

- ▶ 理論試験は5時間です。3題の大問があり、全部で30点満点です。大問の配点が異なるので、注意して下さい。また、すべての大問で用いる**データシート**があるので、注意して下さい。
- ▶ 試験が始まる合図（笛）の前に、問題が入っている茶色の封筒を開けてはいけません。
- ▶ 各大問に、専用の解答用紙（Answer Sheet）（ヘッダーの番号と色を確認すること）があります。解答は、対応する解答用紙の指示された欄に記入して下さい。
- ▶ 詳しい計算などには、正式な IPhO 答案用紙と IPhO グラフ用紙を用い下さい。ヘッダーの**すべての記入欄を埋め、用紙の表のみに記入して下さい**（裏は採点されません）。文字の使用は最小限にして、主に方程式や数、記号や図を用いて、解答を作成するようにして下さい。用紙の採点されたくない部分には、線を引いて消して下さい。
- ▶ 許可なく席を離れてはいけません。補助が必要な場合には（電卓の故障や用紙の補充、トイレなど）、手を挙げて、監督者が来るまで、そのまま待っていて下さい。
- ▶ 試験の終わりの合図（笛）があったら、ただちに書くのをやめ下さい。終わりの合図の前に試験を終了する場合は、手を挙げて下さい。
- ▶ すべての紙を、**表を上にして**、次の順に並べて、茶色の封筒に入れ下さい。
 1. 大問1 (T1) の解答用紙に続いて、詳しい計算などを記入した T1 の答案用紙
 2. 大問2 (T2) の解答用紙に続いて、詳しい計算などを記入した T2 の答案用紙
 3. 大問3 (T3) の解答用紙に続いて、詳しい計算などを記入した T3 の答案用紙
- ▶ どの用紙も部屋の外に持ち出してはいけません。

導入

流星は彗星あるいは小惑星から飛んでくる小粒子（通常，1 m 以下）である。地面に衝突する流星は隕石とよばれる。

2009年1月17日の夜，バルト海に面した地域の多くの人々は，大気を貫いて落下する流星の輝く軌跡や火球を目にした。スウェーデンの監視カメラが記録した映像を図 1.1(a)に示す。これらの映像と目撃者の証言から，落下地点の範囲が狭められ，6週間後，質量 0.025 kg の隕石が南デンマークの町マリボー付近で見つかった。現在，マリボーと名づけられている隕石の分析と大気中の軌道から，興味深い結果が示された。大気に突入したときの流星の速度は非常に速く，その年代は 4.567×10^9 年であることから，その流星は，太陽系が形成された後すぐに形成されたことがわかった。マリボー隕石は，エンケ彗星の一部であるらしい。

マリボーの速さ

図 1.1(c) のように，火球は落下地点に向かって，北から 285° の方角の西方向に移動していた。隕石の落下地点は，監視カメラから 195 km 離れた地点で，北から 230° の方角であった。

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | このことと，図 1.1 のデータ，映像の 155 番目のコマから 161 番目のコマまでの間のマリボーの平均の速さを計算せよ。地球の曲率と流星に対する重力の影響は無視してよい。 | 1.3 |
|-----|--|-----|

大気中の通過と融解?

上層の大気中を運動する流星に対する空気摩擦は，流星の形状と速さ，さらに，大気の種類と密度に複雑に依存する。上層大気においてはたらく摩擦力 F は，適切な近似で $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$ と表すことができる。ここで， k は定数， ρ_{atm} は大気の種類， A は速度の向きに垂直な流星の断面積， v はその速さである。

流星の運動を解析するために，次のような簡単な仮定をする：この物体は質量 $m_M = 30 \text{ kg}$ ，半径 $R_M = 0.13 \text{ m}$ の球形で，温度 $T_0 = 200 \text{ K}$ ，速さ $v_M = 2.91 \times 10^4 \text{ m/s}$ で大気に突入する。大気の種類は一定値 $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ （地表から 40 km 上空での値）として，摩擦係数は $k = 0.60$ であるとする。

| | | |
|------|---|-----|
| 1.2a | 流星が大気に突入した後，その速さが v_M から $0.90 v_M$ まで 10% 減少するのにかかる時間を求めよ。流星に対する重力の影響は無視できる。流星は質量と形状に変化は生じないものとする。 | 0.7 |
| 1.2b | 大気に突入する流星の運動エネルギー E_{kin} は，完全に融解するのに必要なエネルギー E_{melt} の何倍か計算せよ（必要な値はデータシートを見よ）。 | 0.3 |

