの電場の成分である。このように導線の各部分に生じる起電力を計算し、加えあわせると、閉曲線  $C$  に重ねた導線全体に生じる起電力が計算できる。とくに、導線が1本の閉じた電気力線の上に置かれているときは、導線上で至る所  $E_C = |E|$  あるいは  $-|E|$  である。その導線上で電場の大きさ  $|E|$  が一定の値をもつとき、導線に発生する起電力は、  $l$  を導線、すなわち、閉曲線  $C$  の全長として

$$V(C) = E_C l$$

と表される。

時間変化する磁場とそれに伴う電場があったとしよう。すると、この空間の閉曲線  $C$  に沿っておかれた導線に発生する起電力と、それを縁とする面  $S$  を貫く磁束の時間変化率の間には、

$$V(C) = -\frac{\Delta\Phi(S)}{\Delta t} \quad (1)$$

という関係が成り立つ。これが冒頭で述べたファラデーの電磁誘導の法則の数学的表現である。

なお、現実には、電場中に導線を置くと静電分極などの影響により電気力線が乱れることがある。以下では導線の影響がない場合の電場と磁場の関係を調べたいので、 $V(C)$  の計算では、導線の影響を無視した電場と閉曲線の長さなどを使う。こうして計算した  $V(C)$  を以下では閉曲線  $C$  に生じる起電力と呼ぶことにする。

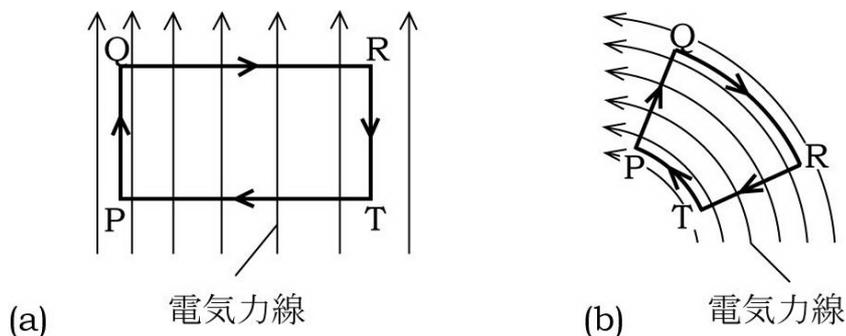


図 2.

問 1 図 2 (a) は、電場の大きさが上下方向には一定であるが、右に行くに従って弱まっていく様子を右に行くほど電気力線が疎になっていることによって表している。変動磁場が存在しない空間では、このような電場は存在し得ないことを一辺  $PQ$  が電気力線に平行な長方形  $PQRT$  に (1) 式を適用して証明せよ。

このように、電気力線が直線の場合、その間隔が等しくなるのは、隣り合う電気力線はたがいに反発する性質があり、そのため、平行な静電場では同じ密度で並ぶからであると解釈することがある。

問 2 図 2 (b) の電気力線は、間隔が等しい同心円の弧の集まりで、電場の向きは変わるが、大きさはどこも同じであることを表す。変動磁場が存在しない空間では、このような電場は存在せず、大きさは中心からの距離に反比例することを閉曲線  $PQRT$  に (1) 式を適用して証明せよ。ただし、 $\vec{PQ}$  と  $\vec{RT}$  は電気力線に直交し、弧  $\widehat{QR}$  と  $\widehat{TP}$  は、それぞれ、電気力線と中心を共有する同心円の一部である。

直線状の電気力線とは異なり、弧状の電気力線の間隔が等しくならないのは、電気力線にはできるだけ短くなるようにする張力が働き、その張力は電気力線が密なほど大きいため、密な所ほど短く縮むからだと解釈することがある。

図3(a)のように一様な材料でできた円形の平面状の断面をもつ電磁石のN極とS極で挟まれた空気間隙がある。磁極の間の磁束線はおよそ図3(b)のようになるが、ここでは、中心に近い領域について考え、磁束密度の向きは間隙の上下の面に垂直で、どこも等しい大きさであるとする。電磁石に流す電流を時間変化させることにより、磁束密度の大きさを変化させると、空気間隙には中心が磁極の中心軸に一致し、磁力線に垂直な面内の円形の電気力線が生じる。

以下で(1)式を使って問題を解くときは、一定の磁場に垂直な面上にあって、装置の対称軸と中心を共有する円Cに生じる起電力とCを縁とする面Sを貫く磁束を考えよ。

問3 磁束密度をN極からS極の向きを正として  $B(t)$  と書くと、中心から  $r$  の距離に

$$E(t) = -\frac{r}{2} \frac{\Delta B(t)}{\Delta t} \quad (2)$$

という電場が生じることを示せ。ただし、電場  $E(t)$  はS極から見て反時計回りを正とする。また、図3(a)のように導線を空気間隙に挿入しPとQを外部回路に繋いだとき、端子Qに対するPの電圧はいくらか。ただし、導線の円の部分の半径は  $r$  で、RTの距離は円周に比べ十分小さいとする。

