IPhO2015 理論第１問（T1）　【解答】　太陽からの粒子[1]

A　太陽からの放射

A1　ステファン・ボルツマンの法則より，

$$L_\odot = \left(4\pi R_\odot^2\right)\left(\sigma T_s^4\right)$$

$$T_s = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 5.76\times 10^3\,\mathrm{K}$$

A2

$$P_{\mathrm{in}} = \int_0^\infty u(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi h}{c^2}\nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_s}\right)\mathrm{d}\nu$$

ここで，$x = \frac{h\nu}{k_B T_s}$ とすると，$\nu = \frac{k_B T_s}{h}x$ より，$\mathrm{d}\nu = \frac{k_B T_s}{h}dx$

$$P_{\mathrm{in}} = \frac{2\pi h A R_\odot^2}{c^2 d_\odot^2}\frac{(k_B T_s)^4}{h^4}\int_0^\infty x^3\,e^{-x}\,dx = \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3}T_s^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\cdot 6 = \frac{12\pi k_B^4}{c^2 h^3}T_s^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}$$

A3　光子は一個で $h\nu$ のエネルギーを持つから，

$$n_\gamma(\nu) = \frac{u(\nu)}{h\nu} = A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi}{c^2}\nu^2\exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_s}\right)$$

A4　$E \ge E_{\mathrm{g}}$ なるエネルギーを持つ光子のみが電子を励起し，それらの光子は全て $E_{\mathrm{g}} = h\nu_{\mathrm{g}}$ のエネルギーを太陽電池に与えるから，

$$P_{\mathrm{out}} = h\nu_{\mathrm{g}}\int_{\nu_{\mathrm{g}}}^\infty n_\gamma(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

$$= h\nu_{\mathrm{g}}\,A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi}{c^2}\int_{\nu_{\mathrm{g}}}^\infty \nu^2\exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_s}\right)\mathrm{d}\nu$$

$$= k_B T_s x_{\mathrm{g}} A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi}{c^2}\left(\frac{k_B T_s}{h}\right)^3\int_{x_{\mathrm{g}}}^\infty x^2\,e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3}T_s^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}x_{\mathrm{g}}\left({x_{\mathrm{g}}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)e^{-x_{\mathrm{g}}}$$

A5　効率は入射するエネルギーと出力の比であるから，

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{out}}}{P_{\mathrm{in}}} = \frac{x_{\mathrm{g}}}{6}\left({x_{\mathrm{g}}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)e^{-x_{\mathrm{g}}}$$

A6　$\eta(x_{\mathrm{g}}) = \frac{1}{6}\left({x_{\mathrm{g}}}^3 + 2{x_{\mathrm{g}}}^2 + 2x_{\mathrm{g}}\right)e^{-x_{\mathrm{g}}}$

[1] Amol Dighe（TIFR），Anwesh Mazumdar（HBCSE-TIFR）および Vijay A. Singh（前国立科学オリンピック・コーディネーター）が，この問題の責任著者であった。アカデミック委員会，アカデミック発展グループおよび国際役員に大変感謝する。

まず，明らかに $\eta(0) = 0$，$\eta(\infty) = 0$

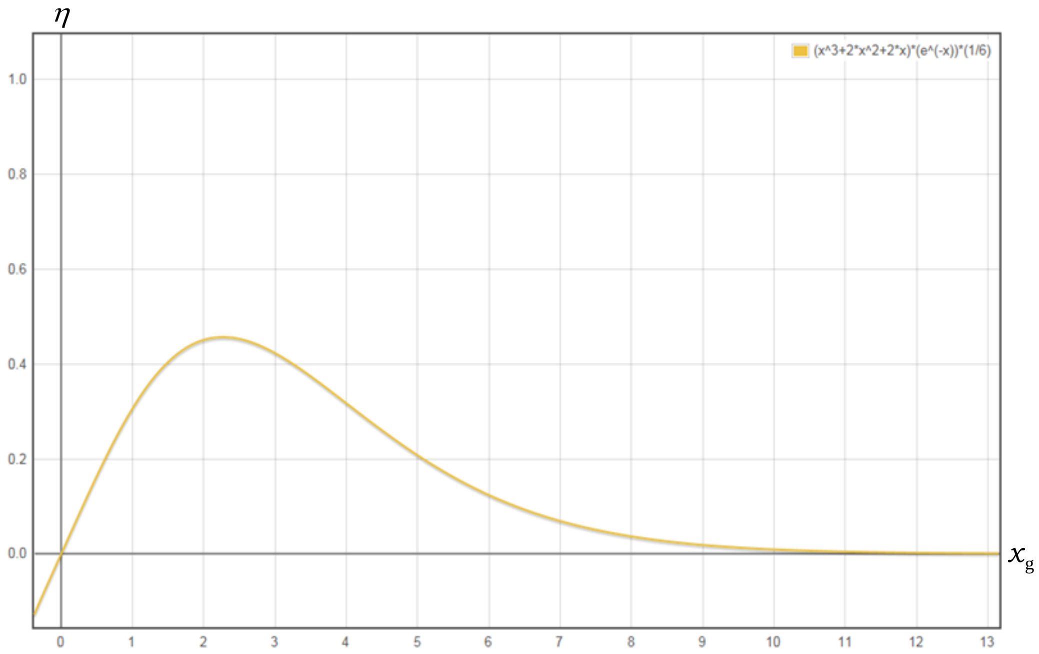
また，多項式部分の係数は全て正であるから多項式部分は単調に増加する。

さらに，指数関数部分は単調に減少する。

したがって，ηはただ一つの最大値をとる。

$$\frac{d\eta}{dx_{\mathrm{g}}} = \frac{1}{6}(-x_{\mathrm{g}}{}^3 + x_{\mathrm{g}}{}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2)e^{-x_{\mathrm{g}}}$$

$$\left.\frac{d\eta}{dx_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}=0} = \frac{1}{3} \qquad\qquad \left.\frac{d\eta}{dx_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}\to\infty} = 0$$



A7　最大値は $\frac{d\eta}{dx_{\mathrm{g}}} = \frac{1}{6}(-x_{\mathrm{g}}{}^3 + x_{\mathrm{g}}{}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2)e^{-x_{\mathrm{g}}}=0$ となるときに与えられる。すなわち、

$$p(x_{\mathrm{g}}) \equiv x_{\mathrm{g}}{}^3 - x_{\mathrm{g}}{}^2 - 2x_{\mathrm{g}} - 2 = 0$$

をみたす x_{g} が x_0 である。

<u>２等分法による数値計算</u>

$$p(0) = -2$$
$$p(1) = -4$$
$$p(2) = -2$$
$$p(3) = 10 \quad \Rightarrow \quad 2 < x_0 < 3$$
$$p(2.5) = 2.375 \quad \Rightarrow \quad 2 < x_0 < 2.5$$
$$p(2.25) = -0.171 \quad \Rightarrow \quad 2.25 < x_0 < 2.5$$

η の最大値を与える x_0 の近似解は，x_0＝2.27

同様の結果を導く他の解法は全て受諾しうる。

$$\eta(2.27) = 0.457$$

A8 $$x_{\rm g} = \frac{1.11\times1.60\times10^{-19}}{1.38\times10^{-23}\times5763} = 2.23$$

$$\eta_{\rm Si} = \frac{x_{\rm g}}{6}\left(x_{\rm g}{}^2 + 2x_{\rm g} + 2\right)e^{-x_{\rm g}} = 0.457$$

A9　中心から半径 $r\sim r+dr$ の球殻の重力の位置エネルギーを考える。この部分が受ける重力は，内側の半径 r の球によるもののみであり，外側の球殻から重力を受けない。（一般に密度と厚さが一定の球殻内部の任意の点において，球殻から重力は働かない。球殻内部の点について，ある微小面積 dS を見込んだとき，その見込み角の反対側の面積部分 dS' との面積比は距離の２乗の比，すなわち，$r^2 : r'^2$ となるが，万有引力は距離の２乗に反比例し，考える部分の体積（いまは厚さ一定なので面積）に比例するので，dS と dS' の部分からの万有引力はつり合う。あとは，すべての部分について積分すればよい。）

微小厚さ dr の球殻の質量 dm は，密度を ρ として，

$$dm = 4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r$$

微小厚さ dr の球殻が持つ重力の位置エネルギー $d\Omega$ は，

$$d\Omega = -\frac{G(\rho\frac{4}{3}\pi r^3)dm}{r}$$

以上より，$\rho = \frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}$ を用いて，

$$\Omega = -\int_0^{R_\odot} G\left(\rho\frac{4}{3}\pi r^3\right)(4\pi r^2\rho)\frac{dr}{r} = -\frac{16\pi^2 G\rho^2}{3}\frac{R_\odot^5}{5} = -\frac{3}{5}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot}$$

A10　重力の位置エネルギーが放射エネルギーに変わっていく。

$$\tau_{\rm KH} = \frac{-\Omega}{L_\odot} = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot} = 1.88\times10^7\text{years}$$

B　太陽からやってくるニュートリノ

B1　ΔE のエネルギーで２個のニュートリノが放出されるので，

$$\Phi_\nu = \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2 \Delta E}\times 2 = \frac{3.85\times10^{26}}{4\pi\times(1.50\times10^{11})^2\times4.0\times10^{-12}}\times 2 = 6.8\times10^{14}\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$$

B2　$\nu_{\rm e}$ の検出効率を ε, 元々のニュートリノの数を N_0，N_2 のうち $\nu_{\rm e}$ を観測した数を $N_{\rm e}$，$\nu_{\rm x}$ を観測した数を $N_{\rm x}$ とすると，条件より，

$$N_1 = \varepsilon N_0$$
$$N_{\rm e} = \varepsilon N_0(1-f)$$
$$N_{\rm x} = \frac{\varepsilon}{6}N_0 f$$
$$N_2 = N_{\rm e} + N_{\rm x}$$

これより，

$$f=\frac{6}{5}\left(1-\frac{N_2}{N_1}\right)$$

注）以下の式から導出しても良い。

$$(1-f)N_1+\frac{f}{6}N_1=N_2$$

B3 電子がチェレンコフ放射をしなくなるのは，そのスピードが $v_{\text{stop}}=\frac{c}{n}$ となったとき。

その時点での全エネルギーは，

$$E_{\text{stop}}=\frac{m_{\text{e}}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_{\text{stop}}^2}{c^2}}}=\frac{nm_{\text{e}}c^2}{\sqrt{n^2-1}}$$

叩き出されたときの電子のエネルギーは，

$$E_{\text{start}}=\alpha\Delta t+E_{\text{stop}}=\alpha\Delta t+\frac{nm_{\text{e}}c^2}{\sqrt{n^2-1}}$$

ニュートリノと衝突する前，電子のもつエネルギーは$m_{\text{e}}c^2$，したがって，ニュートリノから与えられるエネルギーは，

$$E_{\text{imparted}}=E_{\text{start}}-m_{\text{e}}c^2=\alpha\Delta t+\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}-1\right)m_{\text{e}}c^2$$

B4　Be 原子核の動きはニュートリノのドップラー効果を引き起こす。エネルギーの揺らぎによる変化は十分小さいので($\Delta E_{\text{rms}}/E_\nu\sim10^{-4}$)，ドップラー効果は非相対論的極限で考えても良い（相対論的に考えてもほぼ同じ答えとなる)。z軸にそって考えると，

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu}=\frac{v_{\text{z,rms}}}{c}=3.85\times10^{-4}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{V_{\text{Be}}}{c}$$

$$V_{\text{Be}}=\sqrt{3}\times3.85\times10^{-4}\times3.00\times10^{8}\text{ms}^{-1}=2.01\times10^{5}\text{ms}^{-1}$$

気体分子の平均運動エネルギーは，$\frac{3}{2}k_{\text{B}}T_{\text{c}}$ であるから，

$$\frac{1}{2}m_{\text{Be}}V_{\text{Be}}^2=\frac{3}{2}k_{\text{B}}T_{\text{c}}$$

$$T_{\text{c}}=1.13\times10^{7}\text{ K}$$

となる[2]

[2] （訳注）理科年表平成２７年度版によると，中心温度は15.7×10^{6}K であるからだいたい正しいといえる。