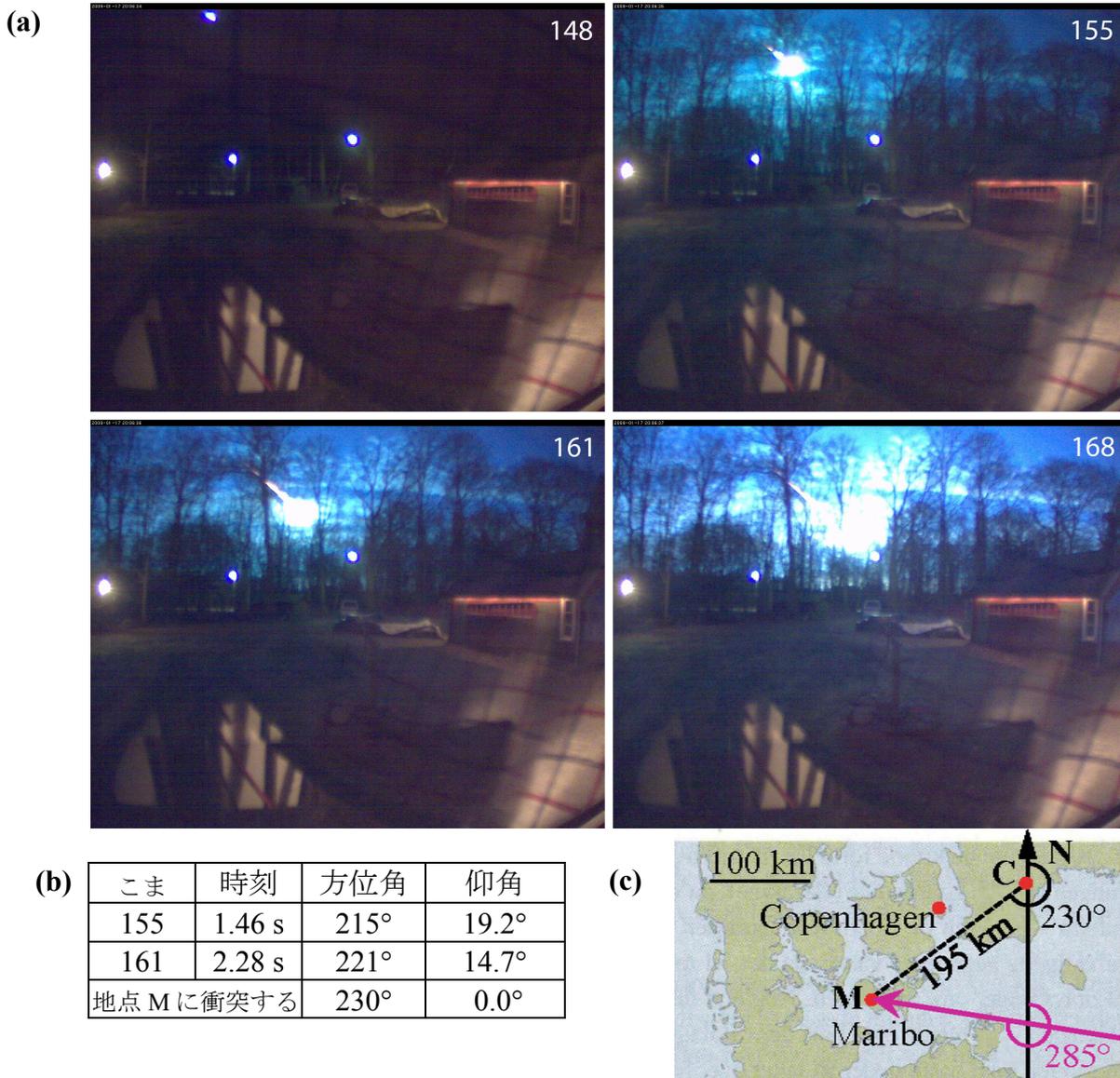


図 1.1 方位角は水平面上で北から時計回りの角度であり，仰角は水平面から上向きに測った角度である。(a) スウェーデンにある監視カメラの捕えた映像の一連のこまである。マリボーの運動が，大気を通して落下する火球として示されている。(b) カメラ (C) から見た2つの映像のこまの時刻と方位角，仰角が示されている。(c) 監視カメラ (C) に示されたマリボーの経路（赤紫色の矢印）の北 (N) からの方位角とデンマークの落下地点 (M) の略図。

大気中を落下中のマリボーの加熱

岩石状流星マリボーが超音速で大気に突入するとき，周囲の空気が熱せられて流星が火球のようになる。それにも拘わらず，マリボーの最外層だけが熱せられる。マリボーを，密度 ρ_{sm} ，比熱 c_{sm} ，熱伝導率 k_{sm} （値はデータシートに与えられている）の様な球と仮定する。さらに，大気に突入するときのマリボーの温度は $T_0 = 200\text{ K}$ で，マリボーが大気中を落下する間，空気抵抗を受けて表面温度は一定値 $T_s = 1000\text{ K}$ となり，次第に内部が熱

せられる。大気中を時間 t だけ落下した後、厚さ x のマリボーの外層は、 T_0 より十分高温に熱せられる。この厚さは次元解析により熱力学パラメータのべきの簡単な積で評価される：

$$x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta.$$

| | | |
|------|---|-----|
| 1.3a | 4つのべき指数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の値を、次元解析で定めよ。 | 0.6 |
| 1.3b | 落下時間 $t = 5$ sの後の厚さ x を求め、比 x/R_M を定めよ。 | 0.4 |

隕石の年代

放射性同位体元素の化学的性質は異なるため、与えられたある隕石の中の鉱物が結晶化していく間、いくつかの鉱物は特殊な放射性同位体元素を多く含み、他はわずかにしか含まない。この違いは、放射性鉱物からなる隕石の年代を測定するのに用いられている。

1つの例として、同位体 ^{87}Rb (原子番号 37) が、安定な同位体 ^{87}Sr (原子番号 38) に半減期 $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ 年で崩壊する現象を、安定な同位体 ^{86}Sr と比較して考えてみよう。結晶化するはじめのとき、比 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ はすべての鉱物に対して等しいが、比 $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ は異なっている。時間が経過すると、 ^{87}Rb は崩壊により減少し ^{87}Sr の量は増加する。その結果として、比 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ は初めのときとは異なる。図 1.2(a)には、鉱物が結晶化するとき、異なる鉱物における $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ を横軸にとって、比 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ の変化を示している。

