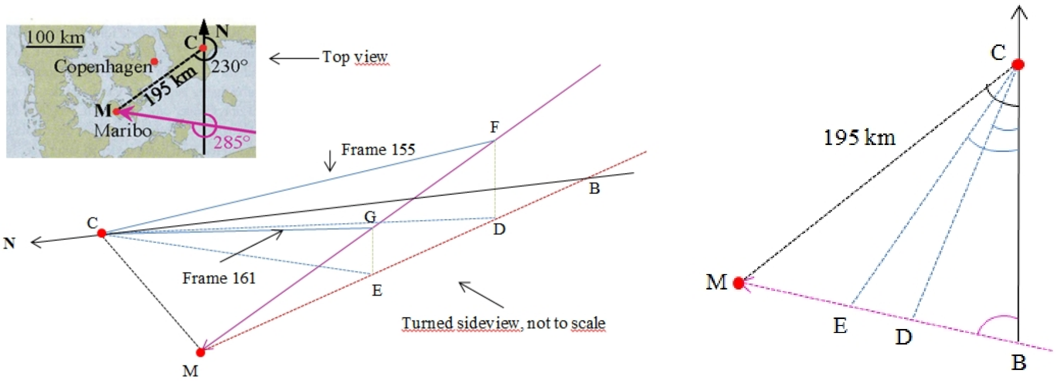
Solutions

1.1 (1.2)



上面図において

$\triangle$MCB: $|\mathrm{CM}| = 195\ \mathrm{km}, \angle\mathrm{MCB} = 230° - 180° = 50°, \angle\mathrm{MBC} = 75°,$

$\therefore \angle\mathrm{CMB} = 180° - 75° - 50° = 55°.$

よって正弦定理より $|\mathrm{CB}| = \dfrac{|\mathrm{CM}|\sin(\angle\mathrm{CMB})}{\sin(\angle\mathrm{MBC})} = 165.4\ \mathrm{km}.$

$\triangle$DCB: $|\mathrm{CB}| = 165.4\ \mathrm{km},\ \angle\mathrm{DCB} = 215° - 180° = 35°,\quad \angle\mathrm{DBC} = 75°,$

$\therefore \angle\mathrm{CDB} = 180° - 75° - 35° = 70°.$

よって正弦定理より $|\mathrm{CD}| = \dfrac{|\mathrm{CB}|\sin(\angle\mathrm{DBC})}{\sin(\angle\mathrm{CDB})} = 170.0\ \mathrm{km}.$

$\triangle$ECB: $|\mathrm{CB}| = 165.4\ \mathrm{km},\ \angle\mathrm{ECB} = 221° - 180° = 41°,\ \angle\mathrm{EBC} = 75°,$

$\therefore \angle\mathrm{CEB} = 180° - 75° - 41° = 64°.$

よって同様に $|\mathrm{CE}| = \dfrac{|\mathrm{CB}|\sin(\angle\mathrm{EBC})}{\sin(\angle\mathrm{CEB})} = 177.7\ \mathrm{km}.$

$\triangle$ECD: $\angle\mathrm{ECD} = 41° - 35° = 6°.$

マリボーが通過した距離の水平成分: $|\mathrm{DE}| = \dfrac{|\mathrm{DC}|\sin(\angle\mathrm{ECD})}{\sin(\angle\mathrm{CED})} = 19.77\ \mathrm{km}$

側面図において

$\triangle$CFD: $|\mathrm{FD}| = |\mathrm{CD}|\tan(\angle\mathrm{FCD}) = 59.20\ \mathrm{km}$

$\triangle$CGE: $|\mathrm{GE}| = |\mathrm{CE}|\tan(\angle\mathrm{GCE}) = 46.62\ \mathrm{km}$

マリボーが通過した距離の垂直成分: $|\mathrm{FD}| - |\mathrm{GE}| = 12.57\ \mathrm{km}.$

以上より、155 から 161 のこままでの間のマリボーが通過した距離 FG は

$|\mathrm{FG}| = \sqrt{|\mathrm{DE}|^2 + (|\mathrm{FD}| - |\mathrm{GE}|)^2} = 23.43\ \mathrm{km}.$ となる

マリボーの速さ $v = \dfrac{23.43\ \mathrm{km}}{2.28\ \mathrm{s} - 1.46\ \mathrm{s}} = 28.6\ \mathrm{km/s}$

1.2a	運動の第二法則より: $m_\mathrm{M}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -k\rho_\mathrm{atm}\pi R_\mathrm{M}^2 v^2$ 変形して $\dfrac{1}{v^2}\mathrm{d}v = -\dfrac{k\rho_\mathrm{atm}\pi R_\mathrm{M}^2}{m_\mathrm{M}}\mathrm{d}t.$ よって積分計算を行うと $t = \dfrac{m_\mathrm{M}}{k\rho_\mathrm{atm}\pi R_\mathrm{M}^2}\left(\dfrac{1}{0.9} - 1\right)\dfrac{1}{v_\mathrm{M}} = 0.88\ \mathrm{s}.$	0.7
1.2b	$\dfrac{E_\mathrm{kin}}{E_\mathrm{melt}} = \dfrac{\frac{1}{2}v_\mathrm{M}^2}{c_\mathrm{sm}(T_\mathrm{sm} - T_0) + L_\mathrm{sm}} = \dfrac{4.2\times10^8}{2.1\times10^6} = 2.1\times10^2 \gg 1.$	0.3

