

レポート表題

3種類の運動系における理論式導出と
それによる静止摩擦係数のみ動摩擦係数の実験的算出

第1チャレンジ番号:

1	5	4	1	0	0	7
---	---	---	---	---	---	---

(※1)

(※1) 第1チャレンジ番号を必ず記入してください。
第1チャレンジ番号は、6月中旬頃参加申込者の自宅宛に郵送します。

氏名: 末長 祥一

学校名又は^県卒業校名: 倉敷天城高等学校 学 年: 2

学校のある都道府県名: 岡山県 実験をした場所: 学校の物理教室

共同実験者 (共同で実験を行った人がいる場合に記入してください。)

氏名:	学校名・学年:
<u>北濱 駿太</u>	<u>倉敷天城高等学校 2年</u>
<u>川端 佑一郎</u>	<u>〃 1年</u>
<u>小野尾 俊介</u>	<u>〃 2年</u>

実験課題に取り組んだ感想を書いてください。
実験に行き詰るとか「あ、こわい」先生や共同実験者への助言や
協力によるものが大に、無事終了の法でた。また、レポートの執筆は大変
だったが、自分の全力を出して分りやすくしようと努めた。

参加申込み、および実験レポート送付の際には、下のラベルを切り取り封筒に貼って宛名として利用することもできます。

参加申込書送付用ラベル

実験課題レポート提出用ラベル

〒192-0081
東京都八王子市横山町10-2 八王子SIAビル 2F
(株)教育ソフトウェア内
科学オリンピック共通事務局 物理チャレンジ係 行
(参加申込書在中)

〒162-8601
東京都新宿区神楽坂1-3 東京理科大学内
特定非営利活動法人
物理オリンピック日本委員会 行
(実験レポート在中)

3種類の運動系における理論式導出と それによる静止摩擦係数および動摩擦係数の実験的算出

岡山県立倉敷天城高等学校2年 末長 祥一

研究の概要 本研究では、「摩擦角」、「ばねはかり」の2通りの方法によって様々な物体間の静止摩擦係数や動摩擦係数を求め、ニュートン力学では否定される接触面積や湿度、垂直抗力との相関を調べることに、および「オイラーのベルト理論」を利用してプラスチックの円筒と木綿糸の間の静止摩擦係数を求めることを目的とする。また、これら3つの理論の導出も行う。

目次	研究の概要	1
	目次	1
	1 実験の目的	2
	第Ⅰ部 摩擦角を利用した測定	3
	I-2 実験手法	3
	(A) 理論	3
	(B) 実験の趣旨と手順	3
	I-3 実験結果	3
	I-4 考察	4
	第Ⅱ部 ニュートンばねはかりを利用した測定	4
	II-2 実験手法	4
	(A) 理論	4
	(B) 実験の趣旨と手順	5
	II-3 実験結果	6
	II-4 考察	13
	第Ⅲ部 オイラーのベルト理論を利用した測定	13
	III-2 実験手法	13
	(A) 理論	13
	(B) 実験の趣旨と手順	15
	III-3 実験結果	16
	III-4 考察	17
	5 結論	18
	6 参考文献	18
	7 謝辞	18

1 実験の目的

2つの荒い面を持つ物体が互いにそれらの荒い面で接し、その面に対して平行な成分を持つ力が加わる時、それぞれの物体に接触面から「摩擦力 F (Friction force)」が力・合力の平行成分とは反対方向に加わる (Fig.1)。摩擦力はそれら2物体の関係によって「静止摩擦力」と「動摩擦力」に分類される。

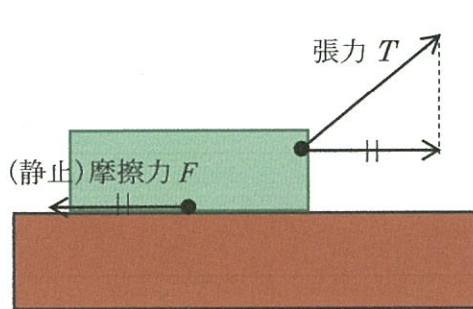


Fig.1 机上の物体に張力 T を加えたが、動かなかったときの摩擦力 (鉛直方向の力は一部省略)

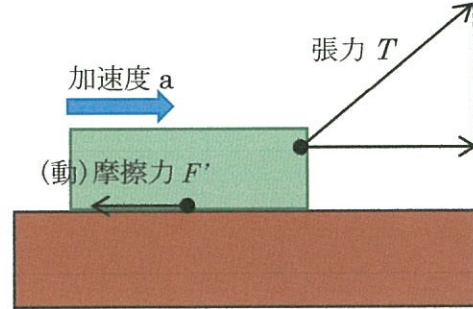


Fig.2 Fig.1 からさらに T を大きくしていくとき、動き出した瞬間の摩擦力 (鉛直方向の力は一部省略)

静止摩擦力は2物体が一体となって運動するときにはたらく。この性質から、静止摩擦力は力のつりあいから求めることができる (Fig.1)。しかし (Fig.2) に示すように、力・合力の接触面平行成分が、ある一定の値を超えると静止摩擦力では一体となる運動を保てなくなり、ずれる運動が始まる。このときの最大となるときの静止摩擦力を「最大静止摩擦力」と呼び、その大きさ F_0 は次の等式で表される。

$$F_0 = \mu N \quad (N \text{ は垂直抗力}) \quad \text{————— (1)}$$

(1)における定数 μ を「静止摩擦係数」と呼ぶ。

また、ずれる運動をするときにも、運動を妨げる向きに摩擦力が働き、動摩擦力と呼ばれる。動摩擦力の大きさ F'_0 は運動内では一定であり、次の等式で表される。

$$F'_0 = \mu' N \quad (N \text{ は垂直抗力}) \quad \text{————— (2)}$$

(2)における定数 μ' を「動摩擦係数」と呼ぶ。

また一般に動摩擦係数は静止摩擦係数より小さく、(3)を満たす。

$$\mu > \mu' \quad \text{————— (3)}$$

本研究では静止摩擦係数の測定を行うことを主な目的とし、湿度や垂直抗力、接触面積を入力変数として、上質紙、糸の静止摩擦係数がどのように変化するかを測定し、考察する。また、各実験で必要となる理論計算は「2 実験手法」の項で述べる。

第 I 部 摩擦角を利用した測定

I-2 実験手法

(A) 理論 (Fig.3)に示すような斜面を用意し、斜角 θ を緩やかに大きくしていく。物体が滑り出す前は、斜面水平方向の力のつりあいにより、(4)が成り立つ。

$$mg\sin\theta = F \quad \text{—————(4)}$$

物体が滑り出す直前の斜面水平方向の力のつりあいは、(4)で $F = \mu mg\cos\theta$ として、

$$mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$$

$$\therefore \mu = \tan\theta \quad \text{—————(5)}$$

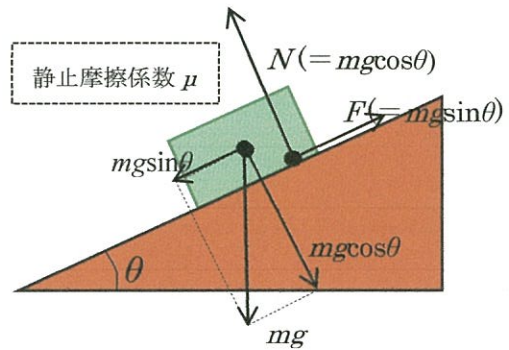


Fig.3 第 I 部 理論

(5)より物体が滑り出すときの角度が分かれば、静止摩擦係数 μ が求まる。この滑り出す角度のことを「摩擦角」と呼ぶ。

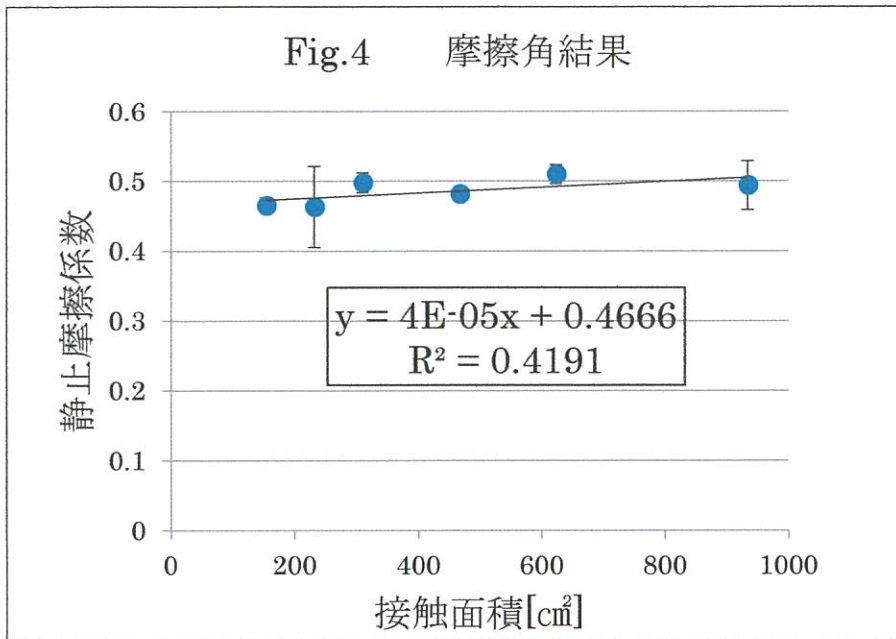
(B) 実験の趣旨と手順

趣旨：摩擦角を利用して、2枚の画用紙の間の静止摩擦係数を求める。また、静止摩擦係数と接触面積との相関を調べる。

- 1.実験の対象として、相似で大きさの違う面を持つ B4(935cm²), A4(624cm²), B5(468cm²), A5(311cm²), B6(233cm²), A6(155cm²)の書籍を用意し、表紙の面に画用紙をセロハンテープで貼り付ける。
- 2.6冊の書籍の質量が等しくなるよう紙を裏表紙側に貼り付ける。
- 3.本を1冊ずつ、画用紙を貼った木の板の上に画用紙同士が合わさるように置き、板の一端が動かないように固定しつつ十分ゆっくりと板を起こす。
- 4.本が滑り出したとき、板の固定点から1.00mのところでの板の高さを測り l とする。
- 5.3.~4.をそれぞれの本について10回ずつ繰り返す。

I-3 実験結果

結果を(Fig.4)に示す。



標準偏差平均
0.023496

I-4 考察

実験はすべて同日に行ったため、天候等の変数は制御されていると言える。

6冊の本の標準偏差の平均が0.023と実験データに対して低いため、今回行った摩擦角を利用した実験の精度は高いと評価できる。グラフに示された誤差棒(エラーバー)の短さからも実験が正確であることが分かる。

また、接触面積と静止摩擦係数との関係については今回の実験だけでは相関があるとは言えない。しかし、接触面積が大きくなると静止摩擦係数も微増する関係が見受けられ、接触面積が大きくなると静止摩擦係数が大きくなるという関係性がある可能性が示唆された。今後さらに面積の大きい実験対象を用いることによってデータを収集することが必要である。

第II部 ニュートンばねはかりを利用した測定

II-2 実験手法

(A) 理論 (Fig.5)に示す装置において、ニュートンばねはかり(以下ばねはかり)を左向きに一定の力 F で引くと、ばねはかりが伸び(①)、ある一定の伸びの時に物体Aが動き出し、ばねはかりが急激に縮む(②)。バネは縮んで伸びが極小となり(③)、物体Aは③の状態でも静止していないために、その後等速直線運動を始める(④)。

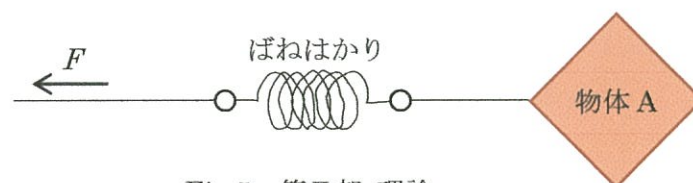


Fig.5 第II部 理論

①～②の間は物体に静止摩擦力が働いており、④では動摩擦力が働いている。
ばねはかりの示す値はばねはかりの伸びに比例するので、横軸に時間を、縦軸にばねはかりの示す値をとれば、(Fig.6)に示すようなグラフが得られる。②、④のときの値をグラフから読み取り垂直抗力で割れば、それぞれ静止摩擦係数と動摩擦係数が得られる。

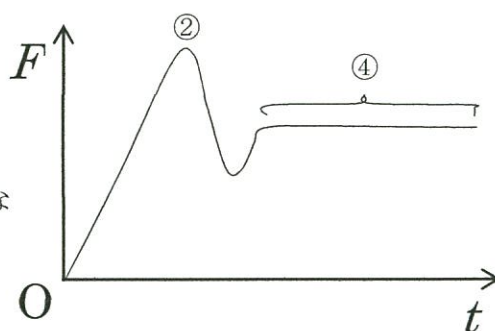


Fig.6 第Ⅱ部 仮説としてのグラフ

(B) 実験の趣旨と手順

実験Ⅱ－① 趣旨：手でばねはかりを引き、定性的に静止摩擦係数と動摩擦係数を求める

- 1.(Fig.7)に示すような装置を組む。(Fig.5)でいう物体 A には 13cm×13cm の段ボールを使用した。
- 2.手でばねはかりをほぼ一定の十分弱い力で引き、系の運動の様子を動画に撮影する。
(ばねはかりが動画の範囲から外れないよう、系の運動に影響を与えないよう注意した上で台車に乗せて平行移動させながら撮影した。)
- 3.動画をコンピュータでコマ送り再生し、ばねはかりの示す値をコマ毎に読み取った。

(1 コマは $\frac{1}{30}$ s を表す)



Fig.7 実験Ⅱ－① 実験装置



Fig.8 実験Ⅱ－② 実験装置

実験Ⅱ－② 趣旨：実験Ⅱ－①の精度を高めて、空気中の湿度と静止摩擦係数および動摩擦係数の相関を調べることを目的とし、回転台でばねはかりを引く

- 1.(Fig.8)に示すような装置を組む。(Fig.5)でいう物体 A には重さ 97.77gW の木材とおもりを使用した。また実験は(Fig.9)に示す密閉空間で行った。この密閉空間内で湿度を変化させ、静止摩擦係数と動摩擦係数の湿度依存性を調べる。
- 2.回転台を回転させ、実験Ⅱ－①と同様に系の運動の様子を動画に撮影する。ただ



Fig.9 実験に使用した密閉空間

し、動画の撮影は回転台を回転させ始める 2 秒前から行う。

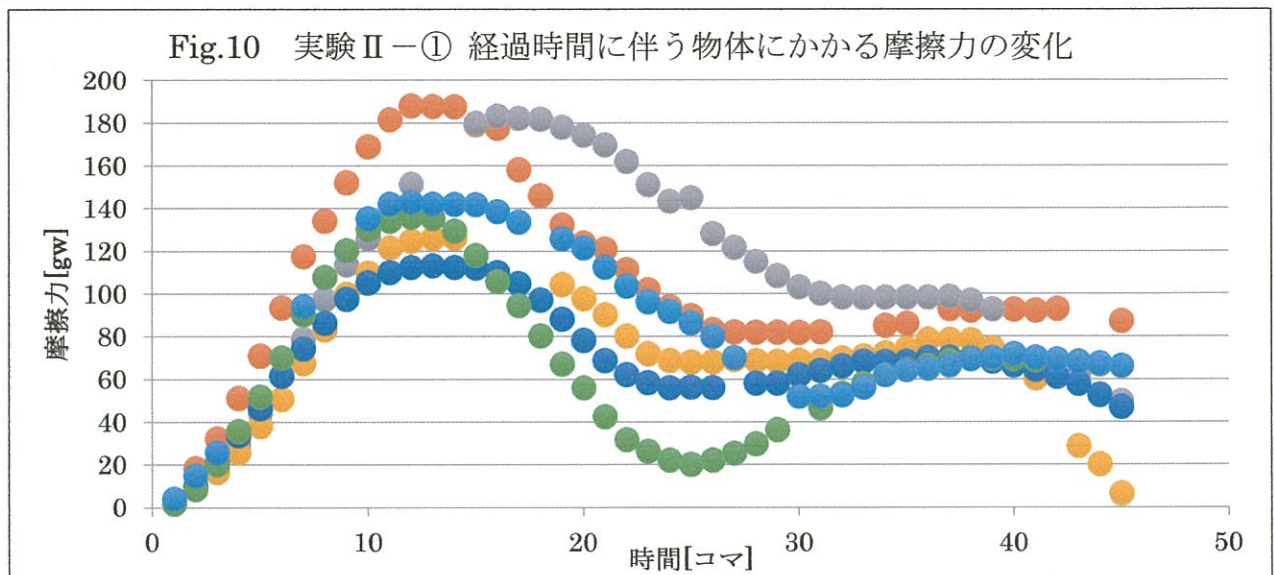
3.実験Ⅱ－①と同様のデータの処理を行う。

- 実験Ⅱ－③** 趣旨：実験Ⅱ－②を木材の質量を変えて行い、ニュートン力学ではないとされている、質量ひいては垂直抗力の大きさと静止摩擦係数および動摩擦係数との間の相関を探る
- 1.(Fig.8)に示すような装置を組む。(Fig.5)でいう物体 A には実験Ⅱ－②と同じ、重さ 87.77gW の木材に 0～9 個のおもり (10gW) を乗せたものを使用した。
 - 2.実験Ⅱ－②と同様に測定を行う。
 - 3.実験Ⅱ－①、Ⅱ－②と同様のデータの処理を行う。

Ⅱ－3 実験結果

実験Ⅱ－①～Ⅱ－③で得られたデータを (Fig.10) ～ (Fig.28) のグラフに示す。

〈実験Ⅱ－①〉



※系列は一連の物体の運動を表す。

※湿度との相関も調べたが、(Fig.10)のように実験法そのものにばらつきが見られ、相関が得られなかったのを省略した。

〈実験Ⅱ－②〉 (Fig.11)から (Fig.16)に湿度が 43～67%のときの 10 回の試行のデータの平均の経時推移を示し、標準誤差をエラーバーで示す。

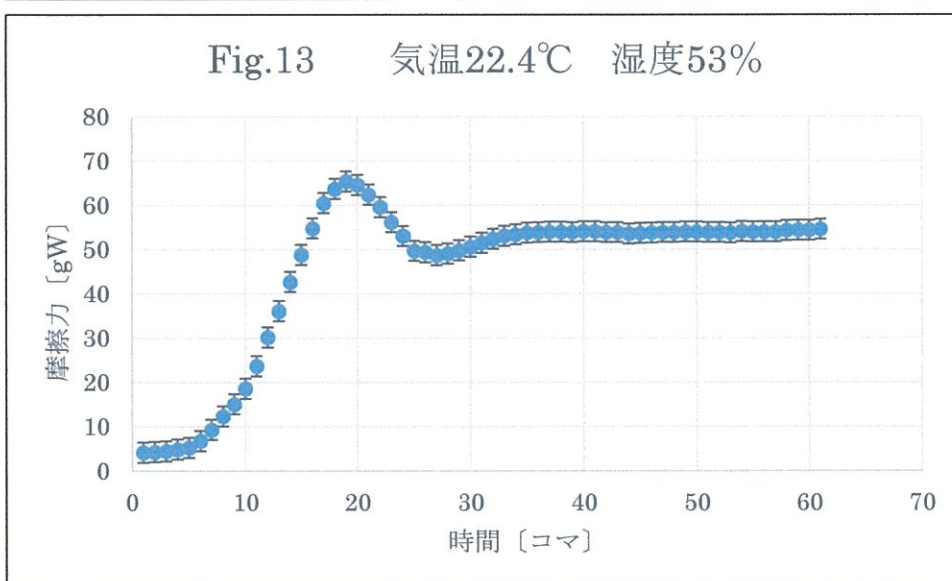
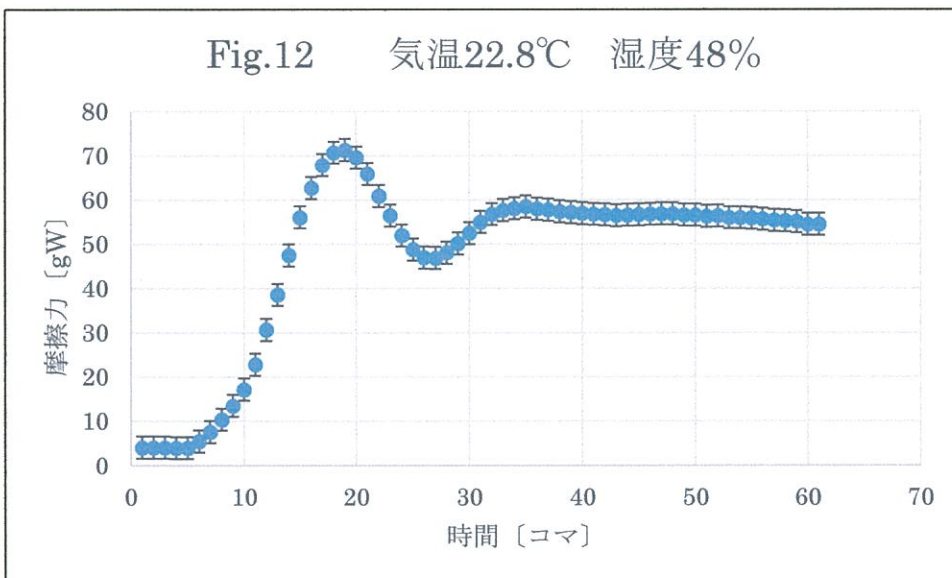
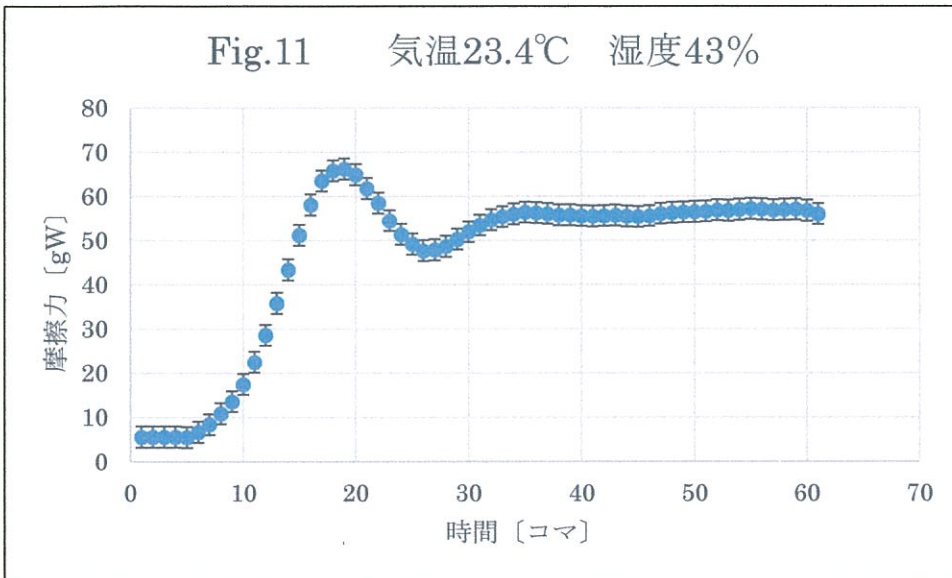


Fig.14 気温23.2℃ 湿度59%

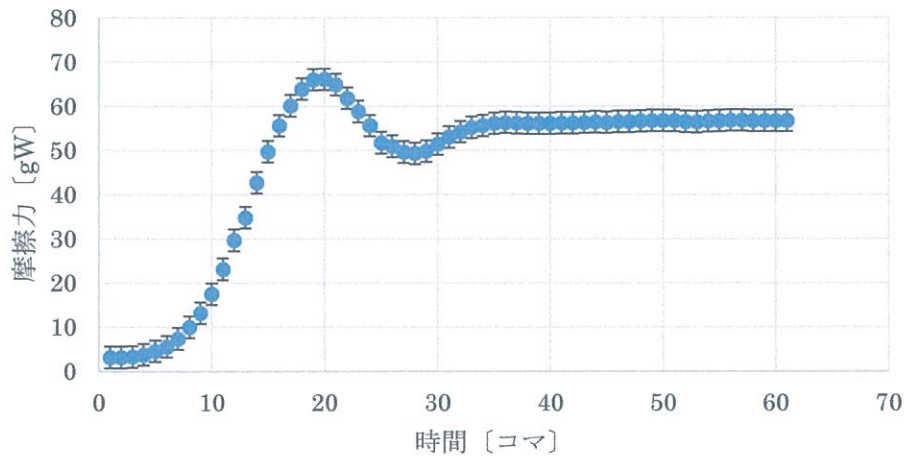


Fig.15 気温22.7℃ 湿度64%

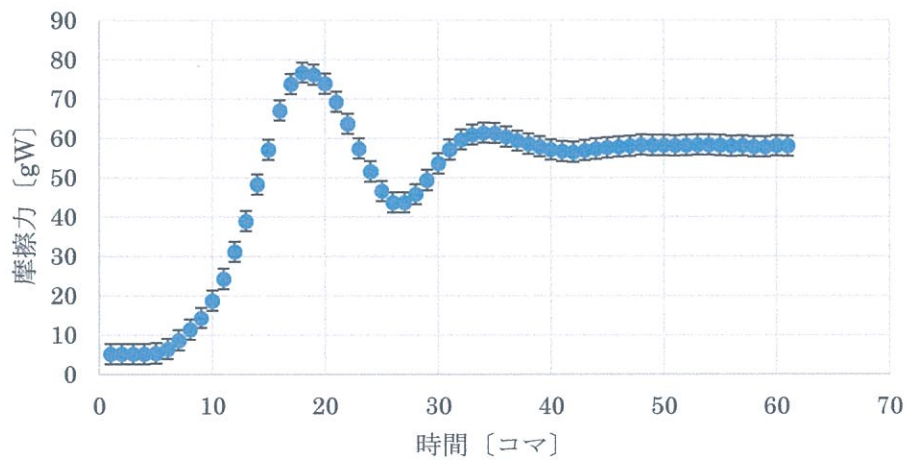
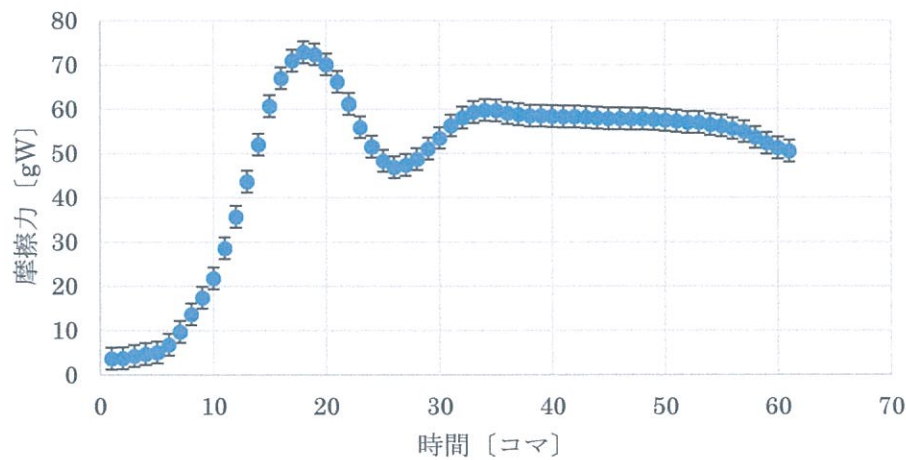
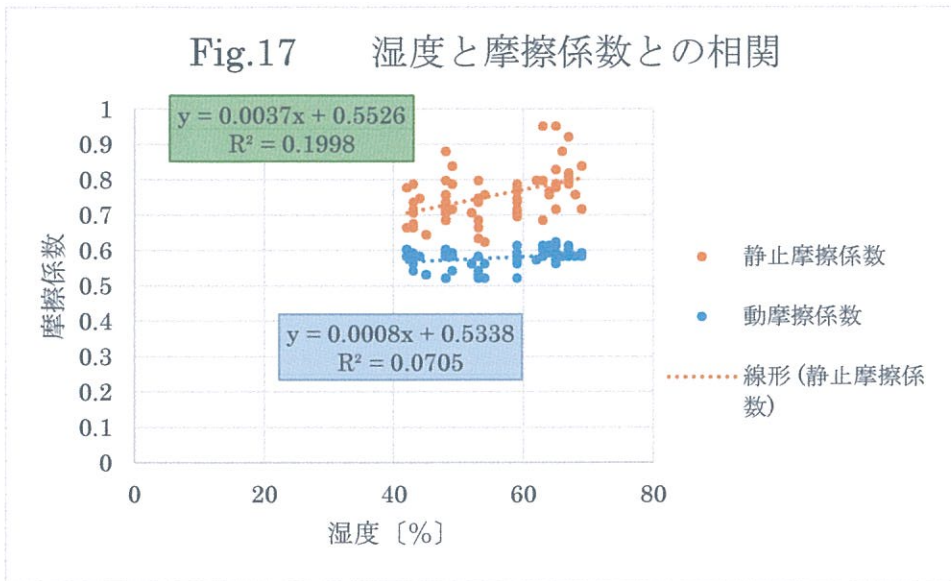


Fig.16 気温22.8℃ 湿度67%



計 60 回のデータと静止摩擦係数，動摩擦係数から得られた散布図を (Fig.17) に示す



(実験Ⅱ－3) (Fig.18)～(Fig.27)におもりが各個数のときの 10 回の試行のデータの平均の経時推移を示し，標準誤差をエラーバーで示す。

また，それぞれにおいて最大静止摩擦力と動摩擦力を読み取り，それを垂直抗力で割って，静止摩擦係数および動摩擦係数を算出する。

(垂直抗力の大きさは鉛直方向の力のつりあいから物体のおもさに等しいと考える。)

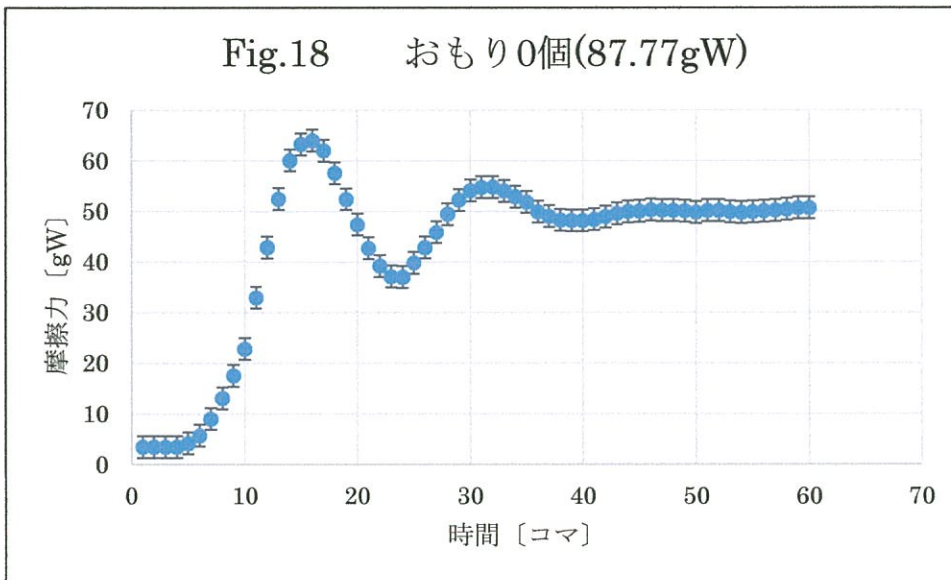
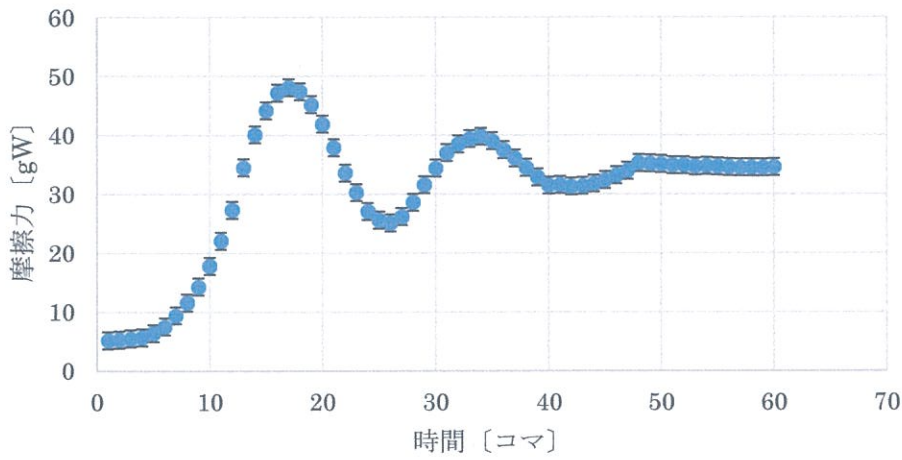


Fig.19 おもり1個(97.77gW)



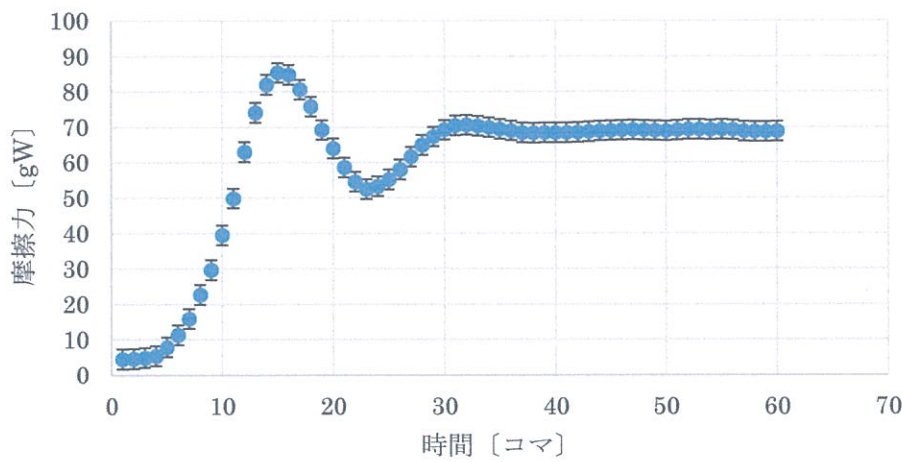
② 48.1gW

④ 34.7gW

$\mu=0.492$

$\mu'=0.355$

Fig.20 おもり2個(107.77gW)



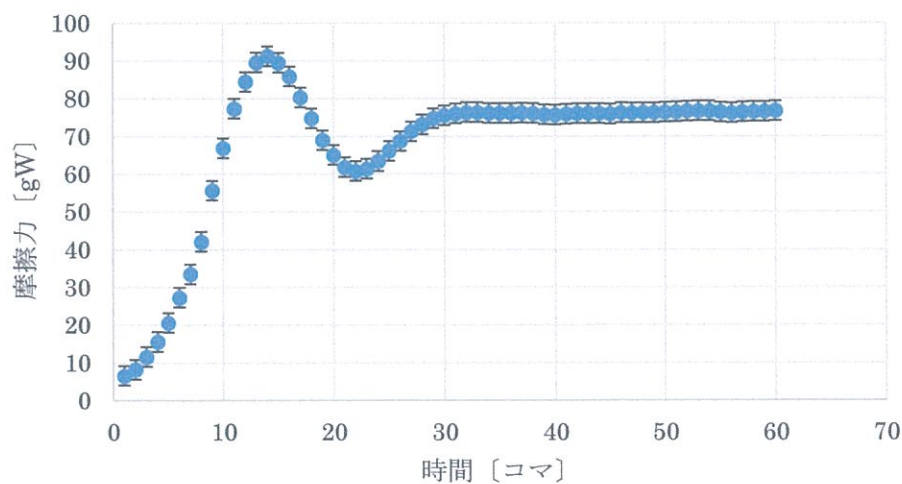
② 85.4gW

④ 69.0gW

$\mu=0.792$

$\mu'=0.640$

Fig.21 おもり3個(117.77gW)



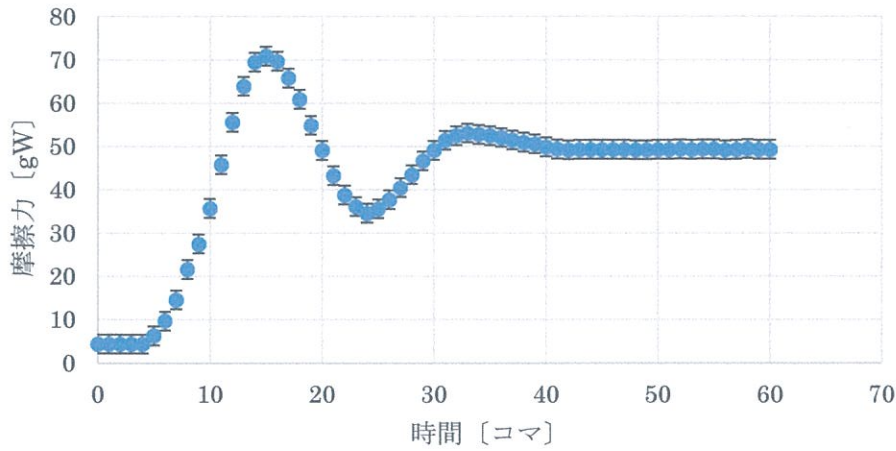
② 89.5gW

④ 76.4gW

$\mu=0.760$

$\mu'=0.649$

Fig.22 おもり4個(127.77gW)



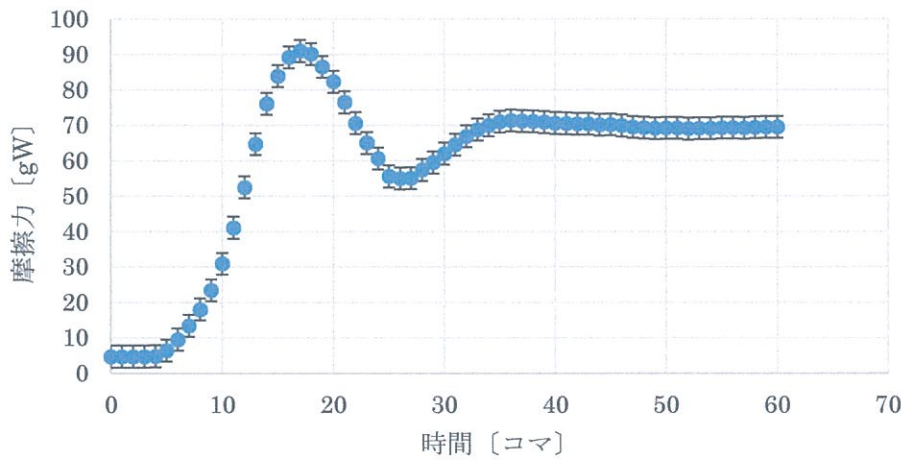
② 70.9gW

④ 49.3gW

$\mu=0.555$

$\mu'=0.389$

Fig.23 おもり5個(137.77gW)



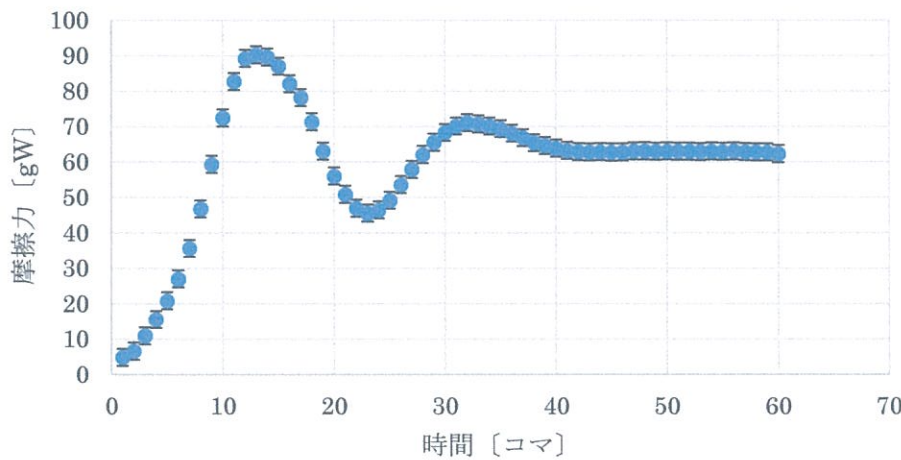
② 91.0gW

④ 69.2gW

$\mu=0.661$

$\mu'=0.503$

Fig.24 おもり6個(147.77gW)



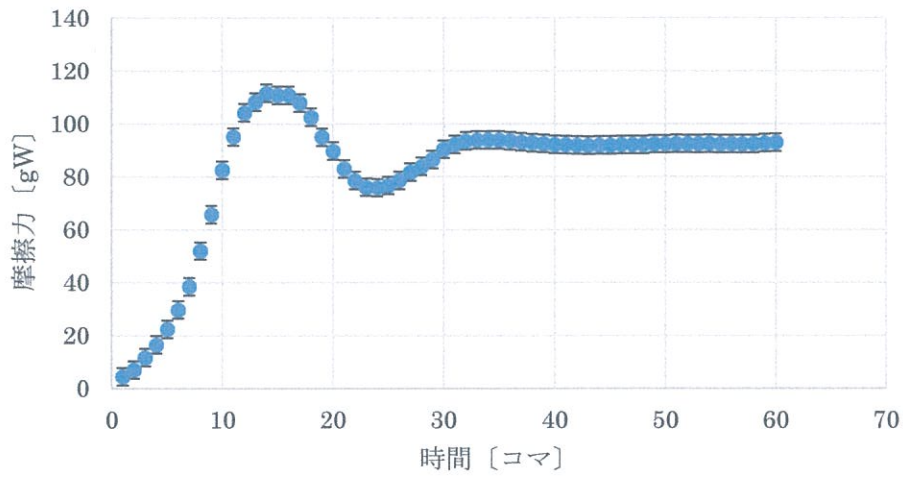
② 90.4gW

④ 63.0gW

$\mu=0.612$

$\mu'=0.426$

Fig.25 おもり7個(157.77gW)



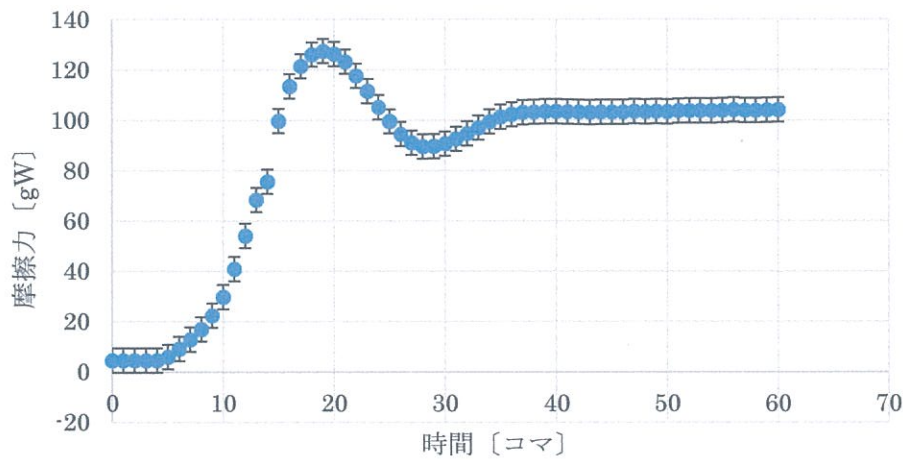
② 110.9gW

④ 92.4gW

$\mu=0.703$

$\mu'=0.586$

Fig.26 おもり8個(167.77gW)



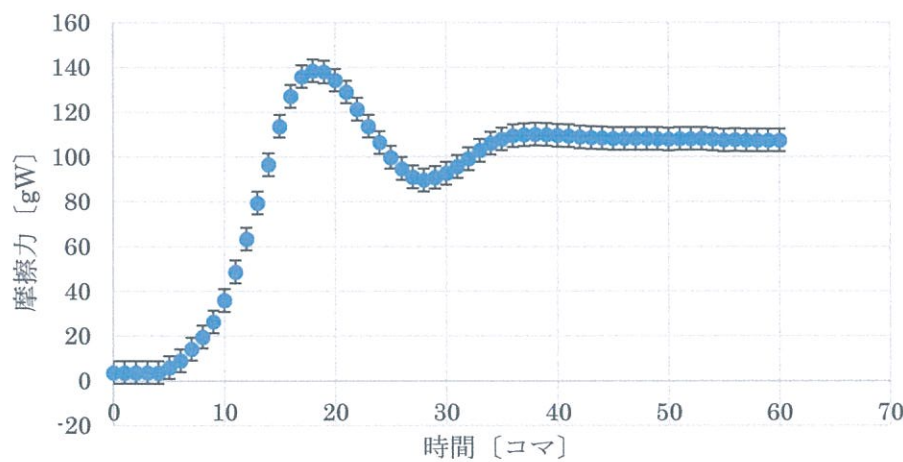
② 126.3gW

④ 103.6gW

$\mu=0.753$

$\mu'=0.618$

Fig.27 おもり9個(177.77gW)



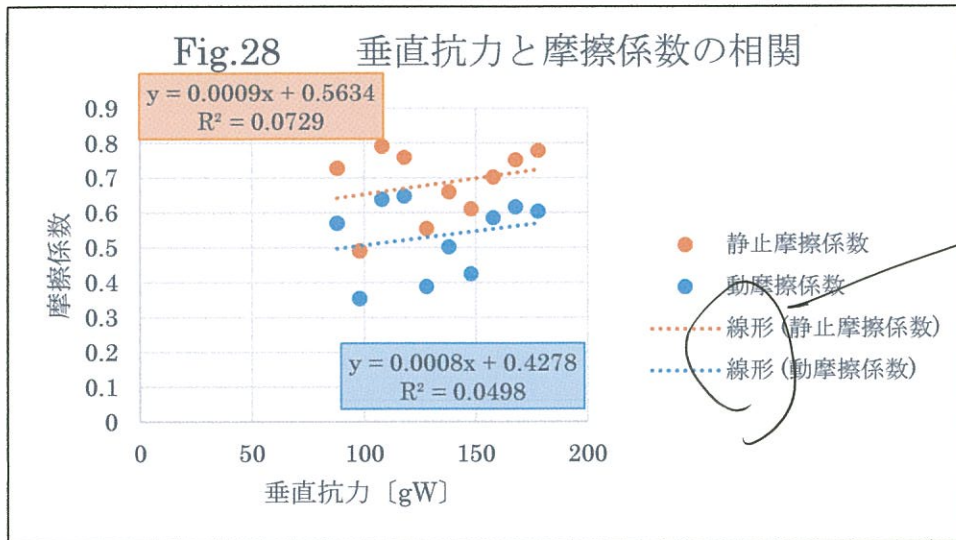
② 138.5gW

④ 107.6gW

$\mu=0.779$

$\mu'=0.605$

上記の結果をもとに、(Fig.28)に垂直抗力の大きさと静止摩擦係数および動摩擦係数の相関を表す。



II-4 考察

ばねはかりを用いて静止摩擦係数および動摩擦係数を測定することができた。

実験II-①においては、手で引く力の大きさに誤差が非常に大きかったと考えられ、実験II-②、II-③では回転台を用いることでより定量的な測定が可能となった。

実験II-②では湿度と摩擦係数と相関を調べた。その結果、静止摩擦係数は湿度が上昇すると大きくなるが、動摩擦係数は湿度に依存性がないことが分かった。物質が空気中の水蒸気を吸着し摩擦係数が大きくなったと考えられるが、どのような理由で静止摩擦係数と動摩擦係数の振る舞いの間に違いが生じたのかは明らかにはできなかった。また、今回は木材と画用紙という吸湿性の高い素材を実験に用いたため、今後吸湿性の低い素材でも同様の結果が得られるかどうかを検証する必要があるであろう。

実験II-③では、垂直抗力と摩擦係数との相関を調べたが、値にばらつきが大きく、静止摩擦係数、動摩擦係数ともに、相関は見られなかった。このことから最大静止摩擦力、動摩擦力を考えるときには、 μ や μ' と N は互いに独立しており摩擦力 F は摩擦係数と垂直抗力双方に比例しており、2乗には比例していないと言え、今回の実験ではニュートン力学の破れを観測することはできなかった。

第III部 オイラーのベルト理論を利用した測定

III-2 実験手法

(A) 理論 (Fig.29)に示すような、動き出す直前の定滑車と糸を考える。

図のように文字をおいたときの、 T と T_0 の関係を導く。

定滑車を正 A 角形と近似する。このとき、辺上に仮想的に小物体を考え(Fig.30)に示すようにさらに文字をおくと、滑り出す直前の力のつりあいにより、

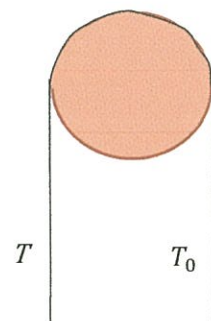


Fig.29 定滑車

$$\text{辺方向} : T_n = T_{n-1} \cos \frac{\theta}{A} + f_n \cos \frac{\theta}{2A} + N_n \sin \frac{\theta}{2A} \quad \text{---(6)}$$

$$\begin{aligned} \text{中心方向} : N_n &= T_n \sin \frac{\theta}{2A} + T_{n-1} \sin \frac{\theta}{2A} \\ &= (T_n + T_{n-1}) \sin \frac{\theta}{2A} \quad \text{---(7)} \end{aligned}$$

(7)を(6)に代入して、さらに $f_n = \mu N_n$ とすると、

$$\frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{\cos \frac{\theta}{A} + \frac{\mu}{2} \sin \frac{\theta}{A} - \sin^2 \frac{\theta}{2A}}{1 - \frac{\mu}{2} \sin \frac{\theta}{A} + \sin^2 \frac{\theta}{2A}}$$

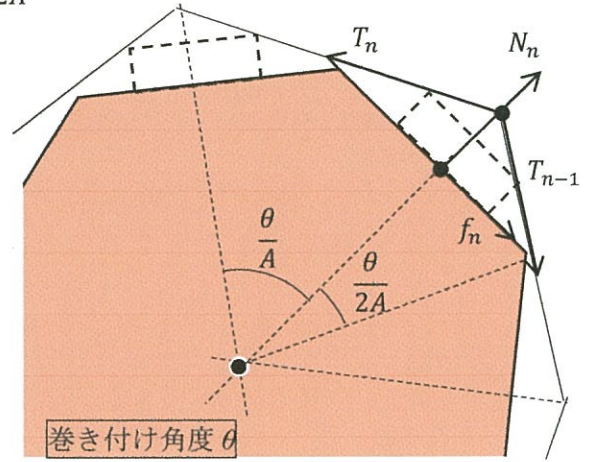


Fig.30 正 A 角形による近似

ここで $\frac{\theta}{A} \rightarrow 0$, $\frac{\theta}{2A} \rightarrow 0$ より、 $\cos \frac{\theta}{A} \rightarrow 1$, $\sin \frac{\theta}{A} \rightarrow \frac{\theta}{A}$, $\sin^2 \frac{\theta}{2A} \rightarrow 0$ と近似でき、

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{T_{n-1}} &= \frac{1 + \frac{\mu\theta}{2A}}{1 - \frac{\mu\theta}{2A}} = 1 + \frac{\frac{\mu\theta}{A}}{1 - \frac{\mu\theta}{2A}} \\ &= 1 + \frac{\mu\theta}{A} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu\theta}{2A}\right)^k \\ &= 1 + \frac{\mu\theta}{A} \quad (\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu\theta}{2A}\right)^k = 1) \\ & (= \text{const.}) \end{aligned}$$

$$\text{よって、} T = \left(\frac{T}{T_n} \times \frac{T_n}{T_{n-1}} \times \frac{T_{n-1}}{T_{n-2}} \times \dots \times \frac{T_1}{T_0} \right) \times T_0$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} T_0 \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{T_k}{T_{k-1}} \right)$$

$$= T_0 \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{T_k}{T_{k-1}} \right)^A$$

$$= T_0 \lim_{A \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mu\theta}{A} \right)^A \quad (A \text{ の値によらず } \frac{T_k}{T_{k-1}} \text{ の値は一定より})$$

$$= T_0 e^{\mu\theta}$$

(ネイピア数の定義より)

よって,
$$T = e^{\mu\theta} \cdot T_0$$

(B) 実験の趣旨と手順

趣旨：オイラーのベルト理論を利用して、プラスチックの円筒と木綿糸との間の静止摩擦係数を算出する。

1. (Fig.31)に示すようにプラスチックのごみ箱と木綿糸、力学用錐体(20gW)、ペットボトル(2L)で装置を組む。
なお、ごみ箱には下側が小さくなっていないものを選ぶ。



Fig.31 第三部 実験装置

(ただし、巻き付け角度 θ は $\pi \sim 4\pi$ まで $\frac{\pi}{2}$ ごとに変

化させる。そのとき、巻き付けは下に示す (Fig.32)

～(Fig.35)のように行い、 2π 以上のときには木綿糸同士が接さないよう配慮する。)

2. 駒込ピペットで少量ずつペットボトルに水道水を入れる。
3. 木綿糸が滑り出したら水道水を加えるのをやめ、ペットボトルを取り外してその重さを量る。
4. 1.～3.を12回行う。
5. オイラーのベルト理論の式から静止摩擦係数を求める。
(木綿糸は吸湿性が高く、実験Ⅱ-②で示したように静止摩擦係数が湿度に依存するので、一回の実験は同日中に終わるものとする。)

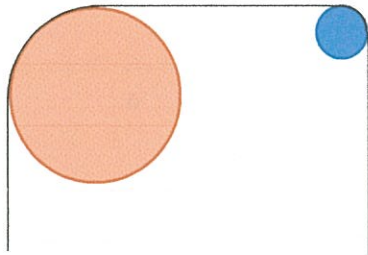


Fig.32 $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ のとき

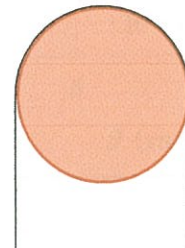


Fig.33 $\theta = \pi + 2n\pi$ のとき

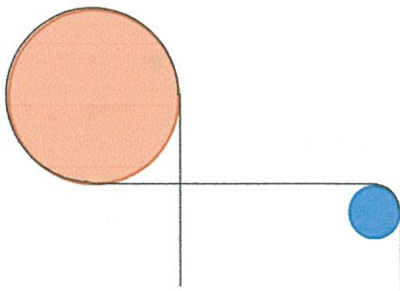


Fig.34 $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ のとき

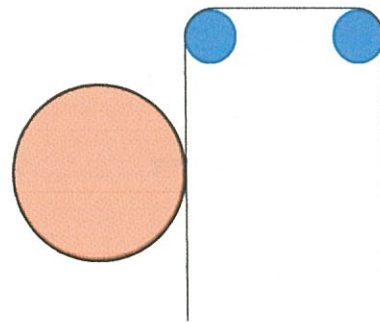


Fig.35 $\theta = 2n\pi$ のとき

つくりと揺れ、 θ が小さく変化し、張力の水平成分も生じることが挙げられる。

静止摩擦係数の値は非常に精度良く求まったが、その一方で $\log T$ 切片の平均は 3.25 であり、 $\log T_0 = 3.00$ とは離れているが、それに対する十分な説明は得られなかった。

5 結論

- ・ 3種類の方法で静止摩擦係数を、そのうち1つでは動摩擦係数を求めることができた。
- ・ 静止摩擦係数は湿度に依存性があり、湿度が上がると静止摩擦係数も増加した。
一方動摩擦係数には湿度依存性はなかった。
- ・ 静止摩擦係数・動摩擦係数はともに、面積・垂直抗力に依存しなかった。
- ・ 曲面に対しても、正多角形近似と極限によって静止摩擦係数を求めることができた。

大きし

6 参考文献

- ・ 数研出版 「物理」
- ・ <http://femingway.com/?p=1511> Femingway 数理エッセイオイラーのベルト理論
- ・ <http://www.jpho.jp/images/pdf/riron2006-a.pdf> 応募理論問題

7 謝辞

本研究を行うにあたり仲達修一氏をはじめとする岡山県立倉敷天城高等学校教諭の方々に研究の方向性、実験の実施、安全確保についての大きな助言を頂いた。また、北濱駿太、川端佑一郎両名をはじめとする共同実験者にも多大な協力を頂いた。ここにこれらに対する感謝の意を表す。