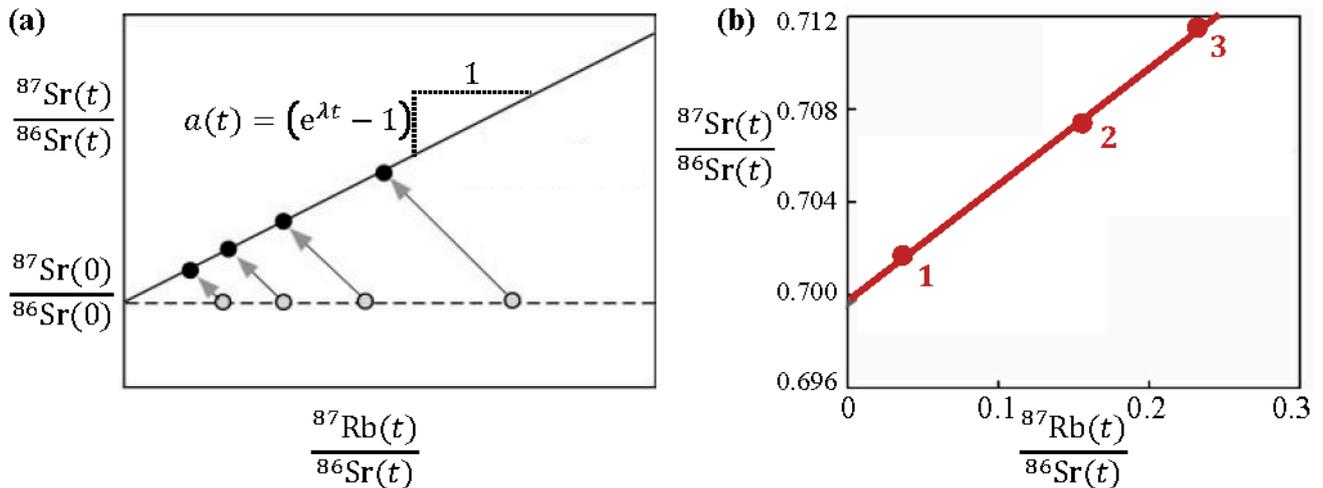


Figure 1.2 (a) 結晶化が始まる $t = 0$ のときの異なる鉱物における比 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ (白丸) と、その後のある時刻におけるその比の値 (黒丸)。(b) 隕石から得られた3つの異なる鉱物サンプルに対するその後の時刻の同位体比。

| | | |
|------|--|-----|
| 1.4a | $^{87}_{37}\text{Rb}$ から $^{87}_{38}\text{Sr}$ への崩壊の反応式を書き下せ。 | 0.3 |
| 1.4b | 同じ隕石から得られる異なる鉱物サンプルに対する比 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ と現在の比 $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ は直線を形成する。これはいわゆる同位体比の直線と呼ばれ、その傾きが $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$ と表されることを示せ。ここで、 t は鉱物が形成されてからの時間であり、 λ は半減期 $T_{1/2}$ に反比例する崩壊定数である。 | 0.7 |
| 1.4c | 図 1.2(b) の同位体比の直線を用いて、隕石の年代 τ_M を定めよ。 | 0.4 |

マリボーが起源とするエンケ彗星

太陽を回る軌道において、エンケ彗星と太陽の間の距離の最小値と最大値は、それぞれ $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10} \text{ m}$ と $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11} \text{ m}$ で与えられる。

| | | |
|-----|---|-----|
| 1.5 | エンケ彗星がその軌道を1周する時間 t_{Encke} を計算せよ。 | 0.6 |
|-----|---|-----|

地球に衝突する小惑星の影響

6500 万年前、密度 $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 、半径 $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$ の巨大な小惑星が速さ $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$ で地球に衝突した。この衝突は、地球上の多くの生命を絶滅させ、巨大なチクラブ・クレーターを形成した。同等の小惑星がいま地球に完全非弾性衝突すると仮定する。地球の慣性モーメントは、同じ質量で同じ半径の一樣な球の 0.83 倍であるという事実を用いる。質量 M 、半径 R の一樣な球の慣性モーメントは $\frac{2}{5} MR^2$ である。地球の軌道の変化は無視せよ。

| | | |
|------|--|-----|
| 1.6a | 小惑星が北極に衝突したとする。衝突後の地球の回転軸の変化量 $\Delta\theta$ の最大値を求めよ。 | 0.7 |
| 1.6b | 小惑星が赤道上の点に、地球の半径方向から衝突したとする。衝突後、地球が1回自転する時間の変化の最大値 $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ を求めよ。 | 0.7 |
| 1.6c | 小惑星が赤道上の点に、赤道面上で、赤道の接線方向から衝突したとする。衝突後、地球が1回自転する時間の変化の最大値 $\Delta\tau_{\text{tan}}$ を求めよ。 | 0.7 |

衝突する速さの最大値

太陽系に重力的に束縛された天体が速度 v_{imp} で地表面に衝突する場合を考える。初期状態では、地球の重力場の影響は無視できる。また、大気による摩擦を無視し、他の天体および地球の自転の影響は無視する。

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.7 | v_{imp} の可能な最大値 v_{imp}^{\max} を求めよ。 | 1.6 |
|-----|--|-----|

導入

この問題では、効率的な蒸気発生過程について考える。この過程は実際に働く事が実験的に確かめられている。ナノサイズの球形銀粒子を1リットルあたり僅か 10^{13} 個程度溶かした水溶液が、収束光で照射されている。光のうちの一部がナノ粒子に吸収され、粒子が熱せられることで周囲の水溶液が局所的に熱くなり、その結果、溶液の全体を温める事無く蒸気を発生させる事ができる。蒸気は上昇する泡として系から放出され、溶液の上方で集められる。今でもこの過程の全てが理解された訳ではないが、核となる過程は金属ナノ粒子のいわゆる電子集団振動による光の吸収である事が分かっている。このデバイスはプラズモニック蒸気発生機として知られている。