1.3a	$[\mathrm{J}] = [\mathrm{kgm^2s^{-2}}]$, $[\mathrm{W}] = [\mathrm{kgm^2s^{-3}}]$ $\therefore [k_{\mathrm{sm}}] = [\mathrm{kg\,m\,s^{-3}K^{-1}}]$, $[c_{\mathrm{sm}}] = [\mathrm{m^2\,s^{-2}K^{-1}}]$ $[x] = [t]^{\alpha}[\rho_{\mathrm{sm}}]^{\beta}[c_{\mathrm{sm}}]^{\gamma}\,[k_{\mathrm{sm}}]^{\delta} = [\mathrm{s}]^{\alpha}[\mathrm{kg\,m^{-3}}]^{\beta}[\mathrm{m^2\,s^{-2}K^{-1}}]^{\gamma}\,[\mathrm{kg\,m\,s^{-3}K^{-1}}]^{\delta}$, よって $[\mathrm{m}] = [\mathrm{kg}]^{\beta+\delta}[\mathrm{m}]^{-3\beta+2\gamma+\delta}[\mathrm{s}]^{\alpha-2\gamma-3\delta}[\mathrm{K}]^{-\gamma-\delta}$. $\beta+\delta = 0,\ \ -3\beta+2\gamma+\delta = 1,\ \ \alpha-2\gamma-3\delta = 0,\ \ -\gamma-\delta = 0$の式が成り立つ 以上より$(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \left(+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)$ $\quad x(t) \approx \sqrt{\frac{k_{\mathrm{sm}}t}{\rho_{\mathrm{sm}}c_{\mathrm{sm}}}}$.となる	0.6
1.3b	$x(t) \approx \sqrt{\frac{k_{\mathrm{sm}}t}{\rho_{\mathrm{sm}}c_{\mathrm{sm}}}}$ にt = 5 を代入して $x(5\ \mathrm{s}) = 1.6\ \mathrm{mm} \qquad x/R_{\mathrm{M}} = 1.6\ \mathrm{mm}/130\ \mathrm{mm} = 0.012.$	0.4

1.4a	${}^{87}_{37}\mathrm{Rb}$から${}^{87}_{38}\mathrm{Sr}$への崩壊はβ崩壊であるので、その反応式は $${}^{87}_{37}\mathrm{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}$$	0.3
1.4b	${}^{87}\mathrm{Rb}$ がt秒後にも存在する確率は$\mathrm{e}^{-\lambda t}$であるので $$N_{87\mathrm{Rb}}(t) = N_{87\mathrm{Rb}}(0)\mathrm{e}^{-\lambda t}$$ また$N_{87\mathrm{Sr}}(t)$はもともと存在していた ${}^{87}\mathrm{Sr}$ の個数と、${}^{87}\mathrm{Rb}$ が t 秒後に崩壊して生じた ${}^{87}\mathrm{Sr}$ の個数の和なので Rb→Sr: $N_{87\mathrm{Sr}}(t) = N_{87\mathrm{Sr}}(0) + [N_{87\mathrm{Rb}}(0) - N_{87\mathrm{Rb}}(t)]$. よって $N_{87\mathrm{Sr}}(t) = N_{87\mathrm{Sr}}(0) + (\mathrm{e}^{\lambda t}-1)N_{87\mathrm{Rb}}(t)$, そして両辺を$N_{86\mathrm{Sr}}$で割ることで以下の直線の方程式が得られる $$\frac{N_{87\mathrm{Sr}}(t)}{N_{86\mathrm{Sr}}} = \frac{N_{87\mathrm{Sr}}(0)}{N_{86\mathrm{Sr}}} + (\mathrm{e}^{\lambda t}-1)\frac{N_{87\mathrm{Rb}}(t)}{N_{86\mathrm{Sr}}}.$$	0.7
1.4c	グラフより$\mathrm{e}^{\lambda t} - 1 = a = \frac{0.712-0.700}{0.25} = 0.050$ また半減期$T_{½}$と崩壊定数λとの関係は $T_{½} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$と表せられるので $\tau_M = \ln(1+a)\frac{1}{\lambda} = \frac{\ln(1+a)}{\ln(2)}T_{½} = 3.4\times10^9$ 年 .	0.4

1.5	エンケ彗星の軌道の長軸半径は$a = \frac{1}{2}(a_{\min} + a_{\max})$で求まる. 地球と彗星におけるケプラーの第三法則より $t_{\mathrm{Encke}} = \left(\frac{a}{a_{\mathrm{E}}}\right)^{\frac{3}{2}} t_{\mathrm{E}} = 3.30$ 年 $= 1.04\times10^8$ s.	0.6

1.6a	地球の自転角速度は $\omega_\mathrm{E} = \frac{2\pi}{24\ \mathrm{h}} = 7.27\times10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$ 地球の慣性モーメントは $I_\mathrm{E} = 0.83\frac{2}{5}m_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2 = 8.07\times10^{37}\ \mathrm{kg\ m^2}$. 角運動量は $L_\mathrm{E} = I_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} = 5.87\times10^{33}\ \mathrm{kg\ m^2s^{-1}}$. 小惑星の質量は $m_\mathrm{ast} = \frac{4\pi}{3}R_\mathrm{ast}^3\rho_\mathrm{ast} = 1.57\times10^{15}\ \mathrm{kg}$ また小惑星の地球の中心に対する角運動量は$L_\mathrm{ast} = m_\mathrm{ast}v_\mathrm{ast}R_\mathrm{E} = 2.51\times10^{26}\ \mathrm{kg\ m^2s^{-1}}$. 衝突後の地球の角運動量ベクトルを$\boldsymbol{L}$とすると角運動量保存より、$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_\mathrm{E} + \boldsymbol{L}_\mathrm{ast}$ 角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}_\mathrm{E}$ と ベクトル$\boldsymbol{L}_\mathrm{ast}$ は垂直であるので、$\boldsymbol{L}$ と$\boldsymbol{L}_\mathrm{E}$ のなす角$\Delta\theta$は $\tan(\Delta\theta) = L_\mathrm{ast}/L_\mathrm{E} = 4.27\times10^{-8}$となる。 軸の傾きは$\Delta\theta = 4.27\times10^{-8}\ \mathrm{(rad)}$ (よって北極の移動は$R_\mathrm{E}\ \Delta\theta = 0.27\ \mathrm{m}$).	0.7
1.6b	地面に垂直な衝突で地球の角運動量は変化せず，$\Delta L_\mathrm{E} = 0$ $\Delta(I_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E}) = 0$. 慣性モーメントのみ変化し，角速度の変化は $\Delta\omega_\mathrm{E} = -\omega_\mathrm{E}(\Delta I_\mathrm{E})/I_\mathrm{E}$, $\Delta I_\mathrm{E}/I_\mathrm{E} = m_\mathrm{ast}R_\mathrm{E}^2/I_\mathrm{E} = 7.9\times10^{-10}$ よって$\Delta\omega_\mathrm{E} = -5.76\times10^{-14}\ \mathrm{s}^{-1}$を得る。 よって自転周期の変化は $\Delta T_\mathrm{E} = 2\pi\left(\frac{1}{\omega_\mathrm{E}+\Delta\omega_\mathrm{E}} - \frac{1}{\omega_\mathrm{E}}\right) \approx -2\pi\frac{\Delta\omega_\mathrm{E}}{\omega_\mathrm{E}^2} = 6.84\times10^{-5}\ \mathrm{s}$.	0.7
1.6c	地面に対して接線方向の衝突で，L_ast とL_Eは平行であるから， $L_\mathrm{E} + L_\mathrm{ast} = (I_\mathrm{E} + \Delta I_\mathrm{E})(\omega_\mathrm{E} + \Delta\omega_\mathrm{E})$ これより $$\Delta T_\mathrm{E} = 2\pi\left(\frac{1}{\omega_\mathrm{E}+\Delta\omega_\mathrm{E}} - \frac{1}{\omega_\mathrm{E}}\right) = 2\pi\left(\frac{I_\mathrm{E}+\Delta I_\mathrm{E}}{L_\mathrm{E}+L_\mathrm{ast}} - \frac{1}{\omega_\mathrm{E}}\right) = \left\{\frac{I_E\left(1+\frac{\Delta I_E}{I_E}\right)}{L_E\left(1+\frac{L_\mathrm{ast}}{L}\right)} - \frac{1}{\omega_E}\right\}$$ $$= \frac{2\pi}{\omega_E}\left(\frac{\Delta I_E}{I_E} - \frac{L_\mathrm{ast}}{L_E}\right) = -3.62\times10^{-3}\ \mathrm{s}$$	0.7

1.7	衝突の最大速度$v_\mathrm{imp}^\mathrm{max}$は以下の 3 つの考えから求まる。 (I) 地球の引力による影響を考えないとき、天体が太陽から距離a_E(地球の軌道半径)にあるときの最大の速度をv_bとおく。運動エネルギーと太陽の引力における位置エネルギーの合計が 0 になるので $$v_\mathrm{b} = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}} = 42.1\ \mathrm{km/s}.$$ (II) 地球の公転速度をv_Eとおき $v_\mathrm{E} = \frac{2\pi a_E}{1\ \mathrm{year}} = 29.8\ \mathrm{km/s}$. 地球と天体が正面衝突するとき、つまり相対速度が$v_\mathrm{b} + v_\mathrm{E}$となるときが最も速くなる。 (III)運動エネルギーが地球の引力の影響によって増加するので、地球から見たときのエネルギー保存則より $$\frac{1}{2}(v_\mathrm{b}+v_\mathrm{E})^2 = -\frac{Gm_E}{R_E} + \frac{1}{2}\left(v_\mathrm{imp}^\mathrm{max}\right)^2.$$ 以上より $v_\mathrm{imp}^\mathrm{max} = \sqrt{(v_\mathrm{b}+v_\mathrm{E})^2 + \frac{2Gm_E}{R_E}} = 72.8\ \mathrm{km/s}$.	1.2

	Total	**9.0**

解答

単一の球形銀ナノ粒子

2.1	ナノ粒子の体積： $V=\frac{4}{3}\pi R^3=4.19\times10^{-24}\ \mathrm{m}^3$ ナノ粒子の質量： $M=V\rho_{\mathrm{Ag}}=4.39\times10^{-20}\ \mathrm{kg}$ 銀イオンの個数：$N=N_A\frac{M}{M_{\mathrm{Ag}}}=2.45\times10^5$ 銀イオンの電荷密度： $\rho=\frac{eN}{V}=9.38\times10^9\ \mathrm{C\ m}^{-3}$ 自由電子の密度： $n=\frac{N}{V}=5.85\times10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$ （よって電荷密度は $\rho=en$ ） 自由電子の総電荷： $Q=eN=3.93\times10^{-14}\ \mathrm{C}$ 自由電子の総質量： $m_0=m_eN=2.23\times10^{-25}\ \mathrm{kg}$	0.7

荷電球内の荷電中性な領域における電場

2.2	一様な電荷密度 ρ で半径 R の球内において，位置ベクトル $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$ $(r<R)$ で定められる任意の点に対してガウスの法則（と対称性）から $4\pi r^2\varepsilon_0\boldsymbol{E}_+=\frac{4}{3}\pi r^3\rho\,\boldsymbol{e}_r$. ここで $\boldsymbol{e}_r$ は球の中心から外側を向く方向の単位ベクトルである．よって $\boldsymbol{E}_+=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$. 同様に，電荷密度 $-\rho$ で半径 R_1 の球内の電場は $\boldsymbol{E}_-=\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}'$ である．ここで $\boldsymbol{r}'$ はこの球の中心を原点とする座標での位置ベクトルである． この二つの電荷分布を重ね合わせると求めるべき電場が分かる．$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}$ であるから，荷電中性な領域 $\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}\rvert<R_1$ での電場は $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_++\boldsymbol{E}_-=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}+\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}})$. よって $\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}$ であり，係数は $A=\frac{1}{3}$.	1.2

変位した電子雲にかかる復元力

2.3	$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}=x_{\mathrm{p}}\,\boldsymbol{e}_x$ と $x_{\mathrm{p}}\ll R$ および前問の結果から，粒子の内部に誘導される電場は近似的に $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$. $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}$ を作っている電子の数は粒子内の電子の数に比べ無視できる程少ないので $\boldsymbol{F}\cong Q\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}=(-eN)\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}=-\frac{4\pi}{9\varepsilon_0}R^3e^2n^2\,x_p\boldsymbol{e}_x$. （これは調和振動子と同じである．）電子雲を変位させるために電子になされる仕事は $W_{\mathrm{el}}=-\int_0^{x_{\mathrm{p}}}F(x')\,\mathrm{d}x'=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{9\varepsilon_0}R^3e^2n^2\right)x_{\mathrm{p}}^2$.	1.0

定常な外場下での球形銀ナノ粒子

2.4	安定状態においてはこの金属粒子の内部で電場は 0 に等しいはずである．誘導される電場（2.2 あるいは 2.3 から分かる）が外場と打ち消し合っている：$\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}=0$. よって $x_{\mathrm{p}}=\frac{3\varepsilon_0}{\rho}E_0=\frac{3\varepsilon_0}{en}E_0$.	0.6

	yz 平面を通って移動する電荷は，底面の半径 R，高さ x_p の円柱内の総電荷に等しい：$-\Delta Q = -\rho\,\pi R^2 x_\mathrm{p} = -\pi R^2\, ne\, x_\mathrm{p}$.	

銀ナノ粒子と等価な電気容量とインダクタンス

2.5a	$\pm\Delta Q$ の電荷をためている電気容量 C のコンデンサの電気的エネルギーは $W_\mathrm{el} = \frac{\Delta Q^2}{2C}$． このエネルギーは両端の電荷（2.4 を参照）を引き離すのに必要な仕事（2.3 を参照）に等しい． よって $C = \frac{\Delta Q^2}{2W_\mathrm{el}} = \frac{9}{4}\varepsilon_0 \pi R = 6.26 \times 10^{-19}\ \mathrm{F}$.	0.7
2.5b	コンデンサに等価だとしているので $\Delta Q = CV_0$． 2.4 で求めた電荷と 2.5a で求めた電気容量から $V_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{4}{3}RE_0$.	0.4

2.6a	電子雲の運動エネルギーは，一つの電子の運動エネルギーに電子雲内の電子の個数をかけたものとして定義されるので $W_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}m_e v^2 N = \frac{1}{2}m_e v^2\left(\frac{4}{3}\pi R^3\, n\right)$. 電流 I は底面積 πR^2，高さ $v\Delta t$ の円柱内の電荷を時間 Δt で割ったものであるから $I = -e\, nv\, \pi R^2$.	0.7
2.6b	電流 I が流れているインダクタンス L のコイルのエネルギーは $W = \frac{1}{2}L\, I^2$ である. 等価なコイルに対してこのエネルギーが電子雲のエネルギー W_kin に等しい. 2.6a で求めたエネルギーと電流を使うと $L = \frac{4\, m_e}{3\pi R n e^2} = 2.57 \times 10^{-14}\ \mathrm{H}$ を得る.	0.5

銀ナノ粒子のプラズモン共鳴

2.7a	LC 回路によるモデル化から直ちに $\omega_\mathrm{p} = (LC)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{ne^2}{3\varepsilon_0 m_e}}$ が分かる. 代わりに 2.3 において調和振動子の運動を考えても振動数に対して同じ結果を得ることができる.	0.5
2.7b	$\omega_\mathrm{p} = 7.88 \times 10^{15}\ \mathrm{rad/s}$ である． 角振動数 $\omega = \omega_\mathrm{p}$ の光の波長は $\lambda_\mathrm{p} = \frac{2\pi c}{\omega_\mathrm{p}} = 239\ \mathrm{nm}$.	0.4

プラズモン振動数の光で照射された銀ナノ粒子

2.8a	電子の速度は $v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin\omega t = v_0 \sin\omega t$. 調和振動なので振動の一周期にかけて平均すれば十分である． 電子の運動エネルギーの時間平均は $\langle W_\mathrm{k}\rangle = \langle\frac{m_e v^2}{2}\rangle = \frac{m_e}{2}\langle v^2\rangle$． 時間 t_0 の間に電子は銀イオンに $\frac{t_0}{\tau}$ 回衝突する． 一周期にナノ粒子全体で失われるエネルギーは $W_\mathrm{kin} = N\langle\frac{m_e v^2}{2}\rangle = \frac{4}{3}\pi R^3 n\langle\frac{m_e v^2}{2}\rangle$． ジュール熱の時間平均は $P_\mathrm{heat} = \frac{1}{\tau}W_\mathrm{kin} = \frac{1}{2\tau}m_e\langle v^2\rangle\left(\frac{4}{3}\pi R^3\, n\right)$.	1.0

	2.6a で得られた電流の式を 2 乗して時間平均をとって $\langle I^2\rangle = (en\,\pi R^2)^2\,\langle v^2\rangle = \left(\frac{3Q}{4R}\right)^2 \langle v^2\rangle$.	
2.8b	交流電流 $I = I_0 \sin\omega t = \pi R^2 nev_0 \sin\omega t$ により， $P_{\mathrm{heat}} = R_{\mathrm{heat}}\langle I^2\rangle$ に等しい熱が抵抗 R_{heat} に発生する．2.8a で得られた結果を使うと $R_{\mathrm{heat}} = \frac{W_{\mathrm{kin}}}{\tau I^2} = \frac{2m_e}{3\pi ne^2 R\tau} =$ 2.46 Ω を得る．	1.0

2.9	$R_{\mathrm{scat}} = \frac{P_{\mathrm{scat}}}{\langle I^2\rangle}$ と $\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}\omega_{\mathrm{p}}^2 x_0^2$ から $R_{\mathrm{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_{\mathrm{p}}^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{16R^2}{9Q^2\langle v^2\rangle} = \frac{8\omega_{\mathrm{p}}^2 R^2}{27\pi\varepsilon_0 c^3} = 2.45\ \Omega$.	1.0

2.10a	実際の LCR 回路に対するオームの法則は $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{(R_{heat}+R_{scat})^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$. 共鳴振動数において，電圧の 2 乗の時間平均は $\langle V^2\rangle = Z_R^2\langle I^2\rangle = (R_{\mathrm{heat}} + R_{\mathrm{scat}})^2\langle I^2\rangle$. また，2.5b から $\langle V^2\rangle = \frac{1}{2}V_0^2 = \frac{8}{9}R^2E_0^2$. よってオームの法則により $\langle I^2\rangle = \frac{8R^2E_0^2}{9(R_{\mathrm{heat}}+R_{\mathrm{scat}})^2}$. ゆえに単位時間に失われるエネルギーの時間平均は $P_{\mathrm{heat}} = R_{\mathrm{heat}}\langle I^2\rangle = \frac{8R_{\mathrm{heat}}R^2}{9(R_{\mathrm{heat}}+R_{\mathrm{scat}})^2}E_0^2$ および $P_{\mathrm{scat}} = \frac{8R_{\mathrm{scat}}R^2}{9(R_{\mathrm{heat}}+R_{\mathrm{scat}})^2}E_0^2 = \frac{R_{\mathrm{scat}}}{R_{\mathrm{heat}}}\langle P_{\mathrm{heat}}\rangle$.	1.2
2.10b	順に計算すると $E_0 = \sqrt{\frac{2S}{\varepsilon_0 c}} = 27.4\ \mathrm{kV/m}$, $P_{\mathrm{heat}} = 6.82\ \mathrm{nW}$, $P_{\mathrm{scat}} = 6.81\ \mathrm{nW}$.	0.3

光による蒸気の発生

2.11a	容器内のナノ粒子の総数は $N_{\mathrm{np}} = h^2 a\, n_{\mathrm{np}} = 7.3 \times 10^{11}$. よって単位時間に発生するジュール熱の合計の時間平均は $P_{\mathrm{st}} = N_{\mathrm{np}} P_{\mathrm{heat}} = 4.98\ \mathrm{kW}$. このエネルギーは全て蒸気の発生に使われるので $P_{\mathrm{st}} = \mu_{\mathrm{st}} L_{\mathrm{tot}}$. ここで $L_{\mathrm{tot}} = c_{\mathrm{wa}}(T_{100} - T_{\mathrm{wa}}) + L_{\mathrm{wa}} + c_{\mathrm{st}}(T_{\mathrm{st}} - T_{100}) = 2.62 \times 10^6\ \mathrm{J\,kg^{-1}}$. よって単位時間に発生する蒸気の総質量は $\mu_{\mathrm{st}} = \frac{P_{\mathrm{st}}}{L_{\mathrm{tot}}} = 1.90 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\,s^{-1}}$.	0.6
2.11b	容器に入射する光線の単位時間あたりのエネルギーは $P_{\mathrm{tot}} = h^2 S = 0.01\mathrm{m}^2 \times 1\ \mathrm{MW\,m^{-2}} = 10.0\ \mathrm{kW}$. ナノ粒子による蒸気発生のために単位時間あたり使われたエネルギーは 2.11a で与えられる．よって $\eta = \frac{P_{\mathrm{st}}}{P_{\mathrm{tot}}} = \frac{4.98\ \mathrm{kW}}{10.0\ \mathrm{kW}} = 0.498$.	0.2

	合計	**12.0**

解答

<table>
<tr><td>3.1</td><td>力のつり合いより求める圧力は $p(x,z) = \rho_{\mathrm{ice}} g(H(x) - z)$ （表面で 0 である）</td><td>0.3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>3.2a</td><td>中央から距離 xにあり、与えられた幅 Δyを持つ垂直な薄片にかかる外部からの力は、圧力と面積をかけたものを積分して得られる。

$$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\mathrm{ice}}\, g\,(H(x) - z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\Delta y\,\rho_{\mathrm{ice}}\, g\, H(x)^2$$

これにより、 $\Delta F = F(x) - F(x+\Delta x) = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\Delta x = -\Delta y\,\rho_{\mathrm{ice}}\, g\, H(x)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}\Delta x$
最終的に、次の式が得られる。

$$S_{\mathrm{b}} = \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y} = -\,\rho_{\mathrm{ice}}\, g\, H(x)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$$

（符号に注意すると、S_bは正と定義されていて、$H(x)$はxの減少関数なのでこのようになる。）</td><td>0.9</td></tr>
<tr><td>3.2b</td><td>次の$H(x)$の微分方程式を解く。

$$-\frac{S_{\mathrm{b}}}{\rho_{\mathrm{ice}}\, g} = H(x)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x)^2$$

境界条件$H(L) = 0$を用いて、以下の解を得る。

$$H(x) = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\mathrm{ice}}\, g}}\sqrt{1 - x/L}$$

高さの最高値は、$H_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\mathrm{ice}}\, g}}$.

この方法の代わりに、次のように次元解析を用いることもできる。 $\mathcal{L} = [H_{\mathrm{m}}] = [\rho_{\mathrm{ice}}^{\alpha}\, g^{\beta} S_{\mathrm{b}}^{\gamma} L^{\delta}]$ に注意する。 $[\rho_{\rho_{\mathrm{ice}}}] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}$, $[g] = \mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$, $[\mathrm{S_b}] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2}$ より、 $\mathcal{L} = [H_{\mathrm{m}}] = [\rho_i{}^{\alpha} g^{\beta} S_b{}^{\gamma} L^{\delta}] = \mathcal{M}^{\alpha+\gamma}\mathcal{L}^{-3\alpha+\beta-\gamma+\delta}\,\mathcal{T}^{-2\beta-2\gamma}$ であり、 $\alpha + \gamma = 0$, $-3\alpha + \beta - \gamma + \delta = 1,\ 2\beta + 2\gamma = 0$ これらの 3 つの方程式を解くと、$\alpha = \beta = -\gamma = \delta - 1$
よって、

$$H_{\mathrm{m}} \propto \left(\frac{S_{\mathrm{b}}}{\rho_{\rho_{\mathrm{ice}}} g}\right)^{\gamma} L^{1-\gamma}$$

$H_{\mathrm{m}} \propto \sqrt{L}$であることが分かってとすると、$\gamma = 1/2$ 。境界条件$H(L) = 0$を用いると、解は次の形を取る。

$$H(x) \propto \left(\frac{S_{\mathrm{b}}}{\rho_{\mathrm{ice}}\, g}\right)^{1/2} \sqrt{L - x}$$

この解法では比例定数$\sqrt{2}$は決定されない。</td><td>0.8</td></tr>
</table>

3.2c	長方形状のグリーンランドのモデルにおいて、面積は$A=10L^2$ であり、体積は問題 3.2b で求めた高さ分布を積分することで求まる。 $V_{\mathrm{G,ice}}=(5L)2\int_0^L H(x)\,\mathrm{d}x=10L\int_0^L\left(\frac{2S_{\mathrm{b}}L}{\rho_{\mathrm{ice}}g}\right)^{1/2}\sqrt{1-x/L}\,\mathrm{d}x\ =10H_{\mathrm{m}}L^2\int_0^1\sqrt{1-\tilde{x}}\,\mathrm{d}\tilde{x}$ $=10H_{\mathrm{m}}L^2\left[-\frac{2}{3}(1-\tilde{x})^{3/2}\right]_0^1=\frac{20}{3}H_{\mathrm{m}}L^2\propto L^{5/2}$, 最終行は$H_{\mathrm{m}}\propto\sqrt{L}$ に基づいている。積分はLのスケールで実行する必要はないことに注意せよ。よって、$V_{\mathrm{G,ice}}\propto A^{5/4}$ であり、求める指数は$\gamma=5/4$	0.5

3.3	蓄積率がc で一定とする仮定によると、Δyの幅を持ち分水嶺$x=0$と$x>0$ のある地点の間の領域内に蓄積する氷の質量の合計は、xに対応する垂直に横切る部分を流れる氷の質量の合計に必ず等しい。つまり、$\rho c x\Delta y=\rho\Delta y H_{\mathrm{m}}v_x(x)$。速度について解くと、 $$v_x(x)=\frac{cx}{H_{\mathrm{m}}}$$	0.6

3.4	与えられた非圧縮性の仮定より、 $$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z}=-\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}=-\frac{c}{H_{\mathrm{m}}}$$ この微分方程式を初期条件$v_z(0)=0$ で解くと、 $$v_z(z)=-\frac{cz}{H_{\mathrm{m}}}$$	0.6

3.5	２つの微分方程式を解くと、 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\frac{cz}{H_{\mathrm{m}}}\quad かつ\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{cx}{H_{\mathrm{m}}}$$ 初期条件$z(0)=H_{\mathrm{m}}$ かつ $x(0)=x_i$を用いて、 $$z(t)=H_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{-ct/H_{\mathrm{m}}}\quad かつ\quad x(t)=x_i\,\mathrm{e}^{ct/H_{\mathrm{m}}}$$ よって、$z=H_{\mathrm{m}}\,x_i\,/x$ これは流線が xz平面内の双曲線であることを意味している。 微分方程式を解くのではなく、以下のことを示すこともできる。 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(xz)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}z+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{cx}{H_{\mathrm{m}}}z-x\frac{cz}{H_{\mathrm{m}}}=0$$ これは$xz=\mathrm{const.}$　を示している。そして初期条件で定数を定めることで、$z=H_{\mathrm{m}}x_i/x$ という結果を導くことができる。	0.9

3.6	分水嶺$x=0$において、流れは完全に垂直であり、問題 3.5 で求めたtの関数として表されたz をtについて解いて、$\tau(z)=\frac{H_{\mathrm{m}}}{c}\ln\left(\frac{H_{\mathrm{m}}}{z}\right)$	1.0

3.7a	現在の間氷期は、11,700 年前に対応する深さ 1492 m まで広がっている。問題 3.6 の$\tau(z)$の表式を使うと、次のように間氷期の蓄積率が求まる。 $$c_{\mathrm{ig}}=\frac{H_{\mathrm{m}}}{11{,}700\ \mathrm{years}}\ln\left(\frac{H_{\mathrm{m}}}{H_{\mathrm{m}}-1492\ \mathrm{m}}\right)=0.1749\ \mathrm{m/year}.$$ 120,000 年前の氷河期の始まりは、図 3.2b の 深さ 3040 m で$\delta^{18}\mathrm{O}$ の減少する所に対応する。問題 3.4 で求めた垂直方向の流れの速度を用いると、$\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{c}{H_{\mathrm{m}}}\mathrm{d}t$ これを２つの時代それぞれで一定の蓄積率を使って深さ 3040 m まで積分すると、 $$H_{\mathrm{m}}\ln\left(\frac{H_{\mathrm{m}}}{H_{\mathrm{m}}-3040\ \mathrm{m}}\right)=-H_{\mathrm{m}}\int_{H_{\mathrm{m}}}^{H_{\mathrm{m}}-3040\ \mathrm{m}}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$$ $$=\int_{11{,}700\ \mathrm{year}}^{120{,}000\ \mathrm{year}}c_{\mathrm{ia}}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{11{,}700\ \mathrm{year}}c_{\mathrm{ig}}\,\mathrm{d}t$$ $$=c_{\mathrm{ia}}(120{,}000\ \mathrm{year}\text{-}11{,}700\ \mathrm{year})+c_{\mathrm{ig}}11{,}700\ \mathrm{year}$$ この方程式より、$c_{\mathrm{ia}}=0.1232$ （つまり、現在よりはるかに降水量が少なかったのだ。）	0.8
3.7b	図 3.2b を読み取ると、 $\delta^{18}\mathrm{O}$ は$-43{,}5$ ‰ から $-34{,}5$ ‰に変化している。 図 3.2a を読み取ると、このとき T は -40 ℃ から -28 ℃に変化している。 したがって、 $\Delta T\approx 12$ ℃	0.2

3.8	A_{G}の面積から $L=\sqrt{A_{\mathrm{G}}/10}=4.14\times10^{5}\ \mathrm{m}$ が求まる。問題 3.2c で求めた体積に数値を入れると、 $$V_{\mathrm{G,ice}}=\frac{20}{3}L^{5/2}\sqrt{\frac{2S_{\mathrm{b}}}{\rho_{\mathrm{ice}}g}}=3.45\times10^{15}\ \mathrm{m}^{3}$$ この氷の体積を、総質量が等しい液体の水の体積に変換して、 $$V_{\mathrm{G,wa}}=V_{\mathrm{G,ice}}\frac{\rho_{\mathrm{ice}}}{\rho_{\mathrm{wa}}}=3.17\times10^{15}\ \mathrm{m}^{3}$$ 最後に海面が上昇する高さは、 $h_{\mathrm{G,rise}}=\frac{V_{\mathrm{G,wa}}}{A_{\mathrm{o}}}=8.79\ \mathrm{m}$	0.6

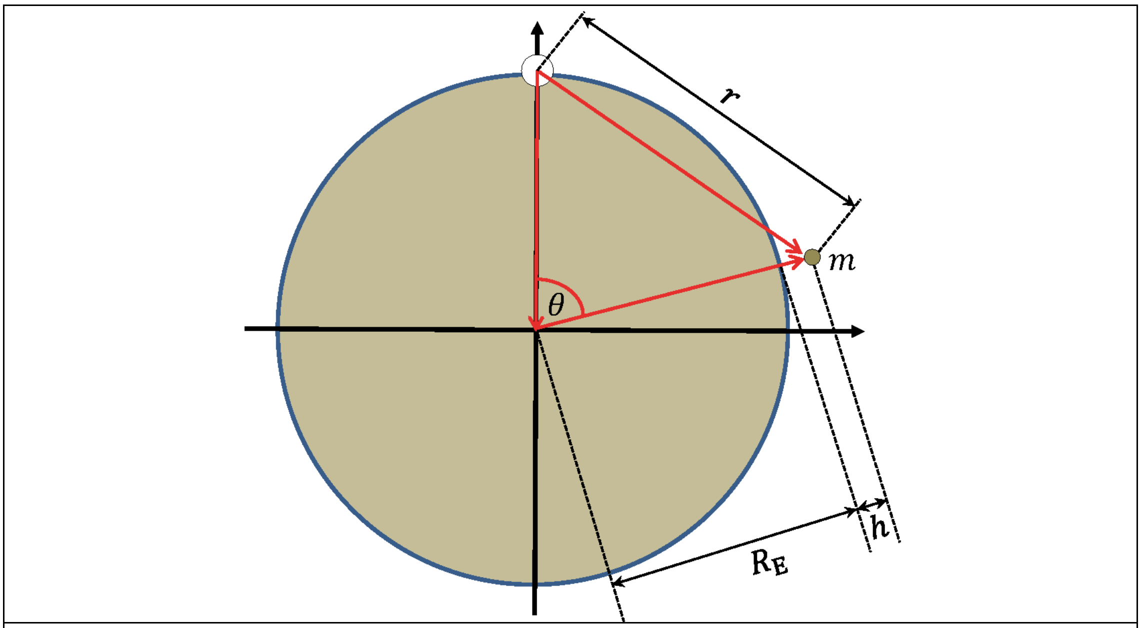


図 3.S1 氷の玉（白い円）と試験的な質点m（灰色の小さな円）の配置

氷床の総質量は、

$$M_{\text{ice}} = V_{\text{G,ice}}\,\rho_{\text{ice}} = 3.17 \times 10^{18}\ \text{kg} = 5.31 \times 10^{-7} m_{\text{E}}$$

3.9 地球の表面からhの高さにあり、自転軸（氷の玉をまっすぐ貫いている）とθの角をなす試験的な質点m (cf. 図 3.S1) が持つ重力の位置エネルギーの合計は、地球による重力の位置エネルギーと氷によるそれを足しあわせたものである。 1.6

$$U_{\text{tot}} = -\frac{G m_{\text{E}} m}{R_{\text{E}} + h} - \frac{G M_{\text{ice}} m}{r} = -mgR_E\left(\frac{1}{1 + h/R_E} + \frac{M_{ice}/m_E}{r/R_E}\right)$$

（但し $g = Gm_E/R_E^2$） $h/R_{\text{E}} \ll 1$ であるから、問題文で与えられた近似：$(1+\text{x})^{-1} \approx 1 - x,\ |x| \ll 1$ が使え、

$$U_{\text{tot}} \approx -mgR_E\left(1 - \frac{h}{R_E} + \frac{M_{ice}/m_E}{r/R_E}\right).$$

h について解くと $h = h_0 + \frac{M_{ice}/m_E}{r/R_E} R_E$ （但し$h_0 = R_E + U_{\text{tot}}/(mg)$）

もう一度 $h/R_{\text{E}} \ll 1$ を使うと、三角比より$r \approx 2R_{\text{E}}|\sin(\theta/2)|$ であり、以下のことがわかる。

$$h(\theta) - h_0 \approx \frac{M_{\text{ice}}/m_{\text{E}}}{2|\sin(\theta/2)|} R_E \approx \frac{1.69\ \text{m}}{|\sin(\theta/2)|}.$$

コペンハーゲンでの影響の大きさを考える。地球表面に沿った距離が 3500 km であるので、 $\theta_{\text{CPH}} = (3.5 \times 10^6\ \text{m})/R_E \approx 0.549$ よって、 $h_{\text{CPH}} - h_0 \approx 6.25\ \text{m}$ グリーンランドの真反対の地点は $\theta = \pi$に対応し、$h_{\text{OPP}} - h_0 \approx 1.69\ \text{m}$。求める差は、$h_0$が相殺されて $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.56\ \text{m}$

	合計	**9.0**