物理チャレンジ 2013

第 1 問 A　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | 　氏名 ____________

問 1　8 点

車とともに移動する加速度系で見ると車は静止しているので，車に作用する力の釣り合いを考える。車の重心に作用する慣性力は進行方向に Ma である。

後輪, 前輪の接地点のまわりの力のモーメントの釣り合いの条件は

$$(l_1+l_2)\,R_1 = l_2 Mg + Mah, \qquad (l_1+l_2)\,R_2 = l_1 Mg - Mah$$

以上から

$$R_1 = \frac{l_2\,g + ah}{l_1+l_2}M\,, \qquad R_2 = \frac{l_1\,g - ah}{l_1+l_2}M$$

急ブレーキをかけると車は前のめりになることがわかる.

$R_1 = \boxed{\dfrac{l_2\,g + ah}{l_1+l_2}M}$ ，　$R_2 = \boxed{\dfrac{l_1\,g - ah}{l_1+l_2}M}$

問 2　8 点

スリップを起こさない条件は $F_1 + F_2 \leqq \mu(R_1 + R_2)$ である。制動距離を最も短くするためには前輪、後輪に同様に摩擦力が作用することが必要である。したがって加速度の絶対値の上限が実現するとき $F_1 = \mu R_1$，$F_2 = \mu R_2$ である。$F_1 + F_2 = Ma$，$R_1 + R_2 = Mg$ であるから，$a \leqq \mu g$，すなわち $a_1 = \mu g$ を得る。

$a_1 = \boxed{\mu g}$ ，　摩擦力と抗力の関係 $\boxed{F_1 = \mu R_1,\ F_2 = \mu R_2}$

問 3　8 点

数値を代入して $a_1 = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，制動前の速度を v とすると $a = \dfrac{v^2}{2L}$ の関係を使って $v_1 = 28\,\mathrm{m/s}$ を得る。

$a_1 = \boxed{9.8\ \mathrm{m/s^2}}$ ，　$v_1 = \boxed{28\ \mathrm{m/s}}$

解答合計　　点

第 1 問 A　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　氏名

問 4　10 点

車に固定した回転座標系で考える．重心には水平方向に遠心力 $\dfrac{Mv^2}{r}$, 鉛直下方に重力 Mg が作用する．力の釣り合いの条件から

$$R_1 + R_2 = Mg\cos\theta + \frac{Mv^2}{r}\sin\theta, \qquad F_1 + F_2 = \frac{Mv^2}{r}\cos\theta - Mg\sin\theta$$

重心のまわりの力のモーメントの釣り合いの条件から

$$h(F_1 + F_2) = \frac{s}{2}(R_2 - R_1)$$

以上から次の結果を得る。

$$R_1 = \frac{Mg}{2}\left(\cos\theta + \frac{2h}{s}\sin\theta\right) + \frac{Mv^2}{2r}\left(\sin\theta - \frac{2h}{s}\cos\theta\right)$$
$$R_2 = \frac{Mg}{2}\left(\cos\theta - \frac{2h}{s}\sin\theta\right) + \frac{Mv^2}{2r}\left(\sin\theta + \frac{2h}{s}\cos\theta\right)$$

$$R_1 = \boxed{\frac{Mg}{2}\left(\cos\theta + \frac{2h}{s}\sin\theta\right) + \frac{Mv^2}{2r}\left(\sin\theta - \frac{2h}{s}\cos\theta\right)}$$

$$R_2 = \boxed{\frac{Mg}{2}\left(\cos\theta - \frac{2h}{s}\sin\theta\right) + \frac{Mv^2}{2r}\left(\sin\theta + \frac{2h}{s}\cos\theta\right)}$$

$$F_1 + F_2 = \boxed{-Mg\sin\theta + \frac{Mv^2}{r}\cos\theta}$$

問 5　7 点

横滑りしない条件は $F_1 + F_2 \leqq \mu(R_1 + R_2)$ である。前問の式から

$$R_1 + R_2 = Mg\cos\theta + \frac{Mv^2}{r}\sin\theta$$
$$F_1 + F_2 = -Mg\sin\theta + \frac{Mv^2}{r}\cos\theta$$

以上から速さの上限は

$$v^2 = gr\,\frac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu\tan\theta} = \mu gr\,\frac{1 + \dfrac{1}{\mu}\tan\theta}{1 - \mu\tan\theta}$$

横滑りしない速さの上限 $= \boxed{\sqrt{gr\,\dfrac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu\tan\theta}}}$

解答合計　　点

第 1 問 A　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問 6　7 点

横転しない条件は $R_1 \geqq 0$ である。すなわち

$$R_1 = \frac{Mg}{2}\left(\cos\theta + \frac{2h}{s}\sin\theta\right) + \frac{Mv^2}{2r}\left(\sin\theta - \frac{2h}{s}\cos\theta\right) \geqq 0$$