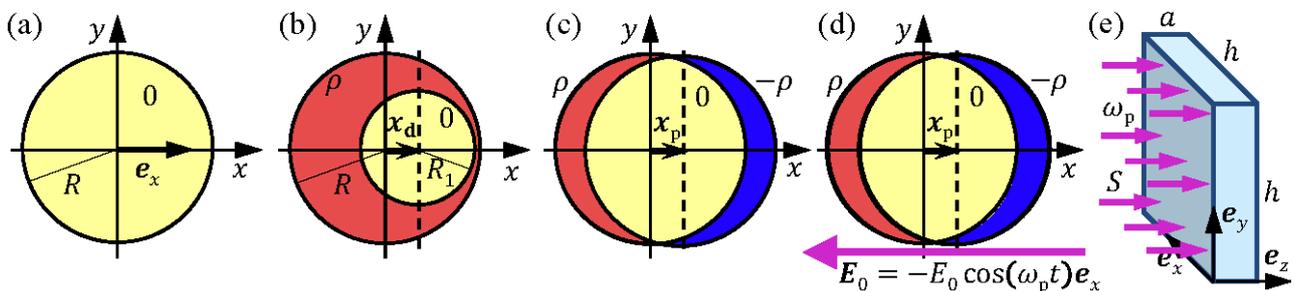


図 2.1 (a) 中心が座標原点に位置する、半径 R の球形で荷電中性なナノ粒子 (b) 一様な正電荷密度 ρ で帯電した球 (赤) と、中心が $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ にずれて位置する半径 R_1 の荷電中性な小領域(0、黄色) (c) 中心が座標原点に位置する一定の正電荷密度 ρ で帯電した銀イオンナノ粒子と、中心が \mathbf{x}_p に位置する負電荷密度 $-\rho$ (青) で帯電した電子雲 (但し、 $x_p \ll R$ が成り立つ) (d) 一様な外場 $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$ 、 \mathbf{E}_0 が時間に依存する時には電子雲は速度 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ で運動する (e) z 軸方向に伝わる角振動数 ω_p 、強度 S の単色光で照射された、ナノ粒子の水溶液を含む直方体容器($h \times h \times a$)

球形の単一銀ナノ粒子

この問題では中心が原点に位置した、半径 $R = 10.0 \text{ nm}$ の球形の銀ナノ粒子を考える (図 2.1(a)を見よ)。全ての運動、力及び外場の方向は x 軸 (単位ベクトル \mathbf{e}_x) に平行とする。ナノ粒子は銀原子に束縛されずに粒子内を動ける自由 (伝導) 電子を含んでいる。銀原子はその様な自由電子を、各々一粒子ずつ与える事で一価の陽イオンとなっている。

| | | |
|------------|---|-----|
| 2.1 | 次の量を求めよ：ナノ粒子の体積 V と質量 M 、粒子内の銀イオンの個数 N とその電荷密度 ρ 、自由電子の密度 n とその総電荷 Q 及び総質量 m_0 | 0.7 |
|------------|---|-----|

荷電球内の荷電中性な領域に存在する電場

これ以降の問題では全ての媒質の比誘電率を $\epsilon = 1$ と仮定せよ。半径 R_1 の荷電中性な小領域が、一様な電荷密度 ρ で半径 R の荷電球内に、 $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ を中心とする反対の電荷密度 $-\rho$ を重ね合わせる事で作られている (図 2.1(b) を見よ)。

| | | |
|-----|---|-----|
| 2.2 | 荷電中性な領域内の電場が一様であり、それが $\mathbf{E} = \mathbf{A} (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_d$ という形で与えられる事を示せ。係数 \mathbf{A} を求めよ。 | 1.2 |
|-----|---|-----|

変位した電子雲にかかる復元力

次に自由電子の集団運動を考える。電子の運動を、中心座標 \mathbf{x}_p をもつ一様な負の電荷密度 $-\rho$ の球の x 軸方向への運動としてモデル化する。銀イオンからなる正電荷の球の中心は原点に固定されており、そこからの負の電荷密度の球の変位が \mathbf{x}_p である (図 2.1(c) を見よ)。外力 \mathbf{F}_{ext} により電子雲の中心が新しい平衡点 \mathbf{x}_p に変位したと仮定せよ (但し、 $|\mathbf{x}_p| \ll R$ が成り立つ)。

ナノ粒子内の大部分は荷電中性な領域のままであり、粒子の両端における正味の電荷変化は微小とする。

| | | |
|-----|---|-----|
| 2.3 | \mathbf{x}_p と n を用いて次の二つの量を表せ：電子雲が銀イオンから受ける復元力 \mathbf{F} 、変位する際に電子雲になされる仕事 W_{el} | 1.0 |
|-----|---|-----|

定常な外場下の球形銀ナノ粒子

真空中におかれたナノ粒子が、定常で一様な電場 $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$ による外力 \mathbf{F}_{ext} を受けている。電子雲は外場により微小な変位 $|\mathbf{x}_p|$ を生じる ($|\mathbf{x}_p| \ll R$)。

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.4 | \mathbf{E}_0 と n を用いて電子雲の変位 \mathbf{x}_p を表せ。また、 yz 面を通過して移動する総電荷 $-\Delta Q$ を、 n 、 R 、 \mathbf{x}_p を用いて求めよ。 | 0.6 |
|-----|--|-----|

銀ナノ粒子と等価な電気容量とインダクタンス

定常な、あるいは時間に依存した外場のいずれに対しても、ナノ粒子は等価な電子回路でモデル化する事ができる。等価な電気容量は、粒子の両端に生じる分離電荷 ΔQ を、電子雲になされる仕事 W_{el} と関係づける事で求まる。電荷が分離する事で、等価なコンデンサの間に等価な電位差 V_0 が生じる。

| | | |
|------|---|-----|
| 2.5a | 等価な電気容量 C を ϵ_0 、 R を用いて表し、その値を計算せよ。 | 0.7 |
|------|---|-----|

| | | |
|------|--|-----|
| 2.5b | この電気容量に対して、等価な電位差 V_0 を E_0 と R を用いて表せ。この V_0 はコンデンサに電荷 ΔQ を蓄えるのに必要な電位差と関係付けられる。 | 0.4 |
|------|--|-----|