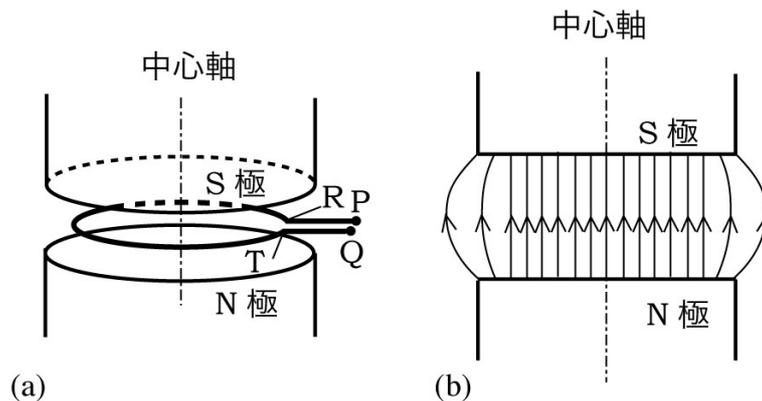


図3.

これからは、磁極の間隙は導線のない真空であるとする。その間隙の磁極の中心軸から距離  $R$  の点に電気量が  $q$  の点電荷を置いて静止させる。磁場の大きさを変化させると、点電荷は電磁誘導によって生じた電場による力を受けて運動を始める。磁束密度も電場も大きさが時間変化するにもかかわらず点電荷が1つの円の上を運動し続けるための条件を考えよう。

問4 磁極の中心軸と中心を共有する半径  $R$  の円形の電気力線上の電場を  $E(t)$  と表すことにする。一方、その円の上での磁束密度は  $B(t)$  と表す。まず、この2つが独立に与えられるとして、電気量  $q$  の点電荷が半径  $R$  の円の上を運動するための  $E(t)$  と  $B(t)$  の間の関係を求めよ。円周に沿うベクトル量の符号はS極から見て反時計回りを正とし、円軌道に垂直なベクトル量の符号は中心から外に向かう場合を正とする。

ヒント：円周方向の運動方程式を作るときは、円周方向の速度成分  $v$  を使って加速度を  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$  と表しておくといよい。

問5 前問で求めた電場と磁束密度との関係は、磁束密度が空間的に一様であるとして問3で導いたものとは異なるから、磁極の間の磁束密度は場所によって変わってはいなくてはならない。そこで、電場や磁束密度は中心軸からの距離  $r$  に依存し、時間的にも変化することを示すために、 $E(r, t)$  および  $B(r, t)$  と表すことにする。さらに、磁束密度は、2つの変数に  $B(r, t) = F_B(r)G(t)$  という形で依存すると仮定する。すると、半径  $r$  の円を貫く磁束は  $\Phi(r, t) = F_\Phi(r)G(t)$  という形で変化することになる。このとき  $r = R$  に対して

$$F_\Phi(R) = 2\pi R^2 F_B(R) \quad (3)$$

という関係が成り立つことを導け。

問6 電磁石の代わりに中心軸が共通な2つのソレノイドを使って、前問で証明した関係を満たす磁場を作ること考えよう。ただし、外側のソレノイドの半径を  $a$ 、内側のソレノイドの半径を  $b$  とする。2つのソレノイドの単位長さあたりの巻き数は共通で、内側のソレノイドには外側のソレノイドの2倍の強さの電流を同じ向きに流す。中心軸から距離  $R$  の場所で、前問で導いた(3)式の関係が成り立つための  $a$  および  $b$  に対する条件を導け。ただし、2つのソレノイドに流れる電流のみが磁場を作っているとする。

変動する電場と磁場の間には、以下に説明するように、(1)式の他に、次の関係も成り立たなくてはならない。

$$V_m(C) = \frac{\Delta\Phi_e(S)}{\Delta t} \quad (4)$$

この式の形は、(1)式と大変よく似ているが、(1)式の右辺にあった負符号がないことに注意しよう。

(4)式の両辺の意味を理解するために、空間に任意の閉曲線  $C$  とそれを縁とする面  $S$  を考える。ただし、図1と異なり、 $C$  を貫くものは磁束ではなく電束とも呼ばれる  $\Phi_e$  である。閉曲線  $C$  を縁とする面  $S$  が与えられたとき、それを貫く電束は、磁束の計算における磁束密度  $\vec{B}$  を  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  によって定義される電束ベクトル  $\vec{D}$  で置き換えることによって計算する。また、 $V_m(C)$  は、 $C$  で発生する起電力の計算における電場  $\vec{E}$  を

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

で定義される磁場ベクトル  $\vec{H}$  で置き換えて計算する。ここに出てきた  $\epsilon_0$  と  $\mu_0$  は、それぞれ、真空の誘電率(電気定数)と真空の透磁率(磁気定数)である。また、電束の符号は、 $C$  の向きをあらかじめ定義しておいて、磁束の向きと同じように決められる。

問7 半径  $a$  の円形の平行平板コンデンサーがある。極板の電荷が  $\pm Q(t)$  ( $Q(t) > 0$ ) と時間変化すると、極板の間には極板に平行で、極板と中心を共有する円形の磁束線ができる。中心から  $r$  ( $< a$ ) の距離にできる磁束密度は時間とともに、どのように変化するか。また、 $Q(t)$  が時間とともに増加するとき、磁束線の向きは負極から見て時計回りか反時計回りか。ただし、極板の間の距離は円の半径に比べて十分小さいため、端での電気力線の乱れは無視できるものとする。

## 第2問B (55点)

必要な場合は以下の表1の物理定数の値を用いよ。

表1.