これより速さの上限は

$$v^2 = gr\,\frac{s + 2h\tan\theta}{2h - s\tan\theta} = \frac{grs}{2h}\,\frac{1 + \dfrac{2h}{s}\tan\theta}{1 - \dfrac{s}{2h}\tan\theta}$$

横転しない速さの上限 $= \boxed{\sqrt{gr\,\dfrac{s + 2h\tan\theta}{2h - s\tan\theta}}}$

問 7　7 点

$\mu gr < \dfrac{sgr}{2h}$ すなわち $\dfrac{s}{2h} > \mu$ ならば 横転する前に横滑りする。逆に $\dfrac{s}{2h} < \mu$ ならば 横滑りする前に横転する。

$s = 1.54\,\mathrm{m}$，$h = 0.56\,\mathrm{m}$，$\mu = 1.0$ のとき $\dfrac{s}{2h} = 1.375 > \mu = 1.0$ であるので，横転する前に横滑りする。

先に横滑りするか，横転するか? $\boxed{\text{横滑りする}}$

解答合計
点

第 1 問 B　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 1　6 点

表と裏の 2 つの表面があるから，表面張力により可動枠に働く力は $2x\gamma$ である。この力と反対向きに Δy 動かすから，仕事は $2x\gamma\Delta y$.

（可動枠には膜の内部から圧力が働くが，膜の厚さは小さく，液体の体積変化に伴う仕事は無視できる [言及しなくてよい]。）

Δy だけ引き延ばすときの仕事　$2x\gamma\Delta y$

問 2　7 点

閉曲線で囲まれた表面の縁をわずかに変形することを考える。閉曲線を細かく分割して，一つの要素（長さ $\mathrm{d}s_i$）に着目すると，表面からは表面に沿う垂直で内向きの表面張力 $\gamma\,\mathrm{d}s_i$ が働いている。これに釣り合う外向きの力 $\gamma\,\mathrm{d}s_i$ を加えてこの部分を $\vec{\delta}_i$ だけ移動すると，その仕事は ($\vec{\delta}_i$ の垂直外向き成分)$\times\gamma\,\mathrm{d}s_i$ であり，これを閉曲線に沿って加えたものが表面になされた仕事 ΔW である。

一方，($\vec{\delta}_i$ の垂直外向き成分) $\times\,\mathrm{d}s_i$ を閉曲線に沿って加えると，面積の増加分 ΔS になる。したがって，$\Delta W = \gamma\Delta S$.

問 1 のような変形（長方形の 1 つの辺の移動）だけを考えた場合は減点?

（表面の一般の変形について示すには，表面を微小部分に分け，各微小部分になされた仕事が $\gamma\times$(微小部分の面積の増加) となることに注意して，これらを加えればよい。[言及しなくてよい] ）

問 3　7 点

問題文にある液滴の場合との違いは膜の表裏に 2 つの表面があることである。したがって，内側が $\dfrac{4\gamma}{R}$ だけ高い。

シャボン玉内外の圧力差　$\dfrac{4\gamma}{R}$

問 4　7 点

圧力は $p_0 + \dfrac{4\gamma}{R}$，体積の増加は $\Delta V = 4\pi R^2\Delta R$ だから，仕事は

$$(p_0 + \frac{4\gamma}{R})\Delta V = 4p_0\pi R^2\Delta R + 16\pi\gamma R\Delta R$$

.　第 1 項はシャボン玉内部の体積の増加に要する仕事 $p_0\Delta V$ であるから，膜に蓄えられるのは $16\pi\gamma R\Delta R$ である（「γ を含む項が膜に蓄えられるエネルギーであるから」でもよい)。

または，膜の表面積は $2\Delta(4\pi R^2) = 16\pi R\Delta R$ だけ増加するから，$\Delta W = \gamma\Delta S$ により，膜に蓄えられるエネルギーは $\Delta(8\pi\gamma R^2) = 16\pi\gamma R\Delta R$ でもよい。