時間に依存した電場 E_0 に対しては、電子雲は速度 $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ で運動する（図 2.1(d)を見よ）。電子雲は運動エネルギー W_{kin} を持ち、 yz 面を流れる電流 I を生成する。電子雲の運動エネルギー W_{kin} は等価なインダクタンス L を持ち、電流 I が流れるコイルのエネルギーに等しいと考えられる。

| | | |
|------|--|-----|
| 2.6a | W_{kin} と I を、速さ v を用いて表せ。 | 0.7 |
| 2.6b | 等価なインダクタンス L を粒子の半径 R 、電気素量 e 、電子質量 m_e 、電子密度 n を用いて表し、その値を計算せよ。 | 0.5 |

銀ナノ粒子のプラズモン共鳴

上で行った解析から、電子雲を平衡点からずらす事で生じる運動は LC 回路の共鳴点での振動でモデル化する事ができる。この電子雲の動的モードはプラズモン共鳴と呼ばれ、その共鳴角振動数はいわゆる角プラズモン振動数 ω_p である。

| | | |
|------|--|-----|
| 2.7a | 電子雲の角プラズモン振動数 ω_p を電気素量 e 、電子質量 m_e 、電子密度 n 、誘電率 ϵ_0 を用いて表せ。 | 0.5 |
| 2.7b | ω_p を計算し、rad/s で表せ。それと同じ振動数 $\omega = \omega_p$ の光の波長 λ_p を、nm で表せ。 | 0.4 |

プラズモン振動数の光で照射された銀ナノ粒子

これ以降の問題では、ナノ粒子は角振動数が ω_p で強度が $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ の単色光で照射されているとする。波長は十分長く ($\lambda_p \gg R$)、ナノ粒子は単振動する一様な外場 $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$ の下で運動するものとして考えられる。外場 \mathbf{E}_0 により駆動されると、電子雲の中心は同じ振動数で速度 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ 、一定の振れ幅 x_0 で運動する。この電子の振動が光の吸収を引き起こす。粒子により吸収されたエネルギーは、粒子内のジュール熱に変換されるか、粒子により散乱光として再放射される。

ジュール熱はランダムな非弾性散乱により引き起こされる。非弾性散乱により銀イオンと衝突する事で、自由電子は全ての集団の運動エネルギーを失い、そのエネルギーは銀イオンの個々の振動運動に変換される。衝突の間の平均時間は $\tau \gg 1/\omega_p$ で、銀ナノ粒子に対しては $\tau = 5.24 \times 10^{-15} \text{ s}$ である。

| | | |
|------|---|-----|
| 2.8a | ナノ粒子における単位時間に生じるジュール熱の時間平均 P_{heat} と電流の二乗平均 $\langle I^2 \rangle$ を、電子雲の二乗速度の時間平均 $\langle v^2 \rangle$ を含めた形で表せ。 | 1.0 |
| 2.8b | 電子雲の電流 I とジュール熱 P_{heat} で決まる等価な抵抗回路のモデルにおける、等価な電気抵抗 R_{heat} を求めよ。 R_{heat} の値を数値で求めよ。 | 1.0 |

入射ビームは振動する電子雲が引き起こす散乱により、時間平均して P_{scat} の量のエネルギーを単位時間に失う（再放射）。 P_{scat} は振れ幅 x_0 、電荷 Q 、角振動数 ω_p と光の性質（光速 c と真空中の誘電率 ϵ_0 ）に依存する。これらの四変数により P_{scat} は次の様に与えられる：

$$P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.9 | P_{scat} を用いる事で、(R_{heat} と同様に) 等価な抵抗回路における散乱抵抗 R_{scat} を求め、その値を計算せよ。 | 1.0 |
|-----|--|-----|

上で求めた等価回路の素子を組み合わせる事で、単振動する電圧 $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ をかけたLCR-回路を用いて、ナノ粒子をモデル化する事ができる。電圧 $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ は入射光線の電場 E_0 により決定される。

| | | |
|-------|--|-----|
| 2.10a | プラズモン共鳴点 $\omega = \omega_p$ において、単位時間に失われるエネルギーを時間平均した量 P_{heat} と P_{scat} を入射光線の振れ幅 E_0 を含んだ形で表せ。 | 1.2 |
| 2.10b | E_0 、 P_{heat} 、 P_{scat} の数値を計算せよ。 | 0.3 |

光による蒸気発生

密度 $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ の銀ナノ粒子の水溶液がある。溶液はサイズが $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ の透明な直方体容器内に入っており、強度が $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ でプラズモン振動数の光により照射されている（図 2.1(e)を見よ）。水の温度は $T_{\text{wa}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ とし、定常状態ではナノ粒子の発する全てのジュール熱は温度 $T_{\text{st}} = 110 \text{ }^\circ\text{C}$ の蒸気を発生する事に使われ、水の温度は上昇しないものとする。この仮定は実験の結果とよく一致する。

プラズモニック蒸気発生機の熱力学効率 η は、単位時間のエネルギー変化の比 $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$ で定義する。 P_{st} は容器全体で、蒸気発生のために単位時間に用いられるエネルギー量で、 P_{tot} は容器内に単位時間に入射する光線のエネルギーである。

ほとんどの時間において、全てのナノ粒子は水の代わりに蒸気で囲まれており、従って真空中にあると考えてよい。

| | | |
|-------|--|-----|
| 2.11a | プラズモン振動数で強度が S の光により照射されたプラズモニック蒸気発生機が単位時間に発生する蒸気の総質量 μ_{st} を計算せよ。 | 0.6 |
| 2.11b | プラズモニック発生機の熱力学効率 η の数値を計算せよ。 | 0.2 |

:

導入

この問題では、世界で2番目に大きな氷河であるグリーンランドの氷床(図 3.1(a))について考えてみよう。理想的なモデルとして、グリーンランドを東西の幅 $2L$ 、南北の長さ $5L$ の長方形の島とし、地表は海水面と同じ高さにあるとして扱い、完全に非圧縮性の氷(一定の密度 ρ_{ice})で覆われている(図 3.1 (b))。氷河の高さ $H(x)$ は y 座標によらず、海岸 $x = \pm L$ では値ゼロで、 y 軸に近づくに従って増加していき中央の南北の軸(y 軸、分水嶺)に沿って最大値 H_m をとる(図 3.1(c))。

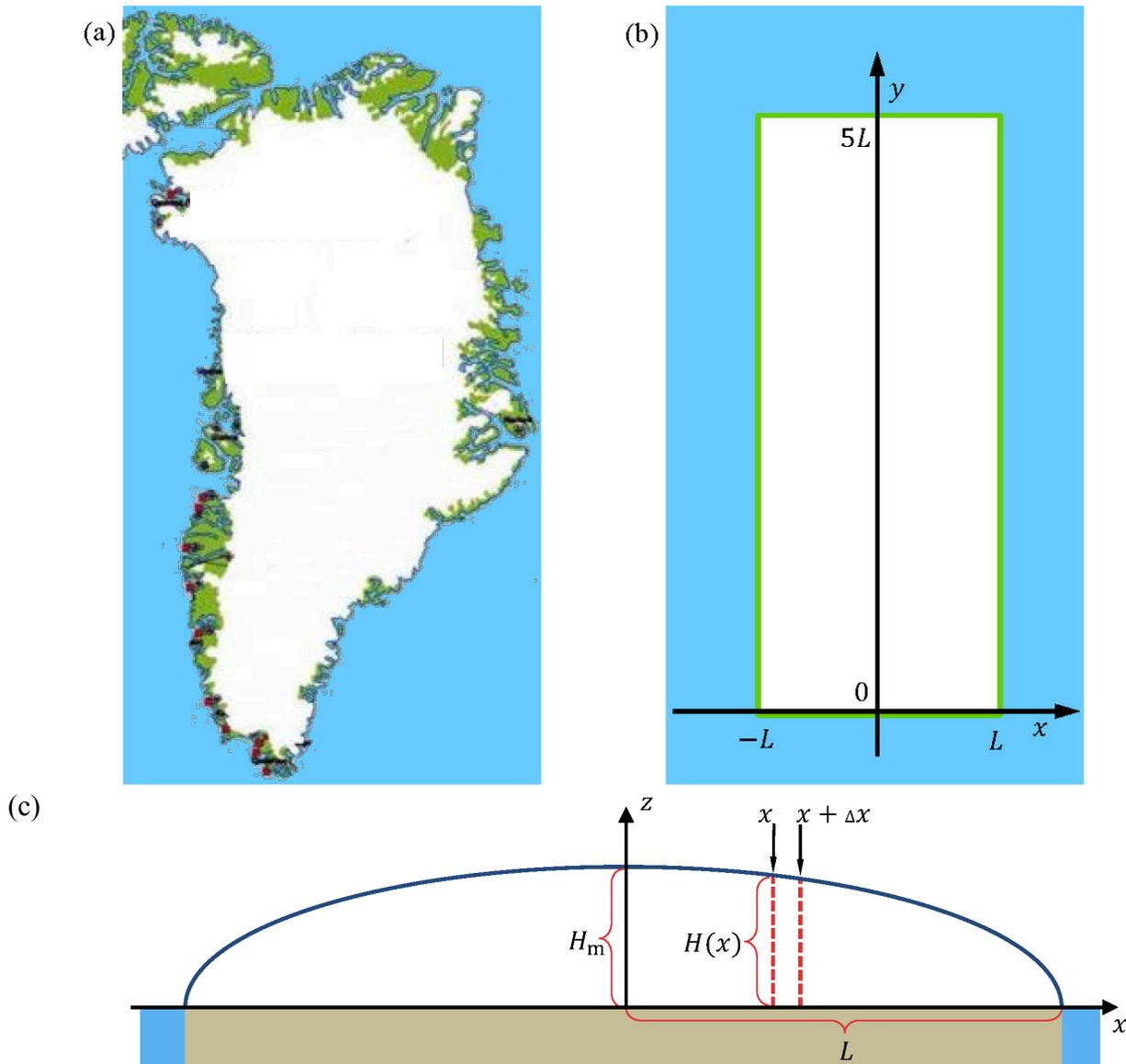


図 3.1 (a) グリーンランドの地図。氷床の広がり(白)、氷のない海岸部分(緑)、および周辺の海(青)を表している。(b) グリーンランドの氷を xy 平面上の辺の長さ $2L$ と $5L$ の長方形のものとして近似したモデル。氷床の最高点 H_m に沿う線(分水嶺)は y 軸に沿って走っている。(c) 氷床の断面図(xz 平面)で、 $H(x)$ の高さ分布(青線)を表す。 $H(x)$ は $0 < y < 5L$ の範囲で y に依存しないが、 $y = 0$ と $y = 5L$ のところで急激にゼロに落ちる。図を見やすいように、垂直方向の高さは水平方向に比べ引き伸ばしている。氷の密度 ρ_{ice} は一定である。

有用な二つの公式

この問題で、次の積分結果は自由に用いて良い：

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

また、 $|ax| \ll 1$ の時に成立する近似公式 $(1+x)^a \approx 1+ax$ も用いて良い。

氷床の高さ分布

氷床は非圧縮性流体の静力学系と近似し、一定の高さ分布 $H(x)$ を持つとせよ。

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.1 | 氷床内の圧力 $p(x, z)$ を地面からの高さ z と分水嶺からの距離 x の関数として表せ。ただし、大気圧は無視せよ。 | 0.3 |
|-----|--|-----|