真空中の光速度	$c$	299792458	m/s (定義)
電子の質量	$m$	$9.1094 \times 10^{-31}$	kg
電気素量	$e$	$1.6022 \times 10^{-19}$	C
クーロンの法則の定数	$k_0$	$8.9876 \times 10^9$	$\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$
プランク定数	$h$	$6.6261 \times 10^{-34}$	J·s
ボルツマン定数	$k$	$1.3807 \times 10^{-23}$	J/K
リュードベリ定数	$R$	$2.1799 \times 10^{-18}$	J

[I]

質量  $m$ 、電荷  $-e$  の電子が原点にある電荷  $e$  の正イオンからクーロン力を受けて原点のまわりを半径  $r$ 、速さ  $v$  で等速円運動をしているとする。イオンの質量は十分大きいとする。正イオンのクーロン力による電子に対する位置エネルギーは無遠くにおける値を0にとると

$$V(r) = -k_0 \frac{e^2}{r} \quad \left[ k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} : \epsilon_0; \text{真空の誘電率 (電気定数)} \right] \quad (1)$$

と表される。

問1 a) 電子の中心 (向心) 方向の運動方程式を書け。

b) 電子の力学的エネルギー  $E$  (運動エネルギーと位置のエネルギーの和) と  $V$  の比を求めよ。

[II]

20世紀の初頭に、原子・分子の大きさの尺度 ( $\sim 10^{-10} \text{ m}$ ) では古典力学は成立せず、新しい力学が必要であると認識されるようになった。今から丁度100年前の1913年にボーア (N. Bohr) は以下に示すような原子模型を提案した。これは1920年代半ばに成立した量子力学の研究の出発点となった。この原子模型から量子力学成立までの過渡的な理論は前期量子論といわれる。

ボーアの水素原子模型では電子が陽子からのクーロン力によって束縛され陽子のまわりを等速円運動していると考えられる。以下では電子の質量は  $m$ 、陽子の質量は  $m$  より十分大きいとする。

A) ボーアの量子条件

ボーアは、陽子に束縛された電子には離散的なエネルギーをもつ定常状態 (エネルギーの決まった状態) があると仮定した。この仮定は、後に提案された物質波の概念を使うと、電子がこの定常状態の軌道にあるとすれば、円軌道の長さが電子の物質波のドブローイ波長  $\lambda (= \frac{h}{mv})$  の整数倍に等しい、すなわち

$$2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{mv} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

の条件を満たすという仮定である。ここで  $h$  はプランク定数,  $n$  は正の整数で主量子数と呼ばれる。式 (2) は電子波が円軌道を一周したとき前の位相と一致し, 定在波として安定して存在する条件と解釈される。

問 2 a) 問 1 の結果を考慮して, 主量子数が  $n$  である定常状態にある電子の軌道半径  $r_n$  およびこの系の力学的エネルギーすなわちエネルギー準位  $E_n$  がそれぞれ

$$r_n = n^2 a_0 \quad (3)$$

$$E_n = -\frac{R}{n^2} \quad (4)$$

と与えられることを示せ。また定数  $a_0$  と  $R$  を物理定数  $h, k_0, m, e$  で表せ。ここで  $a_0$  はボーア半径,  $R$  はリュードベリ定数 (表 1 参照) と呼ばれる。

b)  $a_0$  [m] の値を計算せよ。数値計算は有効数字 5 桁以上でおこない, 結果は四捨五入して有効数字 4 桁で答えよ。

$n = 1$  の定常状態を水素原子の基底状態,  $n \geq 2$  の定常状態を励起状態という。

#### B) ボーアの振動数条件

状態  $n$  にある水素原子に以下の条件 (5) を満たす周波数 (振動数ともいう)  $\nu_{nn'}$ , 波長  $\lambda_{nn'}$  の電磁波を照射したとする。

$$\Delta E_{nn'} = E_{n'} - E_n = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) = h\nu_{nn'} = h \frac{c}{\lambda_{nn'}} \quad n' > n \quad (5)$$

このとき, 電磁波のエネルギーは水素原子に吸収され, 水素原子は状態  $n'$  に励起される。また, 水素原子がはじめ状態  $n'$  の励起状態にあれば, 同じ周波数の電磁波を放射して水素原子はエネルギーを失い, 下の状態  $n$  へ遷移する。

問 3 水素原子の基底状態から第一励起状態への遷移  $n = 1 \rightarrow n' = 2$  に対する励起エネルギー  $\Delta E_{1,2}$  [J], およびこの遷移に伴い吸収または放射される電磁波の周波数  $\nu_{1,2}$  [Hz], 波長  $\lambda_{1,2}$  [m] を求めよ。結果は有効数字 4 桁で答えよ。

水素原子のエネルギー準位 (4) 式の導出は電子の等速円運動とボーアの仮定に基づいて導出されているが, 得られた水素原子の放射および吸収の線スペクトルの周波数は実験結果を正しく説明する。

一般に原子は中心にある原子核と複数の電子からなる。その中の 1 つの電子が高い量子数の状態に励起されると, 中心付近に存在するそれ以外の電子と原子核からなるイオンはよい近似で正の点電荷と見なせるからここで考察した水素原子のモデルが適用できる。このように 1 つの電子が高く励起された状態をリュードベリ状態と呼び, そのエネルギー準位は (4) 式でよく記述される。高い主量子数 (例えば  $n > 100$ ) の状態にある励起原子を高励起リュードベリ原子または略して高リュードベリ原子と呼ぶ。

[III]

ここで目を宇宙に向けてみることにしよう。宇宙からの電波は可視光と同様に地球の大気でほとんど吸収されないで、地上の電波望遠鏡で観測できる。宇宙では水素原子が最も多く存在するが、それ以外の元素（これを E と表す）も存在する。元素 E と水素の原子数（イオンを含む）の比  $A_c = \frac{[E]}{[H]}$  をその元素の宇宙存在度という。銀河系にはこれらの星間物質の原子やイオンの数密度が比較的大きい領域があり、これを星間雲という。そこでは自由電子がイオンに捕獲され高リユードベリ原子が生成される。この過程を再結合過程という。また、高リユードベリ原子が異なる高リユードベリ状態へ遷移することにより発生する電波領域の電磁波の放射や吸収の線スペクトルが観測されており、これらを電波領域における再結合線という。

とくに、炭素（原子とイオン）の宇宙存在度は  $A_c = \frac{[C]}{[H]} = 0.00037$  と大きく、かつ、炭素原子は水素原子よりもイオン化されやすいため、星間雲中では炭素のみがイオン化され、水素原子、炭素原子、炭素イオンおよび自由電子が共存する領域が存在し、そこで炭素高リユードベリ原子への再結合過程が起こると考えられている。実際、強い電波源であるカシオペア座 A の方向に再結合により生成された炭素高リユードベリ原子からの吸収線が観測されている。

高リユードベリ原子の状態  $n \leftrightarrow$  状態  $n' = n + 1$  間の遷移に対応する放射・吸収による再結合線を  $n\alpha$  線とよび、炭素原子の場合は  $Cn\alpha$  再結合線と略称される。なお星間雲は全体としては視線方向に運動をしており、それに関連するドップラー効果が存在するが、以下の議論ではそれに関する補正はすでに考慮されている。

問 4 表 2 は電波領域でカシオペア座 A の方向に観測された吸収線の周波数である。この吸収線は  $Cn\alpha$  再結合線であると仮定して、表 2 の各周波数について炭素高リユードベリ原子の遷移の下準位の主量子数  $n$ （定義により整数）を決定せよ。

$n \gg 1$  の場合に成り立つ以下の近似式をもちいてよい。

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2}{(n+\frac{1}{2})^3} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}$$

ここで、 $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  は  $\frac{1}{n}$  の 2 次以上の高次の項を表す。

表 2：カシオペア座 A の方向に観測された電波領域の吸収線の周波数

$\nu$  [MHz] :            16.74,            29.93

高リユードベリ原子の生成のメカニズムの 1 つについて考えてみよう。星間空間にもっとも多く存在するのは水素原子であるが、上述のように  $n = 500 \sim 1000$  程度の高リユードベリ状態にある励起原子としてその存在が確認されているのは、今までの観測では炭素原子に限られている。

炭素イオンは基底状態のすぐ上に非常に低い第一励起状態 ( $C^+$ )\* [ 励起エネルギー  $\Delta E_{exc} = 1.27 \times 10^{-21}$  J または  $\frac{\Delta E_{exc}}{k} = 92$  K ] を持つ。したがって、熱エネルギー程度の低い運動エネルギーを持つ自由電子が炭素イオンと衝突するとき、電子は炭素イオンをその第一励起状態へ励起することにより運動エネルギーの大部分を失い、さらに電子自身はクーロン力によって弱

く束縛されて、高い主量子数  $n$  の高リユードベリ原子が生成される。この再結合過程は次の式で表される。



ここで  $C^*(n)$  は励起された炭素イオン  $(C^+)^*$  により電子が主量子数  $n$  の励起状態に束縛されていることを示す。ここでは、再結合過程 (6) を運動量の保存則、エネルギーの保存則の観点から考えてみよう。

問 5 再結合過程 (6) の始状態において基底状態にある炭素イオン  $C^+$  は静止しており、これに運動エネルギー  $E_e$  をもつ自由電子が衝突し結合するものとする。終状態ではこの電子は炭素イオンを第一励起状態へと励起してエネルギー  $\Delta E_{\text{exc}}$  を失い、電子自身は第一励起状態にある炭素イオンの主量子数  $n$  の状態に捕獲され炭素高リユードベリ原子が生成される。その結果この再結合過程で生じた余剰エネルギーは生成した高リユードベリ原子  $C^*(n)$  全体の運動エネルギー  $E_k$  となる。終状態で捕獲された電子のエネルギー準位を  $E_n$  とし、再結合過程 (6) の前後で運動量保存則、エネルギー保存則が成り立つとして以下の問に答えよ、なお炭素イオン  $C^+$  の基底状態をエネルギーの原点として考えよ。

- 運動量の保存則により、 $E_e$  と  $E_k$  の関係を求めよ。自由電子の質量を  $m$ 、炭素イオンの質量を  $M$  とする。
- エネルギー保存則に基づき、a) の結果も考慮して主量子数  $n$  の高リユードベリ原子が生成されるとき電子の入射エネルギー  $E_e$  を  $\Delta E_{\text{exc}}$ 、 $E_n$ 、 $M$ 、 $m$  を用いて表せ。

この結果によれば、炭素の高リユードベリ原子の場合、炭素イオンの質量は  $M = 2.2 \times 10^4 m$  であり、 $\frac{m}{M} \ll 1$  であるので、自由電子の入射エネルギーは炭素イオンの励起エネルギーおよびリユードベリ電子の炭素イオンによる束縛エネルギーに変換されることになる。さらに、主量子数  $n = 500 \sim 1000$  であることを考慮すると  $\Delta E_{\text{exc}} \gg |E_n|$  であり、上述の過程では  $E_e$ 、 $\Delta E_{\text{exc}}$  のエネルギーを持つ自由電子が主としてこの励起原子の生成に寄与することがわかる。

一方、この励起原子が生成され、存在する環境下では原子の熱運動によるドップラー効果や電子や他粒子との衝突、背景の放射場の影響等により再結合線の線スペクトルは線幅をもつ。このスペクトル線の線幅などは励起原子の周りの環境をなす星間物質（星間媒質という）の物理的状況を強く反映する。

問 6 上記の生成のメカニズムを考慮して、炭素高リユードベリ原子の再結合線  $Cn\alpha$  における吸収線の線スペクトルの線幅などについての多くのデータについて解析が行われ、この励起原子が存在する星間媒質における電子の数密度  $N_e = 0.02 \text{ cm}^{-3}$  が得られている。以下では結果は四捨五入して有効数字 2 桁で与えよ。

- この星間媒質は水素原子、炭素原子、炭素イオンおよび自由電子からなっていると考えられる。電子は炭素原子のイオン化に由来するとし、その数密度は  $N_e = 0.02 \text{ cm}^{-3}$  と仮定する。炭素の 60% がイオン化されているとしたとき、この星間媒質中の水素原子の数密度 [ $\text{cm}^{-3}$ ] を推定せよ。なおこの星間媒質中では前述の炭素の宇宙存在度についての記述が成り立つと考えてよい。
- この星間媒質はほぼ水素原子からなっているが、その温度  $T_H$  は  $50 \sim 100 \text{ K}$  であるというデータがある。またこの媒質は非常に希薄な状態であり理想気体と考えてよい。温度を  $T_H = 75 \text{ K}$  と仮定して、この星間媒質の圧力  $P$  [Pa] を推定せよ。

我々は地球の大気圧（約  $1000 \text{ hPa} = 10^5 \text{ Pa}$ ）の下で生存しているが、宇宙の星間空間では上記のように超高真空が実現されており、高リユードベリ原子の存在が可能になっている。また、原子の再結合線、特にここで取り上げた炭素の再結合線は低温・低密度の星間媒質に関する感度のよい診断の方法を与えている。

## 参考

我々の日常生活に関わりが深い光は電磁波である。我々の目はいわゆる可視領域（波長： $\lambda \sim 400 \text{ nm} - 800 \text{ nm}$ ）の電磁波（すなわち光）の感度のよい検出器である。さらに波長が短くなれば紫外線，X線， $\gamma$ 線と呼ばれ，一方波長が長くなれば赤外線，マイクロ波，電波と呼ばれる。この問題で取り上げたのは電磁波の波長領域でいえば，紫外線（波長： $\lambda \sim 10 \text{ nm} - 400 \text{ nm}$ ）と電波（波長： $\lambda \sim 0.1 \text{ m} - 1000 \text{ m}$ ）の領域における電磁波の場と最も簡単な構造を持つ物質である水素原子および水素原子と同様にあつかえる高リユードベリ原子との相互作用に関するものである。

一方微視的な量子力学的世界における粒子は粒子性ととも波動性をもっている。理論的には古典的な電磁波の場を量子化すると光子が出現する。上述のいろいろな波長領域の電磁波も素粒子物理学的には1つの素粒子の光子である。一般に電磁波の場合は波長が短くなれば粒子性が顕著になり，長くなれば波動性が顕著になる。しかし上記の炭素再結合線のように波長  $\lambda \sim 10 \text{ m} - 20 \text{ m}$  であり，波動性が顕著な電磁波であっても，それが原子に吸収または放出されるときにはエネルギーが  $h\nu = h\frac{c}{\lambda}$  の光子として振舞う。

我々が日常生活している  $1 \text{ kg}$ ,  $1 \text{ m}$ ,  $1 \text{ s}$  といった尺度の巨視的な古典力学の世界では粒子と波動の二重性を実感するのは困難であるが，原子，分子や電子の大きさの微視的な量子力学的な世界では普遍的にみられることである。電磁波の発生と検出方法は様々であるが，素粒子物理学の言葉でいえば波長に関係なく，光子として，統一的に理解される。また量子理論によれば物質のエネルギー準位は固有な構造をもつので，ここでとりあげたように炭素の再結合線の観測によって宇宙空間を探ることができる。

### 第3問 (80点)

光は電磁波の一種であり，音波等と同様に干渉や回折をおこす。干渉や回折により，ニュートンリングやフラウンホーファー回折等，波特有の現象が光で起きることが知られている。“光の明るさ”は，光の電場の振幅の2乗に比例し，“光の色の違い”は“波長の違い”によるものである。波長により水の屈折率が異なるので，屈折により波長ごとに光線が分裂することで虹ができる。ここでは，フラウンホーファー回折の原理と反射，屈折の法則に基づく虹の原理を考えたのち，2つの原理を合わせてより深く虹の見え方について考察する。

[I]

最初に波動としての光の伝搬を記述する方法を説明する。 $x$  方向に伝わる単色な平行光線の光波の式は

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

と書ける。このとき， $A$  は振幅， $k$  は波数と呼ばれ，波長  $\lambda$  のとき， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  であり，角振動数が  $\omega$  のとき，光速が  $c$  の真空中（空気中もほぼ同じ）では， $\omega = kc$  の関係がある。時刻  $t$ ，場所  $x$  における光の振動の位相は  $\omega t - kx + \phi$  である。振幅，波長，角振動数の等しい2つの光を  $u_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi_1)$ ， $u_2(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi_2)$  としたとき，2つの光の位相差は， $\phi_1 - \phi_2$  であり，位相差が0か  $2\pi$  の整数倍であれば2つの光は強め合い，位相差が  $\pi(1 + 2j)$ ，( $j$  は整数)，であれば打ち消し合う。波動を記述する以上の方法を参考に以下の設問に答えよ。

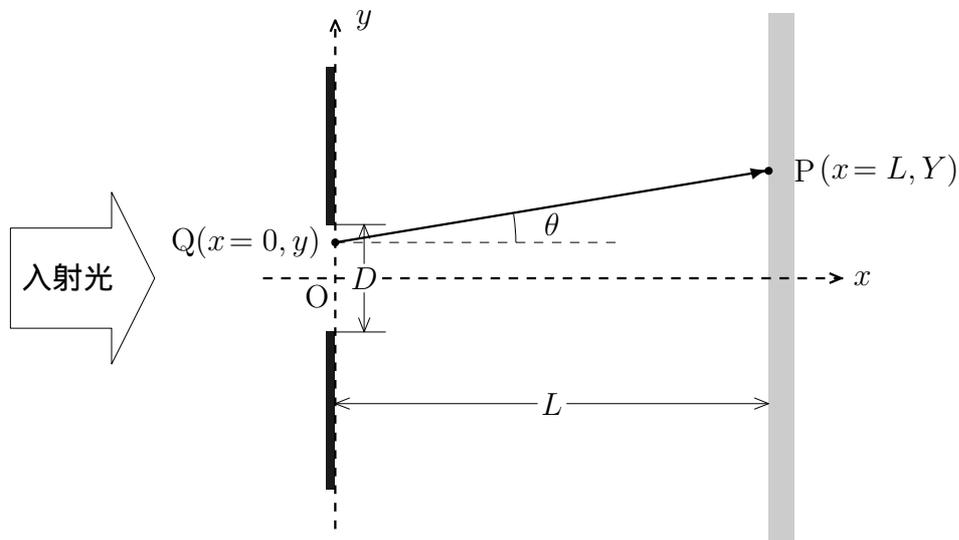


図1.

光の波動性を表す1つの例であるフラウンホーファー回折を考えよう。図1のように，幅  $D$  のスリットに垂直に入射した単色の平行光線の強度がスリットの幅よりも十分大きい距離  $L$  だけ離れたところのスクリーン上でどのようになるかを考えよう。波長  $\lambda$ ，角振動数  $\omega$  ( $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ ) の光波をスリットがある  $x = 0$  の面上で  $A \cos(\omega t)$  とする。スクリーン上での強度分布は，ホイヘンスの原理よりスリットの各位置から放射する球面波（今の場合  $x$ - $y$  面に垂直な  $z$  方向に無限に長いスリット考えているので円柱状の波面になる。）の重ね合わせで決まる。

問1 図1のスリットのQ点 ( $x = 0, y$ ) より放射する円柱面波がスクリーンのP点 ( $x = L, Y$ ) に到達したときのQ点での位相とP点での位相の差  $\Phi$  を  $2\pi \frac{\overline{QP}}{\lambda}$  とすると,  $\Phi$  は近似的に

$$\Phi = \frac{\omega}{c} (L^2 + Y^2)^{1/2} \left( 1 - \frac{Yy}{L^2 + Y^2} \right)$$

になることを示せ。ただし,  $|y| \ll (L^2 + Y^2)^{1/2}$  とし,  $y$  について2次以上の項を無視せよ。ここで必要なら,  $|h|$  が1に比べて十分小さい場合,  $(1+h)^{1/2} \approx 1 + \frac{h}{2}$  と近似できることを使ってよい。

スリットのQ点から出た光がスクリーンのP点に到達したときの円柱面波は  $\cos(\omega t - \Phi)$  に比例する。スクリーンのP点での光波はスリットの各点からの円柱面波の重ね合わせで決まるので,  $\cos(\omega t - \Phi)$  を  $y$  について  $-\frac{D}{2} < y < \frac{D}{2}$  の範囲で以下のように積分することで求めることができる。以下で  $R = (L^2 + Y^2)^{1/2}$  である。

$$\begin{aligned} & \int_{-D/2}^{D/2} \cos \left\{ \omega t - \frac{\omega}{c} R \left( 1 - \frac{Yy}{R^2} \right) \right\} dy \\ &= \frac{cR}{Y\omega} \left\{ \sin \left( \omega t - \frac{\omega}{c} R + \frac{Y\omega D}{2cR} \right) - \sin \left( \omega t - \frac{\omega}{c} R - \frac{Y\omega D}{2cR} \right) \right\} \\ &= 2 \frac{cR}{Y\omega} \sin \frac{Y\omega D}{2cR} \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} R \right). \end{aligned}$$

この結果, スクリーン上での光波は  $A \frac{\sin q}{q} \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} R \right)$  に比例することがわかる。ただし  $q = \frac{Y\omega D}{2cR}$  である。

問2 a) スクリーン上での光波の振幅は  $\left| \frac{\sin q}{q} \right|$  に比例する。  $\frac{\sin q}{q}$  を  $q$  を横軸にして図示せよ。

b)  $Y$  が0から増加したとき, 最初に振幅が0となる  $\frac{Y}{L}$  を  $D$  と  $\lambda$  を用いて表せ。

以上の結果, 図1の点P ( $x = L, Y$ ) が振幅の最初の零点としたとき, 図1の線分QPと  $x$  軸のなす角度  $\theta$  は  $D \ll L, \frac{\lambda}{D} \ll 1$  の場合, 近似的に,  $\theta = \frac{Y}{L}$  ラジアンになる。これは, フラウンホーファーの回折角と呼ばれ, 幅  $D$  のスリットからでた波長  $\lambda$  の光は, 回折により伝搬方向が角度  $\frac{\lambda}{D}$  だけ広がることを示している。

[II]

虹は空気中に漂う水滴 (球形とする) が太陽光を散乱することで現れる。散乱が光の波長によって異なるために虹の色が生じる。虹ができる原理, すなわち水滴による光の散乱の一種である虹散乱について以下で考えてみよう。

図2のように, 半径  $a$  の球形の水滴にA点より入射する光線を考える。球の中心をOとし, Oを通り入射光線に平行な直線と入射光線との距離を  $b$  とする。A点での入射角を  $\theta$  とし, 屈折角を  $\theta'$  とする。

問3 空気の屈折率を1, 水の屈折率を  $n$  とするとき, 屈折の法則より  $\sin \theta$  と  $\sin \theta'$  の関係を求め,  $\sin \theta$  と  $\sin \theta'$  を  $a, b, n$  を用いて表せ。

水滴の中の光線はB点より一部空気中に出るが, 残りは図2のように水滴内部に反射されてC点より空気中に出る。

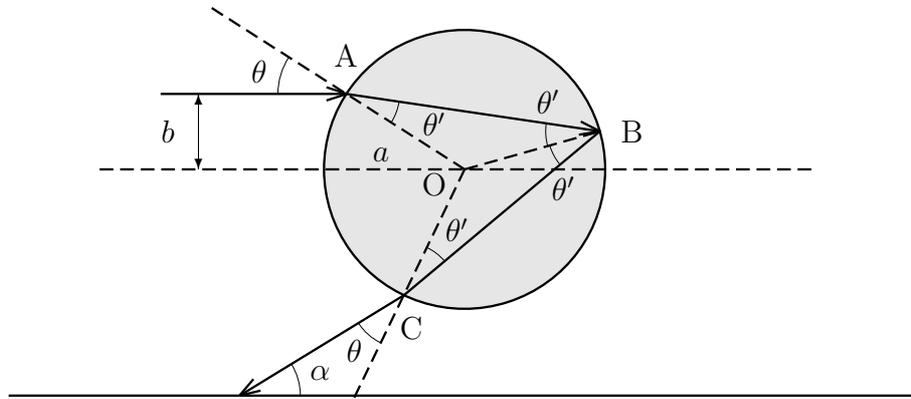


図2.

問4 図2のC点から出てきた光線の入射光線に対する角度  $\alpha$  を  $\theta$  と  $\theta'$  を用いて表せ。

与えられた  $y$  に対し  $y = \sin(x)$  となるような  $x$  の値を与える関数を逆正弦関数と呼び,  $x = \sin^{-1}(y)$  と表す。正弦関数が周期関数なので, 1つの  $y$  の値に対応する  $x$  の値は無数にある。そのうち  $-90^\circ \leq x \leq 90^\circ$  の範囲の  $x$  を逆正弦関数の主値と呼び,  $x = \text{Sin}^{-1}(y)$  と表す。逆正弦関数を使うと, 例えば  $\text{Sin}^{-1}(0.5) = 30^\circ$  である。また, 問3の結果から  $\theta = \text{Sin}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$  等が導かれる。

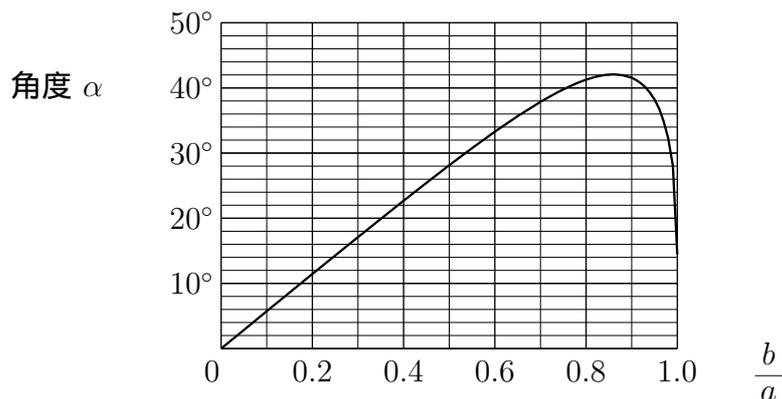


図3.

そこで問4の結果に従って, 屈折率  $n = 1.333$  のときの角度  $\alpha$  と  $\frac{b}{a}$  との関係をグラフに示すと図3のようになる。一般に, 角度  $\alpha$  は  $b$  が0のとき0で,  $b$  が増加するとともに増加するが,  $b$  がある値のところまで最大値  $\alpha_0$  をとり, その後は減少に転じる。角度  $\alpha$  が最大値になるような散乱を虹散乱と呼ぶ。

問5 図3を参考にして，問4の結果より  $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$  のとき，角度  $\alpha$  が最大となることを示せ。ただし  $n < 2$  とする。

ヒント： $\frac{d\alpha}{db} = 0$  より最大値は求められる。なお，この微分を実行するとき以下の関係を利用するとよい。

$$\frac{d \sin \theta}{db} = \frac{d\theta}{db} \cos \theta, \quad \frac{d \sin \theta'}{db} = \frac{d\theta'}{db} \cos \theta'$$

問6 オレンジ色の光に対する水の屈折率  $n$  は 1.333 である。この光に対して虹散乱が生じるときの  $\frac{b}{a}$  および虹散乱の角度  $\alpha_0$  の値を式を計算して求めよ。

問7  $b$  と  $b + \Delta b$  の間を通過した光線が， $\alpha$  と  $\alpha + \Delta\alpha$  の間の角度で出て行くとするときの単位角度あたりに出て行く光の強度は，近似的に

$$\left| \frac{\Delta b}{\Delta\alpha} \right| \frac{1}{\left| \frac{d\alpha}{db} \right|}$$

に比例すると考えよう。 $n = 1.333$  としたときの， $\frac{b}{a} = 0, 0.6, 0.8, 0.86, 0.9$  に対する  $\frac{1}{a \left| \frac{d\alpha}{db} \right|}$  の値を表にしたのち，この関数のおよそのグラフを描け。なお  $\alpha = \alpha_0$  のときこの関数は発散することに注意せよ。

1つの水滴に入った光線も， $b$  の大きさによって  $\alpha$  の異なるいろいろな方向に出て行くが，問7の結果からわかるように，かなり多くの散乱光が虹散乱の角度  $\alpha_0$  の近くの方角に出て行く。したがって，以下では，虹散乱に注目する。

問8 水の屈折率は可視光では，波長とともに減少する。屈折率の波長依存性は近似的に，ナトリウムの輝線（オレンジ色） $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$  を標準に， $n = 1.333 - K \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}$ ， $K = 0.018$  で与えられる。波長  $589 \text{ nm}$  のオレンジ色を中心とし， $700 \text{ nm}$  の赤色（ $\delta\lambda = 111 \text{ nm}$ ）， $400 \text{ nm}$  の紫色（ $\delta\lambda = -189 \text{ nm}$ ）を考えると，赤色と紫色に対する虹散乱の角度の差  $\alpha_0(\text{赤}) - \alpha_0(\text{紫})$  を求めよ。

問8の結果より虹散乱の角度は赤，緑，青の順に小さくなる。したがって虹の色は上から赤，緑，青の順にならぶことがわかる。

[III]

以上で，水滴による散乱で色のついた虹が発生することが説明できた。しかし，光の波動性を考えると，上記の虹の原理を適用するためには水滴がある程度以上大きいことが必要である。そこで，以下では，ここまで考えた（幾何光学による）虹の原理の適用限界を考える。虹散乱を起こす水滴では，問7の結果が示すように， $\frac{b}{a}$  がおよそ  $0.7 \sim 0.9$  の範囲である。すなわち， $0.2a$  が問1と問2のスリットの幅  $D$  に相当すると考えてよい。

問9 問8で求めた虹散乱の散乱角は，問1および問2の回折効果により幅をもつ。オレンジ色の光のフラウンホーファーの回折角が，問8で求めた赤と紫の虹散乱角度の差より大きくなると，すべての可視光の散乱光が重なる方向がある。このようなことが起きるためには，オレンジ色の光を基準にして水滴の半径はどの程度小さくしなければならないか。

問10 問9の条件を満たす水滴による虹はどのように見えるか推測せよ。

群馬，新潟，福島の3県に跨がる尾瀬ヶ原や米国のサンフランシスコは，問10の虹が現れることで有名である。機会があれば観察してみてはどうでしょうか？