ΔR だけ増すのに必要な仕事　$4p_0\pi R^2\Delta R + 16\pi\gamma R\Delta R$

膜に蓄えられるエネルギー　$16\pi\gamma R\Delta R$

解答合計　　点

第 1 問 B　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号**　　氏名

問 5　　7 点

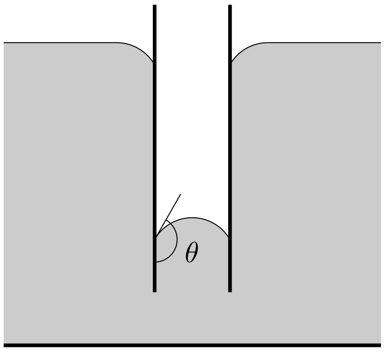
遠方の液面より上にある液体部分の鉛直方向の力の釣り合いから，

$$\pi r^2 p_0 + 2\pi r\gamma\cos\theta - (\pi r^2 p_0 + \rho g \pi r^2 H) = 0,$$

p_0 は大気圧（大気圧の効果はバランスしているとして，p_0 の項はなくてもよい）。したがって，

$$H = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合



採点者へ

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合には，液面の下がりを $H\,(>0)$ として，遠方の液面より下の気体の鉛直方向の釣り合いから，$\pi r^2(p_0 + \rho g H) - \pi r^2 p_0 - 2\pi r\gamma\cos(\pi - \theta) = 0$ から

$$H = -\frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}.$$

（下がる場合を $H < 0$ とすれば，$0 < \theta < \pi/2$ の場合と同じ式で表される。）

$$H = \boxed{\frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}}$$

問 6　　7 点

$0 \leqq z \leqq h$ で，紙面に垂直な方向に単位長の厚さをもつ液体部分の x 方向の釣り合いを考える。大気圧を p_0 とすると，z での壁への圧力は $p_0 - \rho g z$ だから，液体部分から壁に働く x 方向の力は

$$-\int_0^h dz(p_0 - \rho g z) = -p_0 h + \frac{1}{2}\rho g h^2.$$

この反作用で，液体には $p_0 h - \frac{1}{2}\rho g h^2$ の力が x 方向に働く。一方，大気からは $-p_0 h$，表面張力からは，壁に接する所で $-\gamma\sin\theta$，x が十分大きな所で γ が働く。これらの和が 0 であるから

$$p_0 h - \frac{1}{2}\rho g h^2 - p_0 h - \gamma\sin\theta + \gamma = 0.$$

したがって

$$h = \sqrt{\frac{2\gamma(1 - \sin\theta)}{\rho g}}.$$

採点者へ

問 5 では鉛直方向の釣り合いに自然に着目すると期待できる。この場合は水平方向の釣り合いは対称性から自明であるが，**問 6** では水平方向の対称性がないから，水平方向の釣り合いに着目させる誘導には違和感がないと期待する。鉛直方向の釣り合いは z での圧力を $p_0 - \rho g z$ としたことに用いているが，着目した液体部分全体の鉛直方向の釣り合いを陽に示すには液面の表式が必要であり，高校（大学教養）の範囲を超える。dx の上の液体の鉛直方向の釣り合いから液面 $z = z(x)$ の方程式

$$-\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\theta = \rho g z(x), \quad \cos^2\theta = \frac{1}{1 + (\mathrm{d}x/\mathrm{d}z)^2}$$

を導いた場合には，配点とは別に加点してよいかも知れない。

$$h = \boxed{\sqrt{\frac{2\gamma(1 - \sin\theta)}{\rho g}}}$$

解答合計　　点

物理チャレンジ 2013

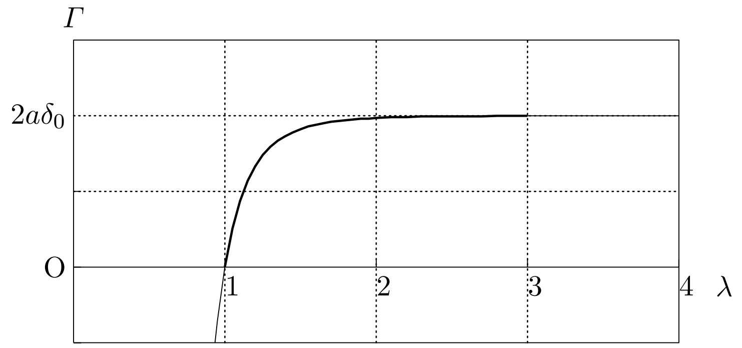
第 1 問 B　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号**　　　　氏名

問 7　7 点

エネルギーの増加は $E = aS_0\delta_0\left(2\lambda^2 + \dfrac{1}{\lambda^4} - 3\right)$，面積は $S_0\lambda^2$ であるから，

$$\Gamma = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}(S_0\lambda^2)} = a\delta_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\lambda^2)}\left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3\right) = 2a\delta_0\left(1 - \frac{1}{\lambda^6}\right).$$

$\lambda = 1$ のときには 0 で，λ とともに急激に増加して一定値に近づく。



$\Gamma = \boxed{2a\delta_0\left(1 - \dfrac{1}{\lambda^6}\right)}$

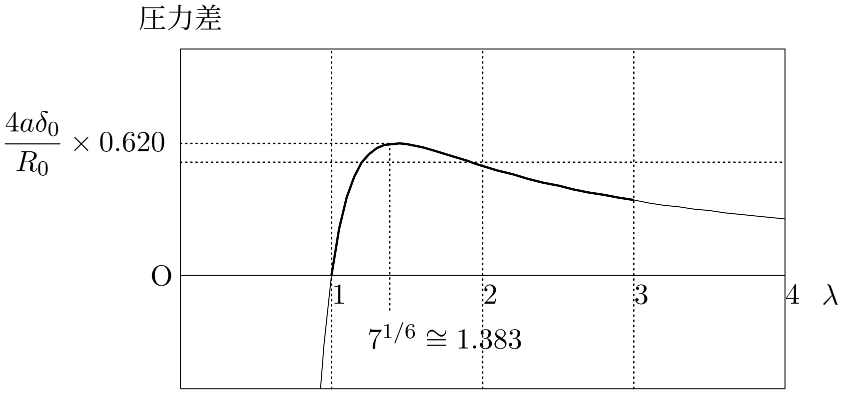
問 8　7 点

問題文にある液滴の場合との違いは γ が Γ になることであるから，内側は外側に比べて

$$\frac{2\Gamma}{R} = \frac{4a\delta_0}{\lambda R_0}\left(1 - \frac{1}{\lambda^6}\right) = \frac{4a\delta_0}{R_0}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right)$$

だけ高い。(**問 7** が解けず，Γ のままでも部分点を与える。)

シャボン玉の場合の $\dfrac{4\gamma}{R} = \dfrac{4\gamma}{\lambda R_0}$ との最も大きな違いは，$\lambda(R)$ に対して単調でなく，最大値があることである。



圧力差 $= \boxed{\dfrac{4a\delta_0}{R_0}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda^7}\right)}$

解答合計　　点

物理チャレンジ 2013

第 2 問 A　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 1　8 点

電場と直線の向きの間の角度は $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ の上と $\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ の上ではどちらも 90° だからこの 2 つの辺での起電力は 0。一方，この角度は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の上では 0° で $\overrightarrow{\mathrm{RT}}$ の上では 180° 。したがって， $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{RT}}=l$ とすると，図 2(a) の長方形に発生する起電力は $V_{\mathrm{PQRT}}=l(E_{\mathrm{PQ}}-E_{\mathrm{RT}})$。ただし，$E_{\mathrm{PQ}}$ と E_{RT} は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RT}}$ の上の電場の大きさである。(1) 式によると，変動磁場がないとき長方形 PQRT に生じる起電力は 0 にならなくてはならないから，$E_{\mathrm{PQ}}=E_{\mathrm{RT}}$。したがって，どこでも向きが等しい電場の場合，その大きさはどこも等しくなくてはならない。

問 2　8 点

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RT}}$ の 2 つの辺に生じる起電力は 0。弧 $\overset{\frown}{\mathrm{QR}}$ の半径と長さを r_1 および l_{QR}，弧 $\overset{\frown}{\mathrm{TR}}$ の半径と長さを r_2 および l_{TP} とする。電場 $\vec{E}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ との間の角度は 180°，$\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ との間の角度は 0° だから，多角形 PQRT に生じる起電力は $V_{\mathrm{PQRT}}=E(r_2)l_{\mathrm{TP}}-E(r_1)l_{\mathrm{QR}}$。変動する磁場がないときは (1) 式によりこれが 0 だから，$E(r_1):E(r_2)=l_{\mathrm{TP}}:l_{\mathrm{QR}}=r_2:r_1$ となり，電場は中心からの距離に反比例する。

問 3　8 点

(1) 式に出てくる閉曲線 C として，半径 r の円形の電気力線を選ぶ。この円の面積が πr^2 だから，それを貫く磁束は $\Phi(t)=\pi r^2 B(t)$。したがって (1) 式の右辺は，

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-\pi r^2\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}$$

電気力線の円の周長は $2\pi r$ で電場は円の周に平行だから，(1) 式の左辺は $V(\mathrm{C})=2\pi r E(t)$。そこで，(1) 式から

$$E(t)=-\frac{r}{2}\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}<0$$

リングを外部回路に繋ぐと，このとき正電荷は P から流れ出し，Q に戻ってくるから，P が正極で Q が負極。電圧は

$$V_{\mathrm{QP}}=-2\pi r E(t)=\pi r^2\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}$$

Q に対する P の電圧 = $\boxed{\pi r^2\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}}$

解答合計　　点

第 2 問 A　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 4　8 点

点電荷の速度を v として，円周方向の運動方程式は

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = qE(t) \qquad (4\text{-}1)$$

遠心力とローレンツ力の釣り合いの条件は

$$\frac{mv^2}{R} = -qvB(t) \qquad (4\text{-}2)$$

(4-2) を v について解いて (4-1) に代入すると

$$E(t) = -R\frac{\Delta B(t)}{\Delta t} \qquad (4\text{-}3)$$

$E(t)$ と $B(t)$ の関係 $\boxed{E(t) = -r\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}}$

問 5　8 点

(1) 式より $r = R$ に対し

$$2\pi R\, E(R,t) = -F_\Phi(R)\frac{\Delta G(t)}{\Delta t}$$

(4-3) は今の書き方では,

$$E(R,t) = -R\frac{\Delta B(R,t)}{\Delta t} = -R\,F_B(R)\,\frac{\Delta G(t)}{\Delta t}$$

この 2 つから $E(R,t)$ を消去すると，問題の関係式になる。

解答合計　　　点

第 2 問 A　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ______

問 6　7 点

外側のソレノイドの単位長さあたりの巻き数を n，それに流す電流を $I(t)$ とする。円軌道の場所に磁場ができるためには $a > R$ が必要。R の場所より内側で磁束密度が一定であってはいけないから，$b < R$ が必要。一方，題意により，$a > r > b$ で $B(r,t) = \mu_0 nI(t)$，$b > r$ では $B(r,t) = 3\mu_0 nI(t)$。特に

$$B(R,t) = \mu_0 nI(t)$$

$B(r,\, t)$ の式から

$$\Phi(R,t) = \pi(R^2 - b^2)\,\mu_0 nI(t) + 3\pi b^2 \mu_0 nI(t)$$

この 2 つを前問の (3) 式に代入して整理すると

$$2\pi R^2 \mu_0 nI = \pi R^2 \mu_0 nI + 2\pi b^2 \mu_0 nI$$

これを解くと

$$b = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

a に対する条件 $\boxed{a > R}$，　b に対する条件 $\boxed{b = \dfrac{R}{\sqrt{2}}}$

問 7　8 点

問 3 の (2) 式で $E \to H$，$B \to D$ と置き換え，さらに，右辺の負符号を除くと

$$H(t) = \frac{r}{2}\frac{\Delta D(t)}{\Delta t}$$

$H(t) = \dfrac{B(t)}{\mu_0}$，$D(t) = \varepsilon_0 E(t) = \dfrac{Q(t)}{\pi a^2}$ だから，

$$B(t) = \mu_0 \frac{r}{2\pi a^2} \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t}$$

この式の右辺には，問 3 の電場の式にあった負符号がないから，問 3 の N 極と S 極を正極および負極と置き換えて考えると，負極の方から見て反時計回り。

磁束線の向き $\boxed{\text{反時計回り}}$，　$B(t) = \boxed{\mu_0 \dfrac{r}{2\pi a^2} \dfrac{\Delta Q(t)}{\Delta t}}$

解答合計
点

第 2 問 B　解答用紙　1/3　**第 2 チャレンジ番号** |　|　|　|　氏名 ＿＿＿＿＿＿

問 1　10 点

a) 加速度の動径方向成分を a_r とすると粒子の運動方程式は電子にクーロン場による力 $(-k_0\,\frac{e^3}{r})$ が作用しているから

$$\text{動径方向：} ma_r = -\frac{mv^2}{r} = -k_0\,\frac{e^2}{r^2}$$

が成り立つ。

b) 動径方向の運動方程式から $mv^2 = k_0\,\dfrac{e^2}{r}$ 従って、この系の力学的エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k_0\,\frac{e^2}{r} = k_0\,\frac{e^2}{2r} - k_0\,\frac{e^2}{r} = -k_0\,\frac{e^2}{2r} = \frac{V}{2}$$

a) 運動方程式 $\boxed{\dfrac{mv^2}{r} = k_0\,\dfrac{e^2}{r^2}}$,　b) E と V の比 $\dfrac{E}{V} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

問 2　10 点

a) 量子条件より $mv = \dfrac{nh}{2\pi r}$、従って $v = \dfrac{nh}{2\pi mr}$ 、これを問 1a) より得られた $r = \dfrac{k_0 e^2}{mv^2}$ に代入すると

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 k_0 me^2}\,n^2 = n^2 a_0 \qquad (a_0\text{：ボーア半径})$$

水素原子の力学的エネルギーすなわちエネルギーは量子化され、そのエネルギー準位は

$$E_n = -\frac{k_0 e^2}{2r_n} = -\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\,\frac{1}{n^2} = -\frac{R}{n^2} \qquad (R\text{：リュードベリ定数})$$

上記より $a_0 = \dfrac{h^2}{4\pi^2 k_0 me^2}$ および $R = \dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}$

b) ボーア半径

$$a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 k_0 me^2} = \frac{(6.6261\times 10^{-34})^2}{4\pi^2 \times 8.9876\times 10^9 \times 9.1094\times 10^{-31} \times (1.6022\times 10^{-19})^2}$$
$$= 5.2916\times 10^{-11}\ [\mathrm{m}] = 5.292\times 10^{-11}\ [\mathrm{m}]$$

a) $a_0 = \boxed{\dfrac{h^2}{4\pi^2 k_0 me^2}}$,　$R = \boxed{\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}}$

b) $a_0 = \boxed{5.292\times 10^{-11}\ \mathrm{m}}$,

解答合計　　点

第 2 問 B　解答用紙　2/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ____________

問 3　10 点

$n=1 \to n'=2$ 遷移に対しては

励起エネルギー

$$\Delta E_{12} = E_2 - E_1 = -\frac{R}{4} - (-R) = \frac{3R}{4} = 1.635 \times 10^{-18} [\mathrm{J}]$$

周波数

$$\nu_{12} = \frac{3R}{4h} = \frac{3 \times 2.1799 \times 10^{-18}}{4 \times 6.6261 \times 10^{-34}} = 2.4674 \times 10^{15}\ [\mathrm{Hz}] = 2.467 \times 10^{15} [\mathrm{Hz}]$$

波長

$$\lambda_{12} = \frac{c}{\nu} = \frac{2.9979 \times 10^{8}}{2.4675 \times 10^{15}} = 1.2149 \times 10^{-7}\ [\mathrm{m}] = 1.215 \times 10^{-7} [\mathrm{m}] (= 121.5[\mathrm{nm}])$$

$\Delta E_{12} =$ $\boxed{1.635 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}}$, $\nu_{12} =$ $\boxed{2.467 \times 10^{15}\ \mathrm{Hz}}$, $\lambda_{12} =$ $\boxed{1.215 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}}$

問 4　10 点

Cnα だから $n' = n+1$、これを $\Delta E_{nn'} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$ に代入して、与えられた近似式をもちいれば

$$\Delta E_{nn'} \sim \frac{2R}{(n+\frac{1}{2})^3}\left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \quad \text{すなわち} \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)^3 \sim \frac{2R}{\Delta E_{nn'}}\left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

よって $n + \frac{1}{2} \sim \left(\frac{2R}{\Delta E_{nn'}}\right)^{1/3}\left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$, 従って誤差 $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ の範囲内で次式を得る。

$$n \sim \left(\frac{2R}{\Delta E_{nn'}}\right)^{1/3} - \frac{1}{2} = \left(\frac{2R}{h\nu_{nn'}}\right)^{1/3} - \frac{1}{2}$$

$h = 6.6261 \times 10^{-34}$ J·s, $R = 2.1799 \times 10^{-18}$ J を代入して

$$n \sim \left(\frac{6.5797 \times 10^{9}}{\nu\ [\mathrm{MHz}]}\right)^{1/3} - \frac{1}{2} \qquad (*)$$

ν [MHz]	$(*)$ 式	主量子数
16.74	732.03	732
29.93	603.04	603

16.74 MHz に対する主量子数 $\boxed{732}$,　29.93 MHz に対する主量子数 $\boxed{603}$

解答合計　　点

第 2 問 B　解答用紙　3/3　**第 2 チャレンジ番号** | | | |　氏名 ________

問 5　10 点

a) 入射電子の速度を v、再結合後の原子の速度を V とする。運動量保存：$mv = (m+M)V$
従って

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 = \frac{m}{m+M}\cdot\frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{m+M}\,E_\mathrm{e}$$

b) エネルギー保存を考慮すると $E_\mathrm{e} = \Delta E_\mathrm{exc} + E_n + E_\mathrm{k}$ 、さらに a) の結果を考慮すると

$$E_\mathrm{e}(n) = \left(1+\frac{m}{M}\right)(\Delta E_\mathrm{exc} + E_n)$$

a) E_k と E_e の関係　$E_\mathrm{k} = \dfrac{m}{m+M}\,E_\mathrm{e}$

b)　$E_\mathrm{e} =$ $\left(1+\dfrac{m}{M}\right)(\Delta E_\mathrm{exc} + E_n)$

問 6　5 点

a) $N_\mathrm{e} = \delta_\mathrm{c} A_\mathrm{c} N_\mathrm{H}$ なる関係がある。よって

$$N_\mathrm{H} = \frac{N_\mathrm{e}}{\delta_\mathrm{c} A_\mathrm{c}} = \frac{0.02}{0.6\times 0.00037} = 90.1\ [\mathrm{cm}^{-3}] = 90\ [\mathrm{cm}^{-3}]$$

b) $T_\mathrm{H} = 75\,\mathrm{K}$ とすれば十分希薄な状態であるから良い近似で理想気体とみなせる。従って状態方程式は $P = NkT$ と書ける。ここで N は単位体積当たりの粒子数である。$N \sim N_\mathrm{H}$ であるから、数値を代入すると $N_\mathrm{H} = 90\,[\mathrm{cm}^{-3}] = 90\times 10^6\,[\mathrm{m}^{-3}]$ を使って

$$P \sim 90\times 10^6 \times 1.38\times 10^{-23}\times 75 = 9.32\times 10^{-14}\ [\mathrm{N/m^2}] = 9.3\times 10^{-14}\ [\mathrm{Pa}]$$

a) 水素原子の数密度　$90\ \mathrm{cm}^{-3}$　,　b) 星間媒質の圧力　$9.3\times 10^{-14}\ \mathrm{Pa}$

解答合計　点

第 3 問　解答用紙　1/4　**第 2 チャレンジ番号** ☐☐☐　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問 1　8 点

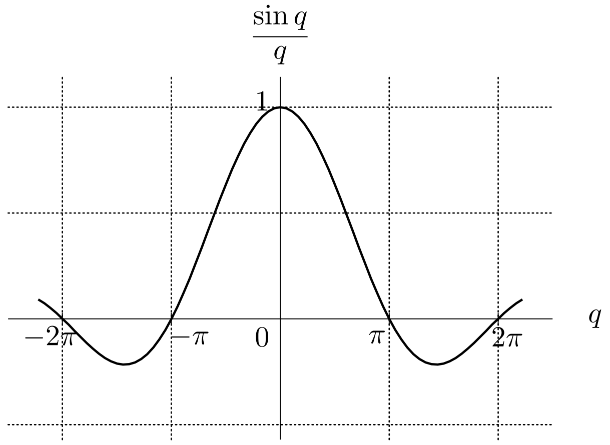
位相差は距離 r, 波数 $\dfrac{\omega}{c}$ に対し、$\dfrac{r\omega}{c}$ となる。

点 $(x = 0,\, y)$ と点 $(x = L,\, Y)$ の距離は $r = \sqrt{L^2 + (Y-y)^2}$ であり、位相差は

$$\Phi = \frac{\omega}{c}\sqrt{L^2 + (Y-y)^2} \sim \frac{\omega}{c}\sqrt{L^2+Y^2}\left(1 - \frac{Yy}{L^2+Y^2}\right)$$

問 2　8 点

a)



b) 最初の零点は、$\dfrac{\omega YD}{2cR} = \pi$、すなわち、$\dfrac{Y}{R} = \dfrac{\lambda}{D}$ である。$R = \sqrt{L^2+Y^2}$ を代入して $\dfrac{Y}{L}$ を求めると $\dfrac{Y}{L} = \dfrac{\lambda}{D}\dfrac{1}{\sqrt{1-(\lambda/D)^2}}$

b) 最初に振幅が 0 となる $\dfrac{Y}{L} =$ $\boxed{\dfrac{\lambda}{D}\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{\lambda}{D})^2}},\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{D^2-\lambda^2}}\ \text{など}}$

問 3　8 点

屈折の法則より $\sin\theta = n\sin\theta'$

$\sin\theta = \dfrac{b}{a}$ より $\sin\theta' = \dfrac{b}{na}$

$\sin\theta$ と $\sin\theta'$ の関係 $\boxed{\sin\theta = n\sin\theta'}$

$\sin\theta = \boxed{\dfrac{b}{a}}$,　$\sin\theta' = \boxed{\dfrac{b}{na}}$

解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　2/4　**第 2 チャレンジ番号**　|　|　|　氏名 ________________

問 4　8 点

$\angle AOB = \angle COB = \pi - 2\theta'$、よって $\angle AOC = 2\pi - 2(\pi - 2\theta') = 4\theta'$

従って、入射光と OC のなす角は $4\theta' - \theta$。すなわち、水滴から出てきた光線と入射光線がなす角度は、$\alpha = 4\theta' - 2\theta$ 。

$\alpha =$ $\boxed{4\theta' - 2\theta}$

問 5　8 点

$\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}b} = 0$ になるような b を求める。

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}b} = 4\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}b} - 2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}b} = \frac{4}{\cos\theta'}\frac{\mathrm{d}(\sin\theta')}{\mathrm{d}b} - \frac{2}{\cos\theta}\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}n} = \frac{4}{an\sqrt{1-\dfrac{b^2}{n^2a^2}}} - \frac{2}{a\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}} = 0$$

従って $n^2 - \dfrac{b^2}{a^2} = 4\left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right)$ すなわち $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{4-n^2}{3}}$

問 6　8 点

問 5 より $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{4-n^2}{3}} = 0.861$

角度 θ と θ' は

$\sin\theta = \dfrac{b}{a} = 0.861$, すなわち $\theta = \mathrm{Sin}^{-1}(0.861) = 1.036\,\mathrm{rad} = 59.4°$,

$\sin\theta' = \dfrac{1}{n}\dfrac{b}{a} = 0.646$、すなわち $\theta' = \mathrm{Sin}^{-1}(0.646) = 0.702\,\mathrm{rad} = 40.2°$

問 4 より $\alpha_0 = 4\mathrm{Sin}^{-1}(0.646) - 2\mathrm{Sin}^{-1}(0.861) = 0.735\,\mathrm{rad} = 42.1°$

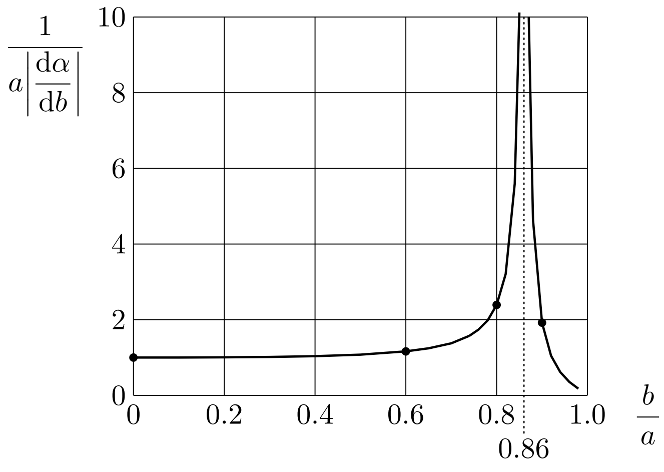
$\dfrac{b}{a} =$ $\boxed{0.861}$,　$\alpha_0 =$ $\boxed{42°}$

解答合計　　点

問 7　8 点

$\dfrac{b}{a}$	$\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$	$n\sqrt{1-\dfrac{b^2}{n^2a^2}}$	$\dfrac{4}{n\sqrt{1-\dfrac{b^2}{n^2a^2}}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}$	$\left(a\left\lvert\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}b}\right\rvert\right)^{-1}$
0	1	1.333	1.0008	0.999
0.6	0.8	1.1903	0.8604	1.162
0.8	0.6	1.0662	0.4151	2.392
0.86	0.5103	1.0185	0.0081	122.9
0.9	0.4359	0.9833	−0.5204	1.922

$\dfrac{b}{a}$	$\left(a\left\lvert\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}b}\right\rvert\right)^{-1}$
0	1.00
0.6	1.16
0.8	2.39
0.86	123
0.9	1.92



解答合計　　点

第 3 問　解答用紙　4/4　**第 2 チャレンジ番号** 　　　氏名 ________________

問 8　　8 点

$\alpha_0 = 4\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{b}{na} - 2\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{b}{a}$　および　$\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{4-n^2}{3}}$ である。

$n_{\mathrm{red}} = 1.333 - 0.018 \times \dfrac{111}{589} = 1.330$ ，$\dfrac{b}{a} = 0.8624$ を代入して $\alpha_0(\text{赤}) = 42.52°$

$n_{\mathrm{vio}} = 1.333 + 0.018 \times \dfrac{189}{589} = 1.339$ ，$\dfrac{b}{a} = 0.8577$ を代入して $\alpha_0(\text{紫}) = 41.21°$

したがって $\alpha_0(\text{赤}) - \alpha_0(\text{紫}) = 1.31°$

あるいは

$\dfrac{\mathrm{d}\alpha_0}{\mathrm{d}n} = -\dfrac{2\sqrt{4-n^2}}{n\sqrt{n^2-1}}$ と計算される。$n = 1.333$ を代入して $\dfrac{\mathrm{d}\alpha_0}{\mathrm{d}n} = -2.538$

$\Delta n = n_{\mathrm{vio}} - n_{\mathrm{red}} = 0.00916$ であるから $\Delta\alpha = \Delta n\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}n} = -0.00916 \times 2.538 = -0.0232\,\mathrm{rad} = -1.33°$

したがって $\alpha_0(\text{赤}) - \alpha_0(\text{紫}) = 1.33°$

$\alpha_0(\text{赤}) - \alpha_0(\text{紫}) =$ 1.31° ∼ 1.33°

問 9　　8 点

$|\Delta\alpha| = 1.32° = 0.023\,\mathrm{rad}$ として　$\dfrac{\lambda}{0.2a} > 0.023$ より、おおよそ $220\lambda > a$.

すなわち、水滴の半径がオレンジ色の波長の 220 倍 (約 0.13mm) 以下になると色が分解されなくなる。

水滴の半径はオレンジ色の波長の 220 倍以下

問 10　　8 点

円弧上の光の輪は見えるが色はつかない。すなわち、白い虹になる。

解答合計　　　点