氷床の中の垂直な板状の領域は圧力平衡にあると考える。 x と $x + \Delta x$ の間にある板状の領域は、水平方向に小さな面積 $\Delta x \Delta y$ を持つ(図 3.1(c)中の赤い点線)。ここで Δy の大きさは問題としない。

板状の領域が二つの垂直な面から受ける正味の水平方向の力 ΔF は、板状の領域の中央側の高さ z と海岸線側の高さ $z + \Delta z$ が異なることで生じている。この力は、板状の領域が地面と接している面積 $\Delta x \Delta y$ から受ける摩擦力 $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ と釣り合っている。ここで、 $S_b = 100 \text{ kPa}$ は地面からのせん断応力である。

| | | |
|------|--|-----|
| 3.2a | ある与えられた x の値に対して、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限で $S_b = kH \, dH/dx$ が成立することを示し、 k を求めよ。 | 0.9 |
| 3.2b | 高さ分布 $H(x)$ を $\rho_{\text{ice}}, g, L, S_b$ と分水嶺からの距離 x を用いて表せ。この結果より、氷床の高さの最高値 H_m は半幅 L に対して $H_m \propto L^{1/2}$ という関係を満たすことがわかる。 | 0.8 |
| 3.2c | 氷床の全体積 V_{ice} を長方形の島の面積 A を用いて $V_{\text{ice}} \propto A^\gamma$ と表した時の指数 γ を決定せよ。 | 0.5 |

動く氷床

長い時間でみると、氷は粘性のある非圧縮性流体とみなすことができ、重力の影響で中心部から海岸線に向けて流れていく。積雪による氷の蓄積が海岸線での氷の融解と釣り合っている定常状態では、氷の高さの分布 $H(x)$ は一定に保たれる。図 3.1(b)と(c)の氷床の形状分布に加えて次の仮定をモデルに加える：

- 1) 分水嶺(y 軸)から海岸線に向けて xz 面で氷の流れがある。
- 2) 中心部での氷の蓄積率 c (m/year) は一定である。
- 3) 氷は東及び西海岸から溶けることで氷河より消える。
- 4) 氷の流速の水平(x -)成分 $v_x(x) = dx/dt$ は z に依らない。
- 5) 氷の流速の垂直(z -)成分 $v_z(z) = dz/dt$ は x に依らない。

氷河の中心に十分近い領域 $|x| \ll L$ のみを考え、氷床の高さ変化が充分小さく完全に無視できるとして考えよ。つまり、 $H(x) \approx H_m$ と近似して良い。

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.3 | 質量保存を用い、水平方向の氷の流速 $v_x(x)$ を c, x , および H_m を用いて表せ。 | 0.6 |
|-----|---|-----|

非圧縮性の仮定、つまり氷の密度 ρ_{ice} が一定という条件より、質量の保存を用いることで氷の流速が次の条件をみたすことがわかる：

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

| | | |
|-----|-------------------------------------|-----|
| 3.4 | 氷の流速の垂直成分 $v_z(z)$ の z 依存性を求めなさい。 | 0.6 |
|-----|-------------------------------------|-----|

はじめ氷河の表面 $(x_i, H(x_i))$ にあった小さな氷の粒子は、時間の経過とともに、氷河の一部として位置の時間変化の軌跡(流跡線) $z(x)$ に沿って垂直な xz 平面内を流れる。

| | | |
|-----|--------------------|-----|
| 3.5 | 流跡線の式 $z(x)$ を求めよ。 | 0.9 |
|-----|--------------------|-----|

動く氷床内の年代及び気候の推定

氷の流速の速度成分 $v_x(x)$ および $v_z(z)$ に基づいて、氷床の表面からの特定の深さ $H_m - z$ にある氷の年齢 $\tau(z)$ を推定することができる。

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.6 | 分氷嶺 $x = 0$ での地面から高さ z にある氷の年齢 $\tau(z)$ を求めよ。 | 1.0 |
|-----|--|-----|

グリーンランドの氷河内からドリルで取り出された氷柱は、過去からの雪層を貫ぬいているため、過去の気候変動を調べるのに用いることができる。最もよい指標のひとつは $\delta^{18}\text{O}$ と呼ばれるもので、次のように定義される：

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{ ‰}$$

ここで、‰ は千分の一を表す記号であり千分率と呼ばれる。 $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ は、二つの安定な酸素の同位体 ^{18}O と ^{16}O の存在比である。参考値 R_{ref} は赤道面の海での同位体存在比に基づいている。

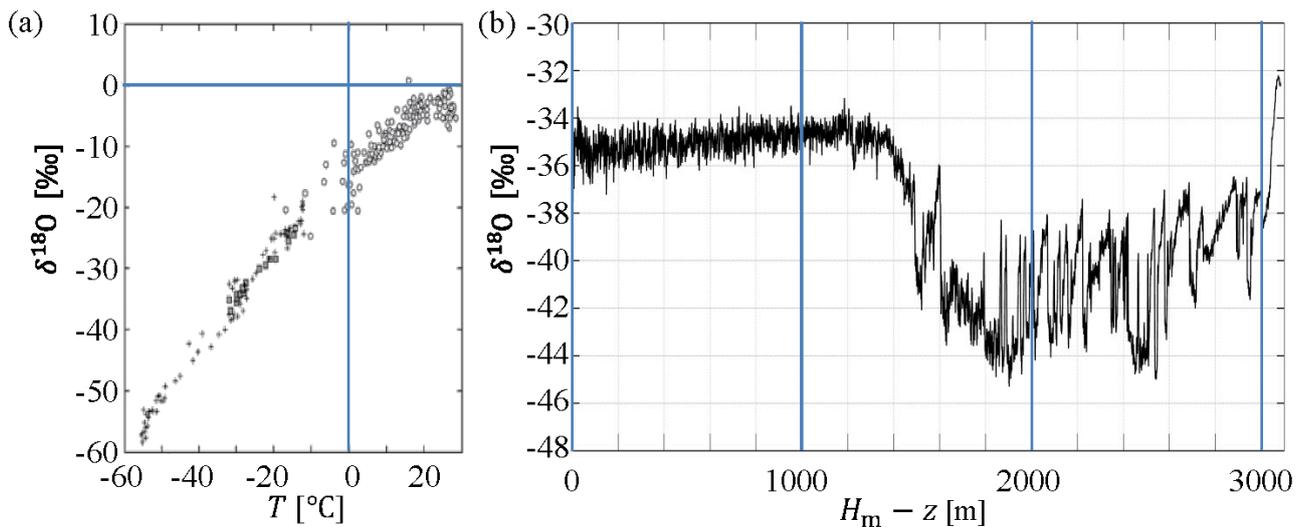


図 3.2 (a) 雪の中の $\delta^{18}\text{O}$ と年間平均表面温度 T の関係。(b) $\delta^{18}\text{O}$ と深さ $H_m - z$ の関係。グリーンランドの氷の分水嶺上の特定の場所($H_m = 3060\text{ m}$)で氷柱をドリルで採ったものから測定。グリーンランドの氷床での測定から、雪の中の $\delta^{18}\text{O}$ は気温とほぼ線形な関係にあることがわかる(図 3.2(a)). この関係が常に成り立つと仮定すると、深さ $H_m - z$ にある氷の塊から測定された $\delta^{18}\text{O}$ より年代 $\tau(z)$ のグリーンランドの気温 T を推定することができる。

3060 m の長さを持つグリーンランドの氷柱で測定された $\delta^{18}\text{O}$ は、深さ 1492 m の辺りで急激に変化しており、氷河期の終わりを示している(図 3.2(b)). 氷河期は 120,000 年前に始まり、これは深さ 3040 m に対応している。現在の間氷期は 11,700 年前に始まり、深さ 1492 m に対応している。これらの二つの時代は異なる氷の蓄積率、 c_{ia} (氷河期) および c_{ig} (間氷期)、でそれぞれ記述することができると仮定する。120,000 年の間ずっと H_m は一定であると仮定してよい。

| | | |
|------|---------------------------------------|-----|
| 3.7a | 二つの蓄積率 c_{ia} と c_{ig} を決定せよ。 | 0.8 |
| 3.7b | 図 3.2 のグラフを用いて、氷河期から間氷期にかけての温度変化を求めよ。 | 0.2 |

グリーンランドの氷床の融解による海面上昇

グリーンランドの氷床が完全に溶けると、世界の海面上昇が予想される。海面上昇の粗い推定として、世界中の海の面積が一定値 $A_0 = 3.61 \times 10^{14}\text{ m}^2$ であるとして、一様な海面上昇を考えることにする。

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.8 | 現在、グリーンランドの氷床の面積が $A_G = 1.71 \times 10^{12}\text{ m}^2$ で、地面からのせん断応力が $S_b = 100\text{ kPa}$ であるとして、グリーンランドの氷床が全て溶けたことによって生じる世界の海全体の平均の海面上昇を計算しなさい。 | 0.6 |
|-----|--|-----|

大量のグリーンランドの氷は、周りの海水を万有引力により引っ張っている。もし氷河が溶けてしまったとすると、この局所的な強い潮汐力は失われるので、グリーンランド近くの海面は低下する。これは、先程計算した海面上昇とは部分的に逆行するものである。

この海水に対する万有引力の効果を見積もるために、グリーンランドの氷床を地表にある質点とみなす。ただし、この質点はグリーンランドの氷床の全質量をもつとする。コペンハーゲンはその質点から地球表面に沿って 3500 km の距離のところにある。地球はその質点除けば球対称である。そして、地球の全表面積 $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{m}^2$ に海全体が広がっているものとする。地球の自転に伴うあらゆる影響は無視する。

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.9 | このモデルの範囲で、コペンハーゲンでの海面の高さを (h_{CPH}) とし、グリーンランドの対せき点 (地球の中心をとる反対側の点) での海面の高さ (h_{OPP}) との差 $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$ を求めよ。 | 1.8 |
|-----|---|-----|

データシート: 物理量

| | |
|--------------------|--|
| 真空中の光速 | $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ |
| 2π でわられたプランク定数 | $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$ |
| 万有重力定数 | $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ |
| 重力加速度 | $g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$ |
| 電気素量 | $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ |
| 真空の誘電率 | $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$ |
| 電子の質量 | $m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ |
| アボガドロ数 | $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ |
| ボルツマン定数 | $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ |
| 岩石状の隕石, 比熱 | $c_{\text{sm}} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| 岩石状の隕石, 熱伝導率 | $k_{\text{sm}} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| 岩石状の隕石, 密度 | $\rho_{\text{sm}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ |
| 岩石状の隕石, 融点 | $T_{\text{sm}} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$ |
| 岩石状の隕石, 融解熱 | $L_{\text{sm}} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$ |
| 銀, 1モルの質量 | $M_{\text{Ag}} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$ |
| 銀, 密度 | $\rho_{\text{Ag}} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ |
| 銀, 比熱 | $c_{\text{Ag}} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| 水, 1モルの質量 | $M_{\text{wa}} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$ |
| 水, 密度 | $\rho_{\text{wa}} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ |
| 水, 比熱 | $c_{\text{wa}} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| 水, 気化熱 | $L_{\text{wa}} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ |
| 水, 沸点 | $T_{100} = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373.15 \text{ K}$ |
| 氷の密度 | $\rho_{\text{ice}} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ |
| 水蒸気の比熱 | $c_{\text{st}} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| 地球の質量 | $m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ |
| 地球の半径 | $R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ |
| 太陽の質量 | $m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ |
| 太陽の半径 | $R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ |
| 太陽 - 地球間の平均距離 | $a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ |