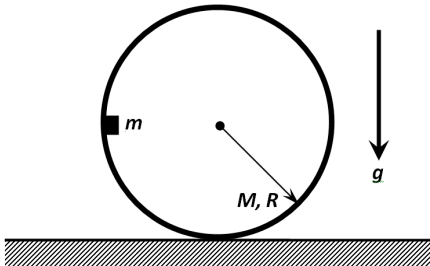


**Problem 1 (9 points)**

この問題は独立な3つの設問からなる。

**Part A (3 points)**



質量  $m$  の小物体を、質量  $M$ 、半径  $R$  の中空の円柱の内面に静かに置く。はじめ、円柱は水平面上に静止していて、小物体は左図に示すように、水平面から高さ  $R$  の位置にある。小物体が最下点を通る瞬間に、小物体と円柱の間に働く力の大きさ  $F$  を求めよ。ただし、小物体と円柱の内面の間には摩擦がなく、円柱は水平面上を滑ることなく運動する。重力加速度の大きさは  $g$  である。

**Part B (3 points)**

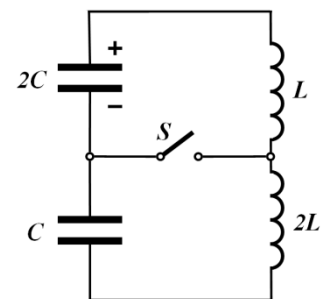
内部に2原子分子理想気体の入った、半径  $r = 5.00 \text{ cm}$ 、厚さ  $h = 10.0 \text{ }\mu\text{m}$  のシャボン玉が真空中にある。シャボンの膜の表面張力は  $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}$  であり、密度は  $\rho = 1.10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  である。

- 1) シャボン玉内の気体を、シャボン玉が力学的に平衡を保つように十分ゆっくり加熱する。このときの、気体のモル比熱を表す式を求め、さらに、その値を計算せよ。
- 2) シャボンの膜の熱容量はシャボン玉内の気体の熱容量よりも十分に大きいという仮定の下で、シャボン玉の半径が微小振動するときの角振動数を表す式を求めよ。また、その値を計算せよ。ただし、振動の周期と比べてシャボン玉内の気体が熱平衡に達するのに要する時間は十分に小さいものとする

ヒント：ラプラスは、液体と気体が接触する曲面では、その内部と外部の間に表面張力により圧力差  $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$  が生じることを示した。

**Part C (3 points)**

はじめ、右図の回路においてスイッチ  $S$  は開いている。容量  $2C$  のコンデンサーが電荷  $q_0$  を蓄え、容量  $C$  のコンデンサーが帯電せず、自己インダクタンス  $L$  と  $2L$  の2つのコイルに電流が流れていない状態から、コンデンサーが放電を始め、コイルに流れる電流の大きさが最大になった。この瞬間にスイッチ  $S$  を閉じる。その後、スイッチ  $S$  を流れる電流の最大値  $I_{\text{max}}$  を求めよ。



**Problem 2. ファンデルワールスの状態方程式 (11 points)**

よく知られた理想気体のモデルでは、状態方程式はボイル・シャルルの法則に従うが、実際には以下の重要な物理的効果を見逃している。まず、実在気体における分子は有限の大きさを持つ。また、分子間の相互作用は無視できない。

この問題では、1モルの水を考えよう。

**Part A. 実在気体の状態方程式(2 points)**

分子のサイズが有限であることのみを考慮すると、気体の状態方程式は次の形をとる。

$$P(V - b) = RT, \tag{1}$$

ここで $P, V, T$ はそれぞれ気体の圧力、体積、温度を表す。 $R$ は気体定数であり、 $b$ は排除されるある体積を表す定数である。

**A1**  $b$  を、分子（以後すべて球形と仮定する）の直径 $d$ を用いて近似的に式で見積もれ。 **(0.3 points)**

ファンデルワールスは、分子間の引力を考慮して、物質の気体状態、液体状態ともによく記述する次の状態方程式を導いた。

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \tag{2}$$

ここで $a$ はもう一つの定数である。

ある（後に定義される）臨界値  $T_c$  以下の温度  $T$  においては、(2) 式で記述される等温線は図 1 の曲線 1 に示すように単調でない曲線となり、これはファンデルワールス等温線と呼ばれている。また同じ図で、曲線 2 は同じ温度での理想気体の等温線を示している。実際に等温の環境で測定を行うと、ファンデルワールス等温線と異なり、ある圧力  $P_{LG}$  においては等圧の直線部分  $AB$  が得られる。この直線部分は、体積 $V_L$ と $V_G$ の間にあり、液体状態（ $L$ と表す）と気体状態（ $G$ とあらず）の相平衡状態を示している。マクスウェルは熱力学第2法則を用いて、圧力 $P_{LG}$ は図のIとIIの面積が等しくなるという条件で決定されることを示した。

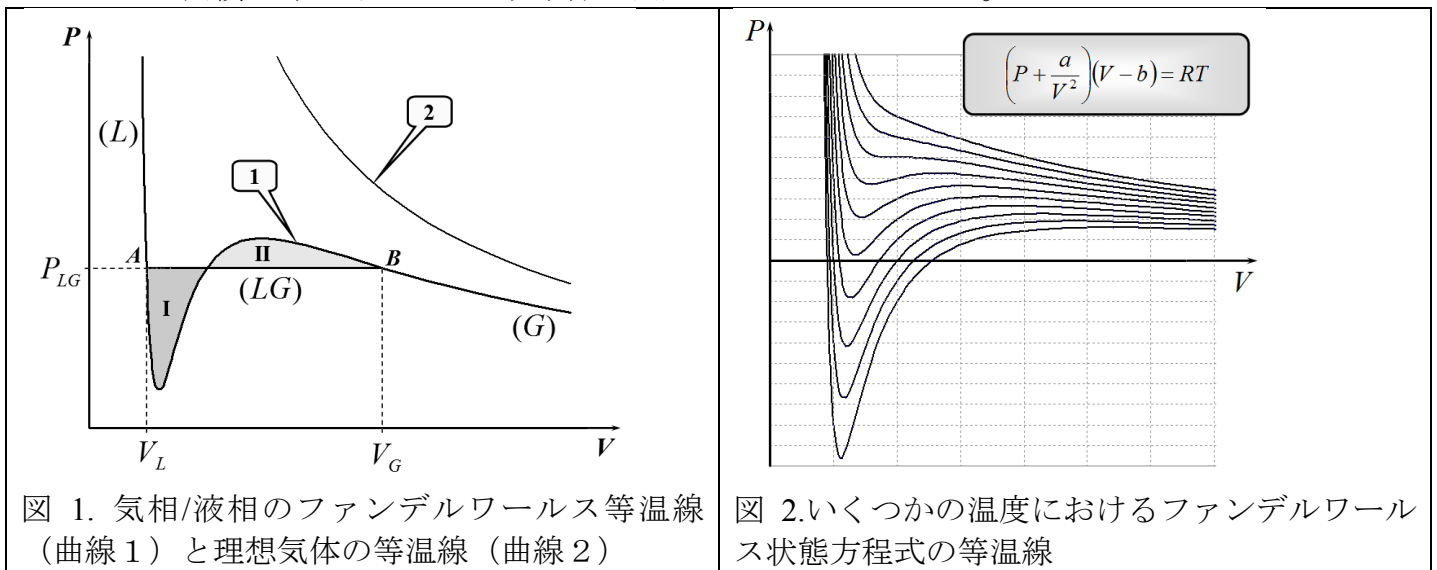


図 1. 気相/液相のファンデルワールス等温線（曲線 1）と理想気体の等温線（曲線 2）

図 2. いくつかの温度におけるファンデルワールス状態方程式の等温線

温度を上げていくと、等温線における直線部分 $AB$ は短くなっていく。そして、温度 $T_c$ 、その時の圧力 $P_{LG} = P_c$ まで達すると、この部分は消失してしまう。パラメータ $P_c$ と $T_c$ はそれぞれ臨界温度、臨界圧力と呼ばれ、高い精度で実験的に測定されている。

<b>A2</b>	ファンデルワールス方程式における定数 $a$ および $b$ を, $T_c$ と $P_c$ を用いて表せ。 <b>(1.3 points)</b>
<b>A3</b>	水においては, $T_c = 647 \text{ K}$ と $P_c = 2.2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ である。水に対する上記の定数 $a_w$ と $b_w$ の値を計算せよ。 <b>(0.2 points)</b>
<b>A4</b>	水分子の直径 $d_w$ の値を計算せよ。 <b>(0.2 points)</b>

**Part B. 気体と液体の性質 (6 points)**

このパートでは、 $T = 100\text{ }^\circ\text{C}$ における水の気体状態・液体状態の性質を考える。この温度における飽和蒸気圧は  $p_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5\text{ Pa}$ である。また水分子のモル質量は  $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mole}}$ である。

**気体状態の考察**

気体状態における水、つまり水蒸気の性質を記述する際は、不等式  $V_G \gg b$  が成り立つとしてよいであろう。

<b>B1</b>	気体状態の体積 $V_G$ に対する式を導き、 $R, T, p_0, a$ で表せ。 <b>(0.8 points)</b> 近似的表式として理想気体の状態方程式を用いると、上とほとんど同じ体積 $V_{G0}$ が得られる。
<b>B2</b>	分子間力の影響による相対的な気体の体積減少率 $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$ をパーセントで求めよ。 <b>(0.3 points)</b>

系の体積が  $V_G$  より小さくなると、気体は凝縮をし始める。しかし、完全に純粋な気体では、気体は臨界値  $V_{Gmin}$  に達するまで力学的な準安定状態（過冷却水蒸気と呼ばれる）にとどまる。

一定温度において、過冷却水蒸気における力学的準安定状態の条件は以下のようにあらわされる:  $\frac{dP}{dV} < 0$ .

<b>B3</b>	系が準安定状態にとどまっているような条件のもとで、過冷却水蒸気の体積は何倍まで減少するか、つまり $V_G/V_{Gmin}$ の式を求め、その値を計算せよ。 <b>(0.7 points)</b>
-----------	---

**液体状態の考察**

一方、ファンデルワールス状態方程式で記述される液体状態での水については、不等式  $P \ll a/V^2$  が成り立つとしてよい。

<b>B4</b>	この時、液体の水の体積 $V_L$ を $a, b, R, T$ を用いて表せ。 <b>(1 point)</b> 次の問いからはさらに $bRT \ll a$ という仮定を置き、水の性質を求めてみよう。 <u>もし得られた値がよく知られた文献値と異なっても驚かないこと!</u>
<b>B5</b>	液体の水の密度 $\rho_L$ を $\mu, a, b, R$ の中で必要なものを用いて表し、その値も求めよ。 <b>(0.3 points)</b>
<b>B6</b>	体積膨張率 $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ を $a, b, R$ で表し、その値も求めよ。 <b>(0.6 points)</b>
<b>B7</b>	水の単位質量あたりの蒸発熱 $L$ を $\mu, a, b, R$ の中で必要なものを用いて表し、その値も求めよ。 <b>(1.1 points)</b>
<b>B8</b>	一層の水分子膜を考えて、この膜の表面張力 $\sigma$ の値を求めよ。 <b>(1.2 points)</b>

**Part C. 液体・気体の系(3 points)**

マクスウェルの等面積則とファンデルワールス状態方程式，そして Part B でなされたいくつかの近似を用いると，飽和蒸気圧  $p_{LG}$  が温度  $T$  の関数として次のように書くことができる。

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}, \quad (3)$$

ここで  $A$  と  $B$  は  $a$ ,  $b$  を用いて  $A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1$ ,  $B = -\frac{a}{bR}$  と表せる定数である。

トムソンは，飽和蒸気圧が液体の曲率に依存することを示した。毛細管の構成物質を濡らさない液体（接触角  $180^\circ$ ，つまり表面が図のように半球面となる）を考えよう。毛細管が液体中に浸されると，毛細管の中の液体は表面張力によってある水位だけ下がる（図3を見よ）。

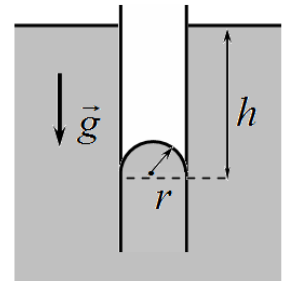


図3.濡らさない液体に浸された毛細管

**C1** 曲がった液体表面（のうち最も下部）のすぐ外側の飽和蒸気圧と，通常の平らな面における飽和蒸気圧のわずかな差  $\Delta p_T$  を蒸気の密度  $\rho_s$ ，液体の密度  $\rho_L$ ，表面張力  $\sigma$ ，そして表面の半球面の半径  $r$  を用いて表せ。 **(1.3 point)**

B3 で考えた準安定状態は，素粒子の追跡に用いられる霧箱など，実際の実験設計で広く利用されている。またこれらは朝露の形成など自然現象にも多くみられる。過冷却蒸気の維持は液滴の形成によって左右される。小さな液滴はすぐに蒸発してしまうが，ある程度大きなものはさらに成長していく。

**C2** ある日の夕方気温が  $t_e = 20^\circ\text{C}$  であり，空気中の水蒸気は飽和していたとする。朝になり，周囲の気温は若干の温度  $\Delta t = 5.0^\circ\text{C}$  だけ下がった。水蒸気の圧力が不変であったという仮定の下，成長していくことのできる水滴の半径の最小値を値で見積もれ。ただし，この問いでは表面張力の文献値  $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$  を用いよ。 **(1.7 points)**

**Problem 3. ガス放電の最も単純なモデル (10 points)**

気体中を電流が流れる現象をガス放電という。ガス放電には、ある種のランプで用いられるグロー放電、溶接に用いられるアーク放電、雲と地球の間の稲妻として生じるスパーク放電など、多くの種類がある。

**Part A. 自己持続的でないガス放電 (4.8 points)**

このパートでは、いわゆる「自己持続的でないガス放電」を扱う。このような場合、放電を持続させるためには外部からイオン化を行う装置が必要である。ここでは、イオン化装置は単位体積・単位時間あたり  $Z_{\text{ext}}$  組の電子と一価の陽イオンを、空間的に一様に生み出すものとする。

イオン化装置のスイッチを入れると、電子と陽イオンの個数は増えはじめる。しかし、気体中の電子とイオンの数密度が限りなく増えることはない。これは、電離した自由電子とイオンが再び結合して中性原子に戻る再結合という現象が起きるためである。気体中で単位体積・単位時間あたり生じる再結合の回数  $Z_{\text{rec}}$  は、

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i$$

で与えられる。ここで、 $r$  は再結合係数とよばれる定数であり、 $n_e$  と  $n_i$  はそれぞれ電子とイオンの数密度を表す。

時刻  $t = 0$  において、気体中の電子とイオンの数密度がともにゼロである状態から、イオン化装置のスイッチを入れる場合を考える。このとき、時刻  $t$  における電子の数密度  $n_e(t)$  は、

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt$$

で与えられる。ここで、 $n_0, a$  および  $b$  はある定数であり、 $\tanh x$  は双曲線関数である。

**A1**  $n_0, a, b$  を  $Z_{\text{ext}}$  と  $r$  を用いて表せ。 (1.8 points)

次に、イオン化装置が 2 つある場合を考える。電子とイオンの数密度がゼロの状態から 1 つ目の装置のスイッチを入れると、十分長い時間が経ったのちに数密度は平衡値

$n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  に達した。同様の操作を、同じく数密度がゼロの状態から 2 つ目の装置について行くと、平衡値は  $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  となった。

**A2** 電子とイオンの数密度がゼロの状態から 2 つのイオン化装置のスイッチを同時にオンにすると、平衡に達したときの  $n_e$  の値を求めよ。 (0.6 points)

**注意!** パート A の以下の問題では、イオン化装置のスイッチをオンにしてから十分長い時間が経過し、すべての過程が時間によらず定常になっているものとせよ。また、電離によって生じた電子やイオンが作る電場は無視せよ。

面積  $S$  の 2 枚の導体板が距離  $L \ll \sqrt{S}$  を隔てて平行に配置されており、それらの間にある筒に気体が満たされているとする。2 枚の導体板には電圧  $U$  が印加され、筒の内部に電場を作っている。電子とイオンの数密度は、この筒の内部で一様であるとする。

電場  $E$  により、すべての電子(下付きの添字  $e$  で表す) と一価のイオン(下付きの添字  $i$  で表す) は、

$$v = \beta E$$

で与えられる共通の速さ  $v$  を得るものとする。ここで、 $\beta$  は電荷移動度とよばれる定数である。

**A3** 筒内部の電流  $I$  を  $U, \beta, L, S, Z_{\text{ext}}, r$  および素電荷  $e$  を用いて表せ。 (1.7 points)

**A4** 印加電圧が十分小さいとき、気体の抵抗率  $\rho_{\text{gas}}$  を  $\beta, L, Z_{\text{ext}}, r$  および  $e$  を用いて表せ。 (0.7 points)

**Part B. 自己持続的なガス放電 (5.2 points)**

このパートでは、筒内部を流れる電流が外部からの操作なしで流れるようになる（すなわち、放電が「自己持続的」なものへと移行する）過程を考える。

注意! このパートでは、イオン化装置は常に一定の割合  $Z_{\text{ext}}$  でイオン化を行うものとする。また、前のパートと同様、電子やイオンが作る電場は考えない。このとき、電場は筒内部で一様になる。また、再結合の効果は無視できるものとする。

自己持続的なガス放電においては、前のパートで考慮しなかった 2 つの過程が重要な役割を果たす。

1 つ目は 2 次電子の放出、2 つ目が電子なだれである。まず 2 次電子の放出は、電場で加速されたイオンが陰極に衝突することで生じる。放出された電子は、同じく電場によって陽極の方向に移動する。単位時間あたり陰極に衝突するイオンの数  $\dot{N}_i$  に対する、単位時間あたりの放出電子数  $\dot{N}_e$  の比  $\gamma = \dot{N}_e / \dot{N}_i$  を 2 次電子放出係数とよぶ。一方、2 つ目の電子なだれは以下のようにして生じる。電場によって加速され、十分な運動エネルギーを得た自由電子は、気体中の原子に衝突してそれらを電離する。こうして生じた電子が再び他の原子を電離することで、陽極方向に移動する自由電子の数はねずみ算式に増加する。

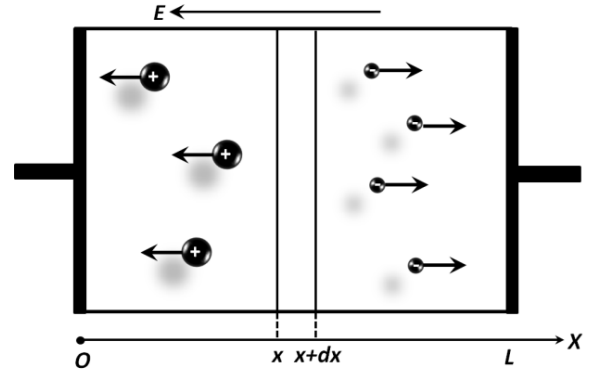
$N_e$  個の電子が距離  $dl$  移動するときに増加する電子の個数  $dN_e$  は、タウンゼント係数  $\alpha$  を用いて

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e$$

で与えられる。

筒の中の気体の任意の部分を通る全電流  $I$  は、イオンによる電流  $I_i(x)$  と電子による電流  $I_e(x)$  の和である。上の図に示すとおり、これら 2 つの成分は、定常状態において座標  $x$  のみの関数となる。電子による  $x$  軸方向の電流  $I_e(x)$  は、定数  $A_1, A_2, C_1$  を用いて以下のように表される：

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2.$$



**B1**  $A_1, A_2$  を  $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$  を用いて表せ。 (2 points)

イオンによる  $x$  軸方向の電流  $I_i(x)$  は、定数  $B_1, B_2, C_2$  を用いて

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x}$$

で与えられる。

**B2**  $B_1, B_2$  を  $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$  を用いて表せ。 (0.6 points)

**B3**  $x = L$  で  $I_i(x)$  が満たすべき条件を書け。 (0.3 points)

**B4**  $x = 0$  で  $I_i(x)$  と  $I_e(x)$  の間に成り立つ関係を書け。 (0.6 points)

**B5** 全電流  $I$  を  $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$  を用いて表せ。ただし、電流が有限の値をとる場合のみ考えればよい。 (1.2 points)

タウンゼント係数  $\alpha$  は定数とする。筒の長さが臨界値  $L_{\text{cr}}$  より大きくなる、すなわち  $L > L_{\text{cr}}$  となる場合、イオン化装置のスイッチを切っても電流は流れ続け、放電は自己持続的になる。

**B6**  $L_{\text{cr}}$  を  $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$  を用いて表せ。 (0.5 points)