

物理チャレンジ2014

理論問題

2014年8月20日(水)

理論問題にチャレンジ 8:30~13:30

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問3題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙、計算用紙、および電卓にも手を触れないこと。
2. 問題冊子は19ページである。解答冊子は15枚である。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答のみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(11:50)後は、退出希望者は旗をあげて監督者に知らせ、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて退室すること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

第1問 (100点)

空間で重力を受けながら運動する物体の軌道は放物線になるのに、斜面におかれた物体が斜面に沿ってすべり落ちる軌道は直線になる。このように、軌道の形が制限される運動を束縛運動とよぶ。重力を受けながら、いろいろな曲線軌道に沿って走るジェットコースターの運動も束縛運動である。この問題では、サイクロイドと呼ばれる特殊な曲線の軌道に束縛される物体の運動を考える。

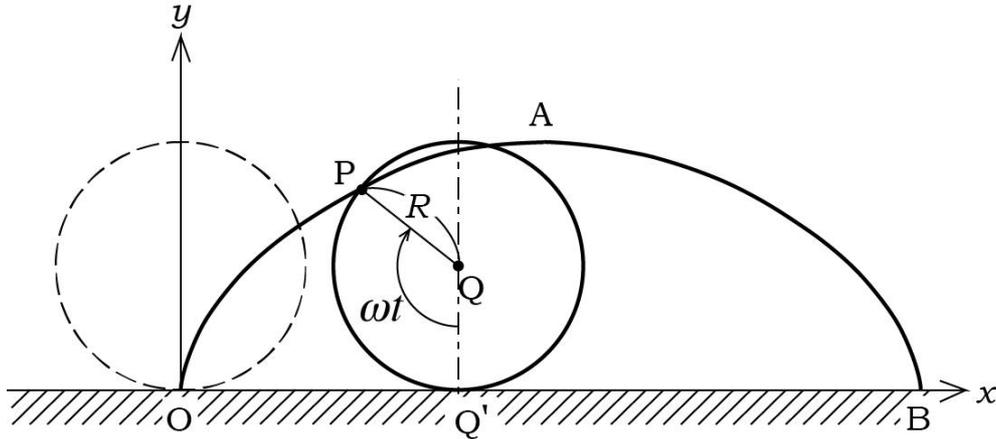


図1

[I] サイクロイドの性質

図1のように半径が R の円盤がある。円盤は始め破線の位置にあり、そのとき円盤に固定された点 P は座標原点 O のところにあった。円盤は床に対してすべらないように角速度 ω で回転を始め、時間 t の後に、点 P と円盤の中心 Q は図1に描かれている位置にきた (Q' は円盤と x 軸との接点)。円盤がさらに回転を続けて1回転するうちに、点 P は、最高点 A を通って B に至る。この間に点 P が描いた軌跡が曲線 OAB で、このまま円盤が回転が続けると、点 P の軌跡は曲線 OAB を周期的につなげたものになる。こうしてでき上がった曲線がサイクロイドである。ただし、以下では、1周期の部分 OAB のみを考えて、これをサイクロイドと呼ぶ。

まず、図1の点 P の運動を考えながら、サイクロイドの性質を調べる。

問1 時刻 t における点 P の座標を (x, y) とするとき、これらは、回転角 ωt を使って

$$x = R\omega t - R \sin \omega t \tag{1}$$

$$y = R - R \cos \omega t \tag{2}$$

と表されることを導け。

問2 点 P の速度ベクトル \vec{v} の時刻 t での x 成分と y 成分は、式(1)と式(2)を使って、

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{および} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

によって計算できる。また、速さ(速度ベクトルの大きさ) v を使うと図1の曲線 OP の長さは、

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt$$

と表される。以上を合わせて，OP の長さは

$$s(t) = 4R\left(1 - \cos \frac{\omega t}{2}\right) \quad (3)$$

となることを示せ。また，曲線 OAB の長さはいくらか。

必要なら公式

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1, \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

を使え (C は積分定数)。

問3 点P がO からサイクロイドに沿って距離 s 移動したときの高さ (y 座標) はいくらか。 y を s の関数として表せ。

問4 サイクロイド上で次の関係が成り立つことを導け。

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2R}{y} - 1} & x \leq \pi R \\ -\sqrt{\frac{2R}{y} - 1} & \pi R < x \leq 2\pi R \end{cases} \quad (4)$$

ヒント：軌道上のある点での $\frac{dy}{dx}$ はその点を通る質点の v_x と v_y を使って $\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$ と表される。

このような方程式は微分方程式と呼ばれ，これを解くことによってサイクロイド上の座標 x と y を直接結びつける関係が得られる。

[II] サイクロイド運動の物理

図2の曲線 OAB は，図1のサイクロイドを上下反転したものである。 y 軸は鉛直， x 軸は水平であるとし，これからはこの軌道 OAB に束縛された質量 m の質点の運動を考える。ただし，以下では，質点に働く力としては，重力と軌道からの垂直抗力のみを考え，軌道と質点の間の摩擦や空気抵抗は考えないものとする。重力加速度の大きさは g とする。

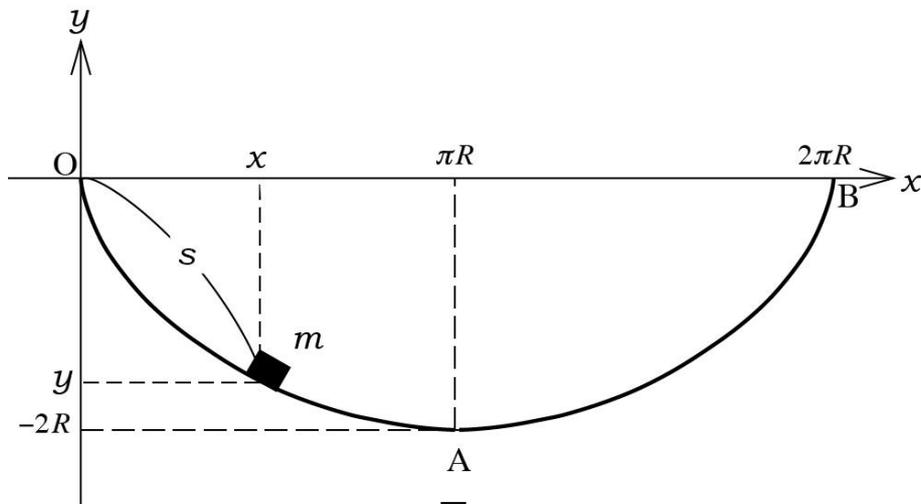


図2

[I] と同じように，質点の運動はO を原点とする座標の時間依存性 $(x(t), y(t))$ で表される。ただし，この質点の運動を考えるとき，[I] で出会った事柄を次のように修正する必要がある。

1. サイクロイドが図1とは上下反対なので、[I]に出てきたいろいろの式の中の y は $-y$ で置き換える。
2. 座標の時間 t に対する依存性は、式(1)や式(2)の ωt を、より一般的な t の関数 $\theta(t)$ を使って表す。すると、図2のサイクロイド上の運動は

$$x = R\theta(t) - R\sin\theta(t) \quad (5)$$

$$y = -R + R\cos\theta(t) \quad (6)$$

と表される。ただし、 $\theta(0) = 0$ とする。

3. [I] では、原点 O から点 P までの軌道に沿った距離 s は時間とともに単調に増加する場合のみを考えたが、ここでは、質点は左右どちらの向きにも運動できる場合を考えるので、 s は増加することも減少することもある。したがって、

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (7)$$

は右向きの運動では正の値をとり、左向きの運動では負の値をとる。そこで、以下では v を「速さ」とは呼ばず、「軌道に沿った速度」と呼ぶことにする。

問5 図2のサイクロイド上を運動する質量 m の質点の力学的エネルギーが保存することを表す式を、質点の速度 v および y 座標を用いて書け。ただし位置エネルギーの基準点は点 A に選び、点 A での速度を v_0 とする。

問6 (a) 前問で求めたエネルギー保存の式の中の y は s を使い、 v は s の時間微分を使って表し、両辺を t で微分することによって、運動方程式を導け。なお、加速度の(軌道の)接線方向成分は

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

と表される。

(b) 質点は軌道上で A を中心に周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}$$

で往復運動することを導け。

以上の導出の過程で、質点がサイクロイド上にあること以外に s の範囲に何の仮定もしなかったことに注意しよう。したがって、サイクロイド軌道上の任意の点に質点を静止させてから放すと、質点は図2の点 A を中心とする往復運動を始めるが、その周期、すなわち1往復に要する時間は出発点の位置によらない。

[III] 最速降下曲線

空間にある2点間を結ぶ曲線軌道を一様な重力を受けてすべり落ちる質点がある。この質点が高い方の点を初速度ゼロで出発してもう一方の点に達するまでの所要時間が最も短くなる軌道はどのような形のものだろうか。質点がいつも一定の速さで運動するなら、2点を結ぶ最短距離の軌道、すなわち、直線軌道の場合に所要時間が一番短いはずであるが、物体の速さが重力の影響を受けて変化するので、直線では時間が最小にはならない。

まず次のような問題を考えてみる。

問7 図3の $y > 0$ の領域では一定の速さ v_1 で、 $y < 0$ の領域では一定の速さ v_2 で運動する質点がある。この質点は点 P_1 から P_2 へ2つの直線軌道 P_1P および PP_2 に沿って移動する。ただし点 P は x 軸上の点である。最も短い時間で到達する場合、点 P の位置は、

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (8)$$

という関係が成り立つように決まることを導け。

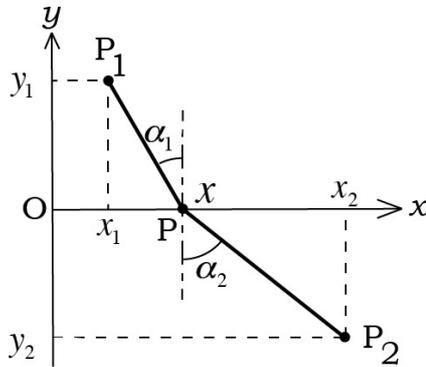


図3

式(8)は、光についての屈折の法則と同じ形をしていることに注意しよう。じつは、異なる媒質の境界面を通過する光は、出発点から到着点まで、所要時間が最短となる経路をたどることが知られていて、これをフェルマの原理という。光が電磁波であるということが知られる前に、屈折の法則はフェルマの原理を使って導かれた。

次に、図4(a)のように軌道を細かい部分に分割し、それぞれの部分曲線を線素と呼ぶことにする。線素が十分短いなら、線素は直線で、そこを通る間の質点の速度は一定であると考えてよい。図4(b)のように、 i 番目の線素の上の点 (x_i, y_i) を通過するときの速度ベクトルと鉛直下向きの線とのなす角を α_i 、その線素上での質点の速さを v_i と表すことにし、隣り合う線素について次々に式(8)を適用すると、次の関係を得る。

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = \dots$$

これは、最速降下曲線上の任意の点に引いた接線と鉛直線のなす角を α 、そこでの質点の速さ

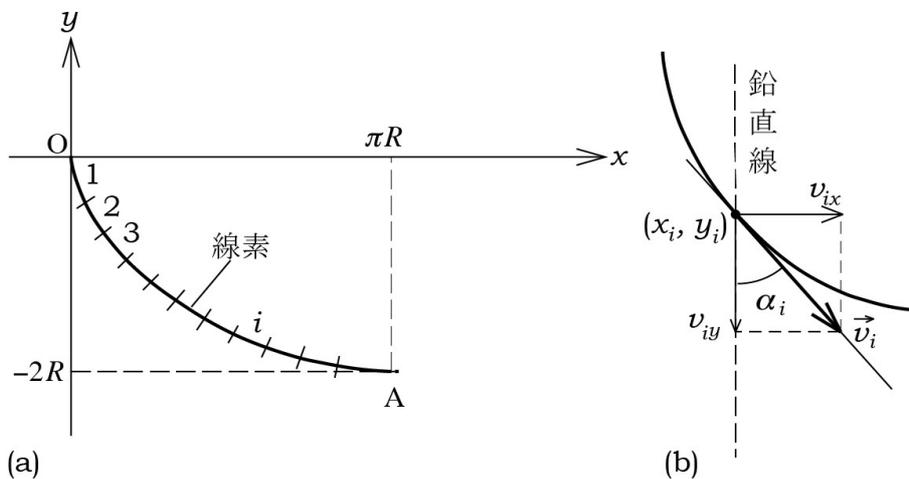


図4

を v として，次式が成り立つことを意味する。

$$\frac{\sin \alpha}{v} = k \text{ (一定)} \quad (9)$$

さらに図 4(b) において $\sin \alpha_i = \frac{v_{ix}}{v_i}$ であることから，軌道上の任意の点で

$$\sin \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_y}{v_x}\right)^2}}$$

が成り立つ。この結果に $\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$ を代入すると，次の結果を得る。

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

問 8 質点がある曲線軌道の端の座標原点 O から初速度 0 で鉛直下向きに出発した。質点は $x > 0, y = y_0 (< 0)$ にある最下点まで坂を下り，そこで軌道は水平になっているとする。この条件を満たす最速降下曲線は

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y_0}{y} - 1} \quad (10)$$

という性質をもつことを示せ。

式 (10) で y の符号を反転し， $y_0 = -2R$ を代入すると，問 4 で求めた微分方程式 (4) ($x \leq \pi R$ の場合) になるから，最速降下曲線はサイクロイドであることがわかる。

[IV] 最速降下曲線上の運動

次に，地表の 2 地点 A と B の間を結んだトンネルの中を，重力の助けを借りて運動する小物体について考える。ここではどのような経路でトンネルを掘ったら A から B に最短時間で行けるかについて検討してみよう。なお，これまでと同じように，トンネルと小物体の間の摩擦も，空気抵抗も働かないものとする。また，重力加速度 g は一定とし，必要なら $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を用いよ。

問 9 最初に次のような簡単な場合について考えてみよう。図 5 に示すように，距離 L 離れた地点 A と B で鉛直にトンネルを掘り，地下 h の深さのところの水平な横トンネルで 2 つの縦トンネルをつなぐ。

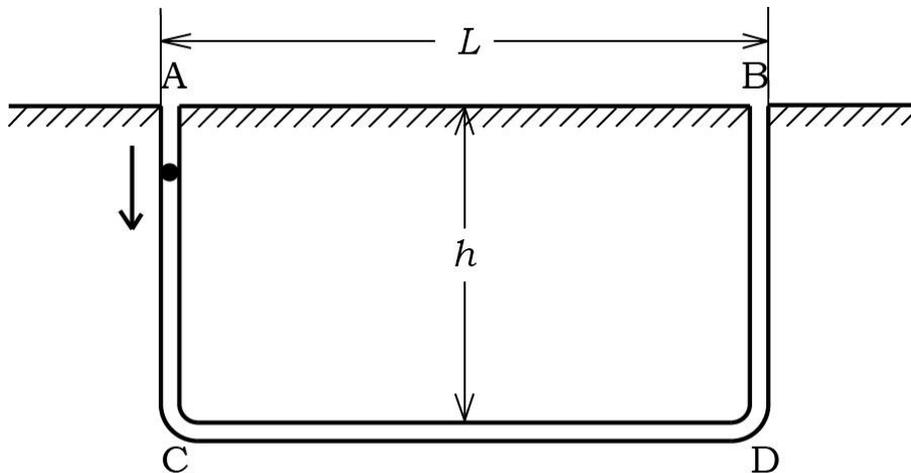


図 5

- (a) 初め小物体を A で静止させてから放した。B に到達するまでに要する時間 T を h と L を用いて表せ。ただし、縦トンネルから横トンネルへのつなぎ目では運動がなめらかにつながるものとする。
- (b) 前問で求めた所要時間 T を最小にする h と、最小の所要時間 T_m を L の関数として求めよ。また、AB 間の距離 L が 500 km のとき (東京-大阪間の距離にほぼ等しい)、この最短時間 T_m と深さ h を計算せよ。

問 10 図 6 のように、前問の 2 地点 A, B で速度ベクトルが鉛直方向を向くようにこの 2 点をサイクロイド型のトンネルでつなぎ、A から初期速度 0 で小物体を落下させたとき、B までの所要時間 T_{\min} を L の関数として求めよ。 L が 500 km のとき所要時間はいくらになるか。

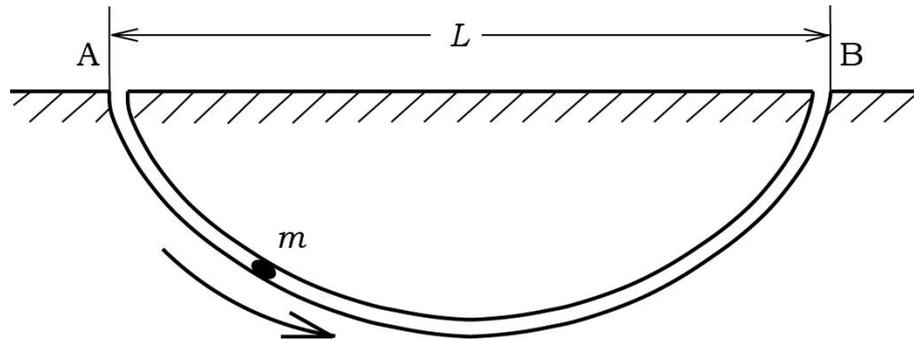
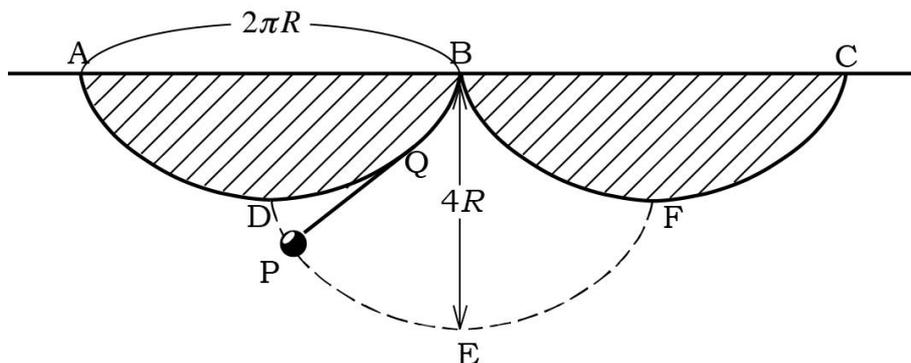


図 6

問 11 質量が等しい 2 つの小物体があり、小物体 1 は図 6 の A 点に、小物体 2 はトンネルの最下点より左、深さが最下点の半分の場所におく。小物体を同時に静かに放したところ、それらはトンネル内をすべり出したが、やがてあるところで完全弾性衝突した。最初に衝突が起きた場所はどこか。また、衝突後に小物体 2 が到達する最高点はどこか。

= 参考 = サイクロイド振り子



上の図のように、天井に 2 つのサイクロイドの当て板を置き、中心に長さ $4R$ の振り子を垂らす。B と Q の間は当て板に巻きつくように接し、先端の直線部分 QP は当て板から離れる。したがって、 $\widehat{BQ} + \overline{QP} = 4R$ である。このとき、おもり P の軌跡もまたサイクロイドになることが知られている (力試しのために確かめてみよ)。通常の振り子の場合には、振り子の振れが小さい場合のみ近似的に振り子の等時性 (周期運動の周期が振幅に無関係で一定) が成り立つが、問 6 で導いたように、サイクロイド軌道に束縛された質点の重力場での運動方程式は振幅の大きさに関わらず厳密に単振動の方程式なので、サイクロイド振り子では振り子の等時性がいつも成り立っている。

第2問 (100点)

電動モーターは電気エネルギーを機械的エネルギーに変換する装置として、産業や社会基盤だけでなく日常生活にも欠かせない。電動モーターにはいろいろな種類があるが、誘導モーターと呼ばれる交流モーターが多用されている。

誘導モーターの原理を理解するために図1に示した簡単化されたモデルを考える。対称軸の周りに回転する永久磁石があり、磁石の磁極の間に長方形のコイル ABCD が置かれている。コイルも磁石と同じ回転軸の周りに磁石とは独立になめらかに回転できる。コイルの置かれたところでは、一様で大きさが一定の、向きだけが時間とともに回転する磁場（回転磁場）が磁石によってつくられる。電磁誘導によってコイルに電流が流れると、電流は磁石の磁場から力を受け、コイルを回転軸の周りに回転させようとする力のモーメントが生じる。

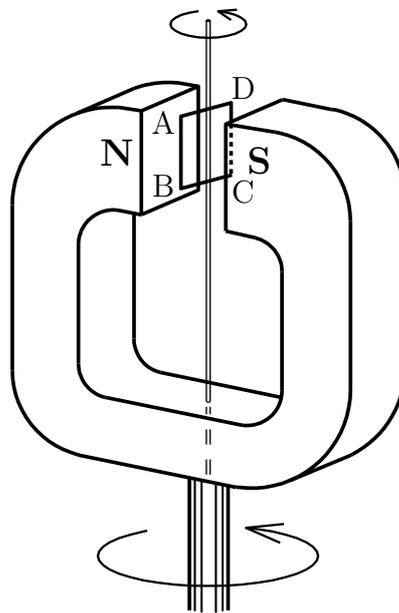


図1

なお、この問題では簡単のために回転磁場は磁石の回転によってつくられると考えるが、実際の誘導モーターの回転磁場はコイルの周囲に適当に配置され、固定された交流電磁石によってつくられる（この問題の最後を参照）。このような回転磁場によりコイルを回転させる装置が誘導モーターである。

コイル ABCD は、図2のように、大きさが B の一様な磁束密度の磁場の中にある。コイルを A B C D の向きに流れる電流の符号を正とする。また、電流の正の向きに右ねじをまわしたときねじの進む向きをコイル面の法線の向きとする。法線と磁場の向きの角が θ のとき、面積 S のコイルを貫く磁束 Φ は次のように与えられる。

$$\Phi = BS \cos \theta \quad (1)$$

ファラデーの電磁誘導の法則によると、磁束 Φ が時間的に変化すると、コイルに誘導起電力が生じる。微小時間 Δt の間の磁束の変化を $\Delta \Phi$ とすると、誘導起電力 V は

$$V = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

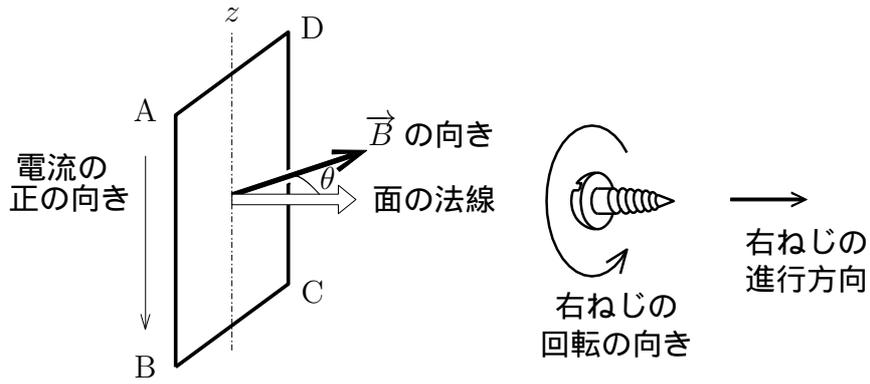


図 2

と表される。ただし、起電力の符号は正の電流を流すものを正とする。 Δt を十分小さくとれば、起電力は時間微分を使って次のように表される。

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

式 (1) はコイルが 1 回巻きの場合であるが、 n 回巻きの場合は、 Φ は式 (1) の n 倍になり、起電力も n 倍になる。一般には、式 (1) の B, S, θ のどれが時間的に変わっても磁束 Φ が時間変化するが、この問題では角 θ の時間変化に伴う磁束変化のみを考える。

以下では、コイルの回転軸を z 軸とし、それに垂直に x 軸と y 軸を選ぶ (図 3 参照)。コイルを貫く磁場の磁束密度の大きさ B は一様で、向きは z 軸に垂直、 z 軸のまわりを一定の角速度 ω_B で回転するものとする。磁場の向きは、 x 軸となす角 θ_B を用いて表す。この問題では、角度や回転の向きはすべて z 軸の上方から見て反時計回りを正とする。また、 $t = 0$ で $\theta_B = 0$ であったとする。コイルは長方形で、 z 軸に平行な辺 AB と CD の長さは a 、 z 軸に垂直な辺 BC と DA の長さは b であり、面積 S は $S = ab$ である。コイルは n 回巻きで、全電気抵抗を R とする。

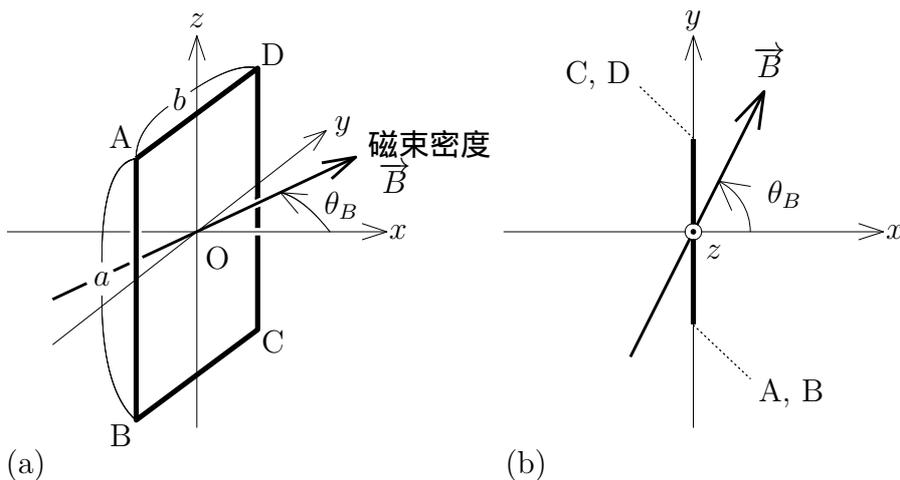


図 3

以下の問 1~3 では図 3 のように、コイルは $y-z$ 面に固定されているとする。コイル面の法線は x の方を向くから、法線と磁場の向きのなす角は $\theta(t) = \theta_B = \omega_B t$ である。

- 問1 (a) 符号に注意してコイルに流れる誘導電流 $I(t)$ を求めよ。必要ならば、次の式(合成関数の微分の公式)を用いよ。

$$\frac{d}{dt} \cos \theta(t) = -\sin \theta(t) \frac{d}{dt} \theta(t)$$

- (b) $\theta = \pi/2$ のときコイルを流れる電流は、辺 AB を A→B に流れる向きか、B→A に流れる向きか答えよ。

図3のコイルに誘導電流 $I(t)$ が流れると、磁場の作用によって電流に力が働き、コイルに回転軸 (z 軸) の周りの力のモーメントが生じる。以下では z 軸の周りの力のモーメントを単に「トルク」と呼ぶ。また、トルクの符号は z 軸の上方から見て反時計回りを正とする。

- 問2 (a) 辺 AD と辺 BC に働く力は大きさが等しく向きは反対であることを示せ。
 (b) 辺 AD と辺 BC に働く力によってはトルクが生じないことを示せ。
 (c) 辺 AB と辺 CD のそれぞれに働く力によるトルクは互いに等しく、その和 $N(t)$ は

$$N(t) = nSBI(t) \sin \theta(t) \quad (3)$$

となることを示せ。

ヒント: 符号に注意して、まず、 $0 < \theta < \pi$ の場合について式を求め、次に $\pi < \theta < 2\pi$ (あるいは $-\pi < \theta < 0$) の場合についてこの式の両辺の符号が等しくなることを確かめよ。

- 問3 コイルに流れる電流 $I(t)$ が問1のように与えられるとき $N(t)$ を求めよ。ただし θ は使わず、 ω_B を使って表せ。

問1~3では、コイルが yz 面内に固定された場合を考えた。ここからは、図4のようにコイルは z 軸の周りに自由に回転できるとする。法線の向きも変化するので、法線の向きを x 方向から測って θ_C と表す。 θ_C は時間とともに変化する。

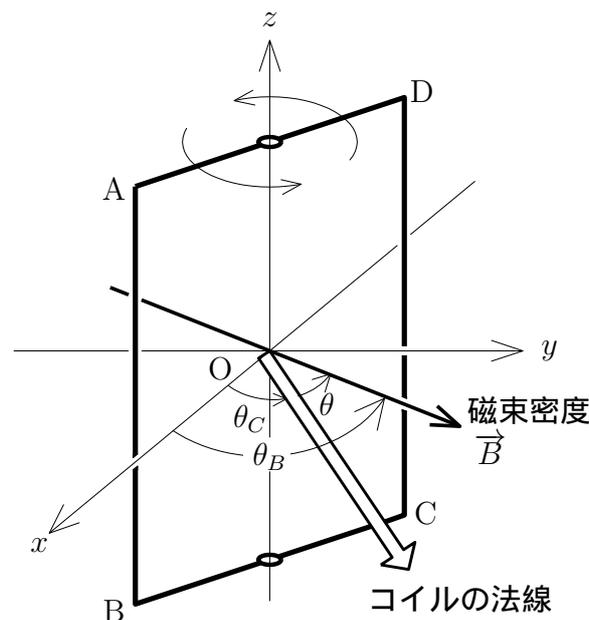


図4

回転するコイルに生じるトルクを求めよう。コイルが回転している場合にもトルクの式 (3) は成り立つ。

問4 (a) 磁場とコイル面の法線のなす角 θ を ω_B, t, θ_C で表し, 時刻 t にコイルを流れる誘導電流 $I(t)$ を求めよ。

(b) 時刻 t にコイルに生じるトルク $N(t)$ を求めよ。ただし, θ の代わりに ω_B, t, θ_C を使って表せ。

誘導モーターでは, コイルに働くトルクによりコイルを回転させ, コイルに連結した外部装置 (負荷という) に回転を伝える。問4の解によるとコイルに働くトルクは一般に時間とともに変動するが, 実際の誘導モーターにおいては, コイルは一定の角速度で回転していると見なせる (角速度が一定になる原因にはここでは立ち入らない)。以下ではコイルの回転の角速度は一定値 $\omega_C (> 0)$ であり, コイル面の法線の向きは $\theta_C(t) = \omega_C t$ であるとする。コイルの回転の角速度が一定の場合には, 変動するトルクの時間平均が負荷に伝わることになる。

問5 コイルの回転の角速度が一定値 ω_C のとき, トルクの時間平均 \bar{N} を求めよ。

問5までは, コイルを貫く磁束として磁石の磁場による磁束だけを考えてが, このほかに, コイル自身を流れる電流がつくる磁場もコイルを貫く磁束を与える。コイルを貫く全磁束はこれら2つの和である。コイルの電流を $I(t)$ とすると, $I(t)$ による磁束はある定数 L により $LI(t)$ と表される (L を自己インダクタンスと呼ぶ)。 L の値はコイルの形などに依存するが, ここでは与えられた定数として扱う。

問6 コイルを貫く全磁束はコイルを流れる電流 $I(t)$ を含む式で表される。一方, コイルを流れる電流 $I(t)$ はコイルを貫く全磁束の時間微分によって表される。これらから, 電流 $I(t)$ に対する次の形の方程式が得られることを示し, 定数 α, β および ω を $B, n, S, \omega_B, \omega_C, R, L$ により表せ。

$$\alpha \frac{d}{dt} I(t) + I(t) = \beta \omega \sin \omega t \quad (4)$$

問7 問6の方程式 (4) には, 次の式 (5) の形の解がある。係数 f, g は時間によらない定数である。式 (5) を式 (4) に代入して両辺を比較し, 係数 f, g を式 (4) の α, β, ω で表せ。

$$I(t) = f \sin \omega t + g \cos \omega t \quad (5)$$

問8 (a) 自己インダクタンスを考慮した場合のトルクの時間平均 \bar{N} を $\omega_B, \omega_C, n, S, B, R, L$ により表せ。

(b) 横軸に ω をとり, \bar{N} の振る舞いの概略をグラフに描け。

一般に, 磁石がコイルに問8で求めたトルク \bar{N} を働かせるときには, 磁石はコイルからトルク $-\bar{N}$ を受ける。そのため, 磁石の回転を一定の角速度に保つには, この $-\bar{N}$ を打ち消すトルク \bar{N} を外から磁石に加えなければならない。したがって, 誘導モーターは, 外から磁石に加えた入力トルク \bar{N} をコイルが負荷に出力トルク \bar{N} として伝える装置と考えることができる。では, エネルギーの入出力はどうなっているであろうか。(ただし, 磁石とコイルが回転するときの摩擦および空気による抵抗を無視する。)

- 問9 (a) エネルギー保存則が成り立っていると仮定すると、磁石からコイルに伝わるトルクの時間平均 \bar{N} 、磁場の回転の角速度 ω_B とコイルの回転の角速度 ω_C 、コイルに流れる電流 $I(t)$ の2乗の時間平均 \bar{I}^2 、コイルの抵抗 R の間にはどのような関係があると考えられるか。
 ヒント：一般に、回転体にトルク M を加えて角 $\Delta\phi$ だけ回転させるときの仕事は $M\Delta\phi$ である。したがって、トルク M を加えてその向きに角速度 Ω で回転させるときの仕事率は $M\Omega$ である。
- (b) コイルで単位時間あたりに発生する平均のジュール熱を計算し、 $\omega_B, \omega_C, n, S, B, R, L$ により表せ。
- (c) 問8で求めた \bar{N} と (b) の結果から、(a) で導いた関係が成り立つこと、すなわちエネルギー保存則が成り立っていることを確かめよ。

実際の誘導モーターでは固定した電磁石に交流電源をつないで回転磁場をつくる。この問題の磁束密度の x, y, z 成分は $(B \cos \omega_B t, B \sin \omega_B t, 0)$ であるから、 x 方向、 y 方向の磁場をつくる電磁石に、それぞれ、 $\cos \omega_B t, \sin \omega_B t$ に比例する交流電流を流せば同じ回転磁場が得られる。図5(a)に模式図を示す。

また、図5(b)の模式図のように、 $x-y$ 面内の磁場をつくる3つの電磁石を組み合わせると、位相が互いに $2\pi/3, 4\pi/3$ だけずれた交流電流を流しても回転磁場が得られる。このような交流は3相交流として供給され、広く利用されている。

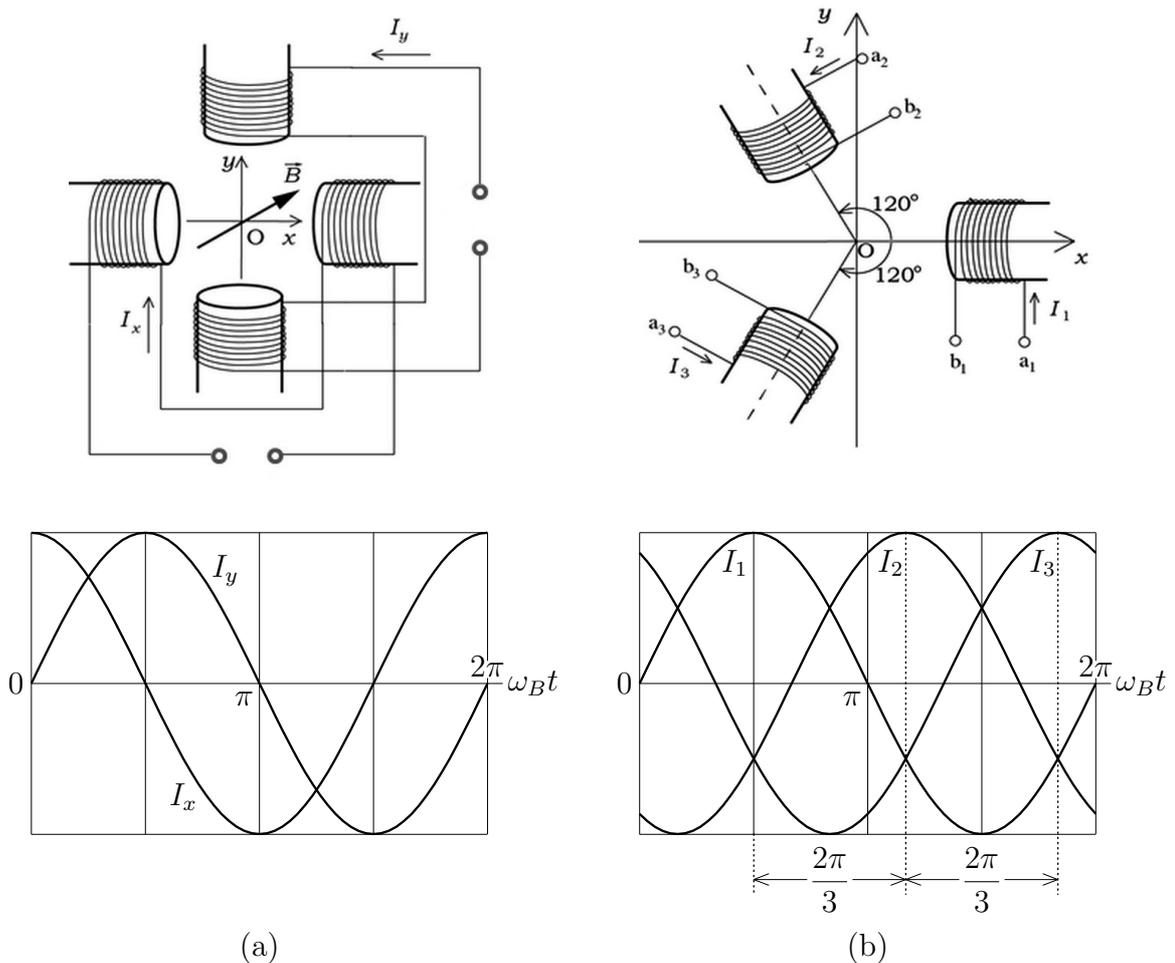


図5

第3問 A (50点)

質量 m の粒子が外力の影響を受けずに運動量 \vec{p} で運動している。特殊相対論によると、その粒子のエネルギー E は

$$E = c\sqrt{p^2 + (mc)^2} \quad (1)$$

と表される。 c は真空中の光速である。この第3問では、式(1)をもとに考える。

静止している粒子では $p = 0$ だから、式(1)は

$$E = mc^2 \quad (2)$$

となる。この式は、静止している粒子でも質量に比例するエネルギーをもつことを表しており、右辺の量は静止エネルギーと呼ばれる。また、 $mc \gg p$ の場合、式(1)は

$$E \cong mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

と近似できる。この右辺第2項はニュートン力学での運動エネルギーである。したがって、この問題では

$$E_K = c\sqrt{p^2 + (mc)^2} - mc^2 \quad (3)$$

を質量が m 、運動量の大きさが p の粒子の運動エネルギーと呼ぶ。

ガンマ線

原子核から放射される高い振動数の電磁波をガンマ線と呼ぶ。例えば、放射性物質であるコバルトの同位元素 ${}^{57}_{27}\text{Co}$ の崩壊に伴って振動数が約 3×10^{19} Hz のガンマ線が出る（可視光の振動数は約 $4 \times 10^{14} \sim 8 \times 10^{14}$ Hz）。

ガンマ線を出す天体現象の観測、コバルト等の放射性物質の検出などのため、ガンマ線源の像を撮るものとして、ガンマ線カメラが開発されている。ガンマ線カメラは、ガンマ線がどちらの方向から来るかを知るための測定器である。そのために、光電効果とコンプトン散乱という電磁波の量子効果が利用されている。

光電効果

金属の表面に電磁波を当てると、金属内に束縛されていた電子が固体の外に「叩き出される」ことがある（図1(a)）。この現象は光電効果と呼ばれ（後に述べる内部光電効果と区別するときには外部光電効果と呼ぶ）、金属外に飛び出した電子は光電子と呼ばれる。光電効果を説明するためにアインシュタインは光量子仮説を導入した。それによると、電磁波は光子とよばれる粒子の集団で、振動数が ν の電磁波を構成する光子のエネルギーを E_γ とすると、この2つの量の間には次の関係がある。

$$E_\gamma = h\nu \quad (4)$$

ここに出てきた h はプランク定数とよばれ、その値は

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

である。この光子1個が金属の電子に吸収されると、 E_γ のうちのある値 W またはそれより大きいエネルギーが金属内に閉じ込められていた電子を金属外に出すのに使われ、残りのエネ

ルギーが電子の運動エネルギーになる。そこで、光電子の運動エネルギーの最大値 E_M と電磁波の振動数 ν との間には

$$E_M = h\nu - W \quad (5)$$

という関係がある。 W は金属の表面によって決まる定数で、仕事関数と呼ばれる。真空中を飛び回る電子の運動エネルギーは式 (3) で与えられるが、その値は正だから、仕事関数が W の金属表面に $h\nu < W$ となる電磁波を当てたのでは光電効果は起きない。

問1 $W = 5.7 \text{ eV}$ の金属表面に可視光を当てると、光電効果は起きるか、起きないか。ここに出てきた eV (電子ボルト) は原子物理学でよく使われるエネルギーの単位で、 $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ である。

問2 光子は質量をもたない。したがって、エネルギーが E_γ の光子の運動量の大きさを p_γ とするとこの2つの量の間関係は、式 (1) で $m = 0$ とすることによって

$$E_\gamma = cp_\gamma$$

と与えられる。波長が λ の電磁波の光子の運動量の大きさと波長の関係を求めよ。

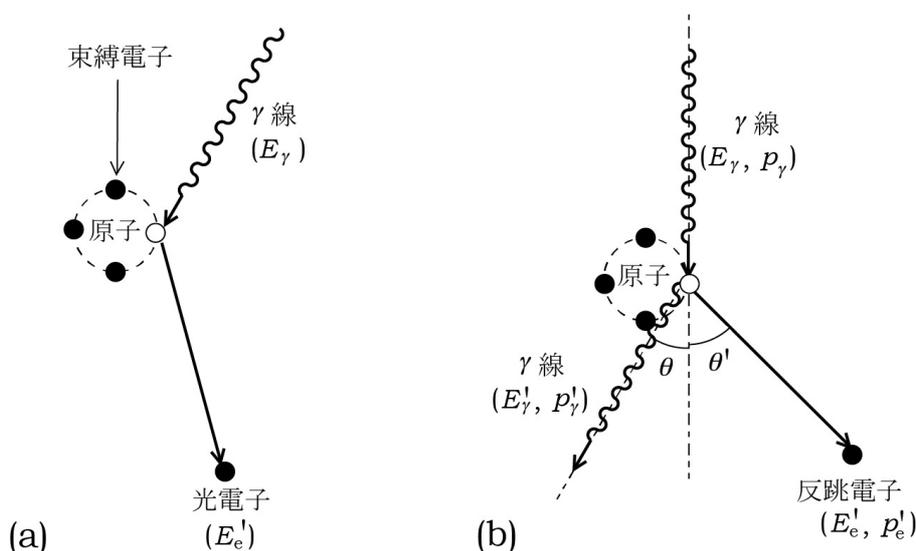


図1

内部光電効果

半導体のうちでも真性半導体と呼ばれるものは、金属と比べて電気伝導度が非常に小さい(抵抗率が非常に大きい)。ところが、これに電磁波を当てると、電流が流れやすくなることが知られている。この場合、電磁波の光子は、原子内に束縛されていた電子を原子の外へ「叩き出し」、叩き出された電子は半導体の中を自由に動き回る。この電子の運動の範囲が半導体内部に限られる場合、この現象は内部光電効果と呼ばれる。半導体の内部を動き回る電子は伝導電子と呼ばれるが、内部光電効果でできる伝導電子も光電子と呼ばれ、その運動エネルギーは m を電子の質量とすると式 (3) で与えられる。

内部光電効果の場合、光電子の運動エネルギーの最大値 E_M と電磁波の振動数 ν との間には、式 (5) によく似た

$$E_M = h\nu - E_g \quad (6)$$

という関係がある。 E_g はエネルギーギャップと呼ばれ、それぞれの半導体に固有な量で、これより小さなエネルギーの光子を半導体に当てても内部光電効果は起きない。

以下のガンマ線カメラの考察で光電効果というときは、内部光電効果をさす。

問3 エネルギーギャップが E_g の真性半導体に振動数が ν の電磁波が入射したとき、光子1個から作られる光電子の運動量の最大値 p_M はいくらか。

コンプトン散乱

光子は物質に吸収されて消滅するだけではなく、荷電粒子と衝突して散乱されることもある。この衝突によって、図1(b)のように、固体の原子に束縛されていた電子が原子の外に飛び出す現象はコンプトン散乱であり、光子に叩き出された電子を反跳電子と呼ぶ。反跳電子の運動エネルギーと運動量の間関係も式(3)で与えられる。ここで考える反跳電子は、半導体内を動き回る伝導電子である。

エネルギー E_γ の光子がエネルギー E_e (静止エネルギーを含まない) の束縛電子と衝突して、運動エネルギー E'_e の反跳電子ができ、光子のエネルギーが E'_γ になったとすると、

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e$$

が成り立つが、入射光子がガンマ線の場合、光子のエネルギー E_γ, E'_γ や反跳電子のエネルギー E'_e と比べて $|E_e|$ は十分小さいので、以下では $E_e = 0$ とする。すると、エネルギー保存則は

$$E_\gamma = E'_\gamma + E'_e \quad (7)$$

と表される。

また、束縛電子の運動量の大きさの平均値 p_e はガンマ線や反跳電子の運動量に比べて十分小さいので、以下では $p_e = 0$ とする。そこで、コンプトン散乱の前後の運動量の間には

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}'_e$$

という運動量保存則が成り立つ。ただし、 $\vec{p}_\gamma, \vec{p}'_e$ および \vec{p}'_γ はそれぞれ、散乱前の光子、散乱後の反跳電子と光子の運動量である。なお、光子の運動量ベクトルの向きは、電磁波が進む向きである。

問4 図1(b)のように入射ガンマ線と散乱ガンマ線の進行方向のなす角を θ とする。散乱後の光子のエネルギー E'_γ と反跳電子の運動エネルギー E'_e のそれぞれを E_γ および θ を用いて表せ。

伝導電子の「増殖」

ガンマ線の場合、光子のエネルギーが非常に大きいため、光電子もコンプトン散乱による反跳電子も非常に大きなエネルギーをもつ。それらのエネルギーの大きな電子は図2(a)に示すように、原子に束縛されている他の電子を次々に叩き出し、最初の反跳電子のエネルギーが多く電子に分配される。電子が叩き出された跡は正孔と呼ばれ、正電荷をもつ粒子のように半導体中を移動する。最終的には、図2(b)のように半導体中に多数の伝導電子と正孔が作られ自由に運動するようになる。このため図2(b)に示すように、半導体に電圧をかければ電流が流れ

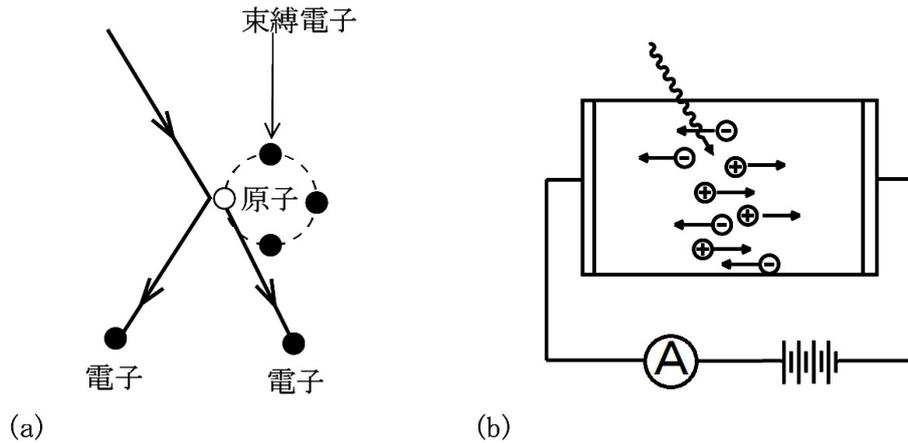


図 2

る。図 2(b) はこの誘起された電流を検出する半導体センサーのモデルである。この電流を検出することによって内部光電効果で吸収された光子のエネルギーやコンプトン散乱でできる反跳電子の運動エネルギーがわかる。

問 5 半導体センサーに 1 対の電子-正孔対を作るのに必要なエネルギーが 0.72 eV であるとする。このセンサーに、エネルギーが 122 keV ($1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$) の光子が吸収され、そのすべてのエネルギーが電子-正孔対を作るのに使われたとすると、光子によって誘起され流れた電気量はいくらか。ただし、電気素量を $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ とせよ。

この問題では、誘起された電流の値から光子のエネルギーが一意的に求まると仮定しているが、実際には理論的に求めることは難しい。そこで、実用上は、予めエネルギーがわかっている光子が入射したときに誘起される電流の大きさを測定することでこの関係を決める。これを検出器の較正という。

図 3 で、グレーの四辺形のそれぞれは、互いに絶縁された半導体センサーを表す。第 1 層のセンサー A に当たった光子はコンプトン散乱され、反跳電子のエネルギー (問 4 の E'_e) はセンサー A に誘起される電流によって計測される。また、A で散乱された後の光子のエネルギーが問 4 の E'_γ であるが、この光子が第 2 層のセンサー B で光電効果を起こして吸収されれば、そのエネルギーはセンサー B に誘起される電流によって計測される。この 2 つのエネルギーの測定値を次の問 6 で導く公式に代入して、センサー A の場所での散乱角 θ が計算できる。

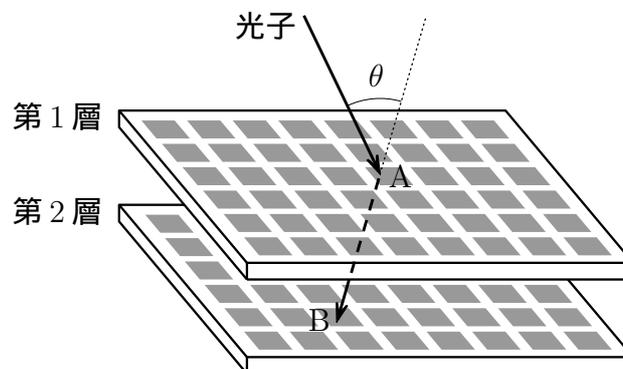


図 3

- 問6 エネルギー保存則 (7) を用いて, 問4の E'_e および E'_γ の測定値から $\cos \theta$ の値を求める式を導け。
- 問7 図3のようにコンプトン散乱が起きた場所 A と光電効果が起きた場所 B が検出され, また問6の $\cos \theta$ が決まったとする。ガンマ線はどの方向からやって来たと考えられるか。予測される結果を円錐の図を使って解答用紙に示し, 簡単な説明も記せ。なお, 図を描くときに必要なら, θ はおよそ 30° 位と仮定せよ (分度器などを使って正確に作図する必要はない)。
- 問8 仮に, 1点から出たガンマ線が常に一定の散乱角 θ で散乱される場合, 問7の考察を参考にすると, 3回の観測によってガンマ線源の方向が特定できる。図4は, 3件のコンプトン散乱がおきた場所 A_1, A_2, A_3 を1点 A に重ねあわせ, そのとき散乱されたガンマ線が検出された場所を B_1, B_2, B_3 としている。この測定の場合, B_1, B_2, B_3 と A の4点が正四面体の頂点の位置にあり, 計算から推定される散乱角 θ が

$$\sin \theta = \frac{B_1O}{AB_1}$$

を満たすことがわかった。以上の条件から, ガンマ線が来た方向を推定せよ。その方法を解答用紙にある図を使って説明せよ。

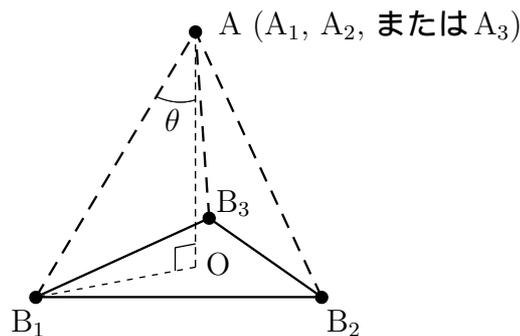


図4

一般には, 多数のコンプトン散乱の現象を検出することで, 多数の予測円錐の底面の辺である円の重なる分布を見て, ガンマ線源の方向分布を観測出来る。このように, ガンマ線カメラによりガンマ線源を観測できるので, ガンマ線カメラはガンマ線を出す放射性元素の位置の計測, 高エネルギー粒子加速器からのガンマ線の測定やガンマ線を放射する天体の観測等に活用されている。

第3問B (50点)

物質を構成する原子の質量は、原子の中心の非常にせまい範囲に集中しており、この部分を原子核と呼ぶ。原子核は質量がほぼ等しい陽子と中性子の2種類の粒子で構成されており(図1参照)、陽子と中性子は総称して核子と呼ばれる。原子核の質量は核子の数、すなわち陽子と中性子の総数でほぼ決まることになるので、原子核内の核子数を「質量数」と呼ぶ。以下では質量数を A で表す。



図1

一方、原子の種類は原子核内の陽子数と等しい軌道電子の数で決まるので、陽子数は「原子番号」と呼ばれる。以下では原子番号を Z で表す。

原子核は球と考えることとして、その半径を R とすると、

$$R = kA^{1/3} \quad (1)$$

の関係がある。 $k = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ である。体積は R^3 に比例するので、この式によると、体積と質量数は比例する。すなわち原子核の密度はその大きさにかかわらず、一定であることがわかる。

ところが原子核の質量 M は、厳密に測ると単独の核子の質量の総和よりも小さい。この差は「質量欠損」と呼ばれる。質量欠損を Δm と表すと、

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M \quad (2)$$

である。ここで、 m_p は陽子1個の質量、 m_n は中性子1個の質量である。

相対性理論によると、質量とエネルギーは等価であり、質量を m 、エネルギーを E とすると、静止した粒子の場合 $E = mc^2$ の関係がある(第3問Aの式(2)参照)。 c は真空中の光速である。したがって、結合状態の原子核の質量が、核子がバラバラの状態よりも小さいということは、エネルギーが小さいということを意味する。エネルギーの差 ΔE は $\Delta E = \Delta m c^2$ と表される。 ΔE を原子核の「結合エネルギー」と呼ぶ。陽子や中性子の間には力が働いており、原子核から核子を引き離すには仕事が必要であり、結合エネルギーはそのために必要な仕事と考えることができる。

さて核子1個あたりの結合エネルギー $\Delta E/A$ を考えよう。これは核子1個を原子核から引き離すために必要な平均的な仕事の大きさであり、原子核の安定度を表す指標と考えられる。

結合エネルギーが、

$$\Delta E = k_1 \cdot f + k_2 \cdot g \quad (3)$$

という形で表されると仮定する。 f, g は、質量数で決まる関数、係数 k_1, k_2 は A, Z によらない定数である。

式(3)の右辺の第1項は、核子同士を直接結びつけている「核力」にかかわる項である。核力は到達距離が短いので、隣同士の核子が結びついていることになる。その結びつきは固体の中の原子のような結合ではなく、液滴内の液体分子同士が分子間力で結びつきながら運動しているイメージとなる。

核子1個を引き離すのに必要な仕事は、その核子と隣接する核子との間の結合をはがす仕事なので、接していない核子の存在は関係ない。すると、全体の結合エネルギーは核子数に比例するので、 $f = A$ である。この項しかなければ、核子1個あたりの結合エネルギーは、 $\Delta E/A = k_1$ ($k_1 > 0$) となり、原子核の大きさにかかわらず一定ということになる。ところが、原子核の表面にある核子は接している核子が少ないので、引きはがしやすい。この補正を考えたのが式(3)の第2項である。 $k_2 < 0$ である。

問1 式(3)の第2項の関数 g を $g = A^n$ と表そう。 g が原子核の表面積に比例すると考えて、 n の値を求めよ。

問2 結合エネルギーの値を MeV (メガ電子ボルト, $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$) という単位で表すと、式(3)の係数は $k_1 = 15.67 \text{ MeV}$, $k_2 = -17.23 \text{ MeV}$ である。質量数 $A = 20, 60, 90, 145, 235$ について核子1個あたりのエネルギー $\Delta E/A$ を式(3)により計算し、なめらかな曲線で結んでグラフを描け。必要なら表1の数値を用いてよい。

A	20	60	90	145	235
$A^{1/3}$	2.7144	3.9149	4.4814	5.2536	6.1710

表1

これまでは核力についてのみ考えていたが、陽子同士の間にはクーロン力による斥力が働く。このため、核子数が同じでも陽子の数が大きいほど結びつきは弱まるので、結合エネルギーは小さくなる。そこで、式(3)にさらに補正項を加えて、

$$\Delta E = k_1 \cdot f + k_2 \cdot g + k_3 \cdot h \quad (4)$$

と仮定する。 $k_3 \cdot h < 0$ である。

問3 h は、質量数 A と原子番号 Z の関数で、 $h = Z^2 A^m$ であると仮定しよう。クーロン力による位置エネルギーは、電荷の積に比例し、すべての核子間の距離の平均値に反比例することから考えると、 h は近似的に原子番号 Z の2乗に比例、原子核の半径の-1乗に比例すると考えられる。このことから m の値を求めよ。

陽子数と中性子数のバランスがよくないと原子核は不安定であり、中性子が陽子に変化して電子と反電子ニュートリノを放出するベータ崩壊 (β^- 崩壊) や、陽子が中性子に変化して陽電子と電子ニュートリノを放出するベータ崩壊 (β^+ 崩壊) が起きる。原子番号20程度までは、陽子数と中性子数がほぼ等しい原子核は安定であることが多い。このことを考慮して、式(4)にさらに補正項を加えて、

$$\Delta E = k_1 \cdot f + k_2 \cdot g + k_3 \cdot h + k_4 \cdot i \quad (5)$$

とする。 $k_4 \cdot i < 0$ である。

第4項の関数 i は、 $i = (A - 2Z)^2 A^{-1}$ と表されることが知られている。この項は量子力学的な考察などから導かれるが、ここでは説明を省く。質量数 A は陽子数 Z と中性子数 N の和

であるから，両者が等しいときこの項は0になる。しかし，原子核が大きくなってくると，式(5)の第3項により陽子数の増加は結合エネルギーを小さくするので，相対的に中性子数が多い方が結合エネルギーが大きく，安定である。

問4 質量数が等しくて，陽子や中性子の数が異なる原子核を同重体という。式(5)の ΔE は Z の関数としてみると2次式であり，極値をもつ。 ΔE を最大とする原子番号 Z の同重体がもっとも安定である。式(5)の係数は $k_3 = -0.714 \text{ MeV}$ ， $k_4 = -23.29 \text{ MeV}$ である。例えば $A = 101$ の同重体を考えて式(5)を Z の関数として表すと

$$\Delta E = -1143 + 93.16Z - 1.076Z^2 \quad (\text{MeV}) \quad (6)$$

となる。 $A = 101$ の同重体の中で，もっとも安定な原子番号を求めよ。

問5 原子番号が問4で求めた原子番号より1少ない原子核は不安定であるため，ベータ崩壊して問4で求めたもっとも安定な原子番号の原子核になる。このとき放出されるエネルギーは何MeVか。なお放出されるエネルギーは β 崩壊で放出される電子の静止エネルギーも含む。

問6 式(5)を使って核子1個あたりのエネルギー $\Delta E/A$ をいくつか計算してみよう。表2に質量数 $A = 20, 60, 90, 145, 235$ に対して計算上もっとも安定な原子番号と元素記号を与える。表2に与えた A, Z の原子核について核子1個あたりのエネルギー $\Delta E/A$ を計算し，なめらかな曲線で結んでグラフを描け。なお表2の $A^{1/3}$ の数値と $\frac{k_4 \cdot i}{A} = -23.29 \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2$ の値(単位 MeV)を用いて，表を埋めながら計算するとよい。

A	20	60	90	145	235
Z	9	27	39	60	91
元素記号	F	Co	Y	Nd	Pa
$A^{1/3}$	2.7144	3.9149	4.4814	5.2536	6.1710
問2の答(1)					
$\frac{k_3 \cdot h}{A}$ (2)					
$\frac{k_4 \cdot i}{A}$ (3)	-0.233	-0.233	-0.414	-0.692	-1.185
$\frac{\Delta E}{A}$ (1)+(2)+(3)					

表2

問7 核分裂は大きな原子核が小さな原子核に分かれる現象である。仮に質量数235の原子核($Z = 91$)が2つの原子核に分裂し，ベータ崩壊を繰り返して最終的に質量数が $A = 90$ と $A = 145$ のもっとも安定な原子核になったとする。この過程でエネルギーが放出されることを説明し，放出されるエネルギー値(MeV)を求めよ。