IPhO2015 理論第２問（T-2）　【解答】　極値の原理[1]

(A1)　力学的エネルギーの保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_2^2+V_0 \qquad \therefore \quad v_2=\left(v_1^2-\frac{2V_0}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(A2)　境界線上では dV/dx に比例する撃力が $-x$ 軸方向に働く。ここから速度の x 成分 v_{1x} のみが変化を受ける。速度の y 成分は変化しないから，$v_{1y}=v_{2y}$。したがって，

$$v_1\sin\theta_1=v_2\sin\theta_2 \qquad \therefore \quad v_2=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}v_1$$

(A3)　点 O から点 P までの軌道に対する $A(\alpha)$ の定義は，

$$A(\alpha)=mv_1\sqrt{x_1^2+\alpha^2}+mv_2\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-\alpha)^2}$$

$A(\alpha)$ を α に関して微分し，その導関数を 0 とおくと，

$$\frac{v_1\alpha}{\left(x_1^2+\alpha^2\right)^{1/2}}-\frac{v_2(y_0-\alpha)}{\left[(x_0-x_1)^2+(y_0-\alpha)^2\right]^{1/2}}=0$$

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2}=\frac{(y_0-\alpha)\left(x_1^2+\alpha^2\right)^{1/2}}{\alpha\left[(x_0-x_1)^2+(y_0-\alpha)^2\right]^{1/2}}$$

これは，A2 の結果，すなわち，$v_1\sin\theta_1=v_2\sin\theta_2$ と同等であることに注意せよ。

(B1)　領域 I における光速は c/n_1 であり，領域 II における光速は c/n_2 である。ここで c は真空中の光速である。２つの領域を直線 $y=y_1$ で分けると、光が原点 $(0,0)$ から点 (x_0,y_0) まで進むのにかかる時間 $T(\alpha)$ は，

$$T(\alpha)=\frac{n_1\sqrt{y_1^2+\alpha^2}}{c}+\frac{n_2\sqrt{(x_0-\alpha)^2+(y_0-y_1)^2}}{c}$$

$T(\alpha)$ を α に関して微分し，その導関数を 0 とおくと，

$$\frac{n_1\alpha}{\left(y_1^2+\alpha^2\right)^{1/2}}-\frac{n_2(x_0-\alpha)}{\left[(x_0-\alpha)^2+(y_0-y_1)^2\right]^{1/2}}=0 \qquad \therefore \quad n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$$

[注意：導出過程は A3 と似ている。これがスネルの法則である。]

[1] Manoj Harbola（IIT-Kanpur）と Vijay A. Singh（前国立科学オリンピック・コーディネーター）が，この問題の責任著者であった。アカデミック委員会，アカデミック発展グループおよび国際役員に大変感謝する。

(B2)　スネルの法則，$n_0 \sin i_0 = n(y) \sin i$，に，$\dfrac{dy}{dx} = -\cot i$ を用いると，

$$n_0 \sin i_0 = \frac{n(y)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\left(\frac{n(y)}{n_0 \sin i_0}\right)^2 - 1}$$

(B3)　$\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\dfrac{n_0 - ky}{n_0 \sin i_0}\right)^2 - 1}} = -\int dx$　において，$i_0 = 90°$ のとき $\sin i_0 = 1$ であることに注意する。

方法 I　$\xi = \dfrac{n_0 - ky}{n_0}$ と置換すると，

$$\int \frac{d\xi\left(-\dfrac{n_0}{k}\right)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = -\int dx$$

ここで，$\xi = \sec\theta$ とおくと，与えられた積分公式を用いて，

$$\frac{n_0}{k} \ln(\sec\theta + \tan\theta) = x + c$$

方法 II　$\xi = \dfrac{n_0 - ky}{n_0}$ と置換すると，

$$\int \frac{d\xi\left(-\dfrac{n_0}{k}\right)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = -\int dx$$

ここで，もう 1 つの与えられた積分公式を用いて，

$$-\frac{n_0}{k} \ln\left(\frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right) = -x + c$$

さて, 境界条件($x = 0, y = 0$)より, $c = 0$ を得る。こうして次の軌跡の方程式が求まる。

$$x = \frac{n_0}{k} \ln\left(\frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right)$$

(B4)　$y_0 = 10.0$㎝，$n_0 = 1.50$，$k = 0.050$㎝$^{-1}$ が与えられている。(B3)より,

$$x = \frac{n_0}{k} \ln\left(\frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right)$$

$y = -y_0$ とおいて，

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \ln\left[\frac{(n_0 + ky_0)}{n_0} + \left(\frac{(n_0 + ky_0)^2}{n_0^2} - 1\right)^{1/2}\right]$$

$$= 30\ln\left[\frac{2}{1.5} + \left(\left(\frac{2}{1.5}\right)^2 - 1\right)^{1/2}\right]$$

$$= 30\ln\left[\frac{4}{3} + \left(\frac{7}{9}\right)^{1/2}\right]$$

$$= 30\ln\left[\frac{4}{3} + 0.88\right]$$

$$= 24.0\ \text{cm}$$

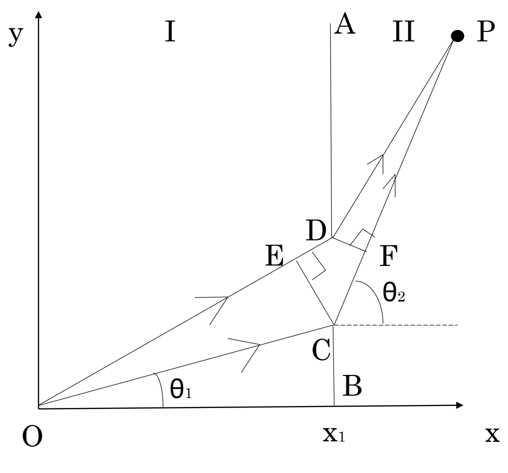
(C1)　ド・ブロイの仮説より，

$$\lambda \to \lambda_{dB} = \frac{h}{mv}$$

λ をド・ブロイ波長として，通常の波動と同じように計算をすると，

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = \frac{2\pi}{h} mv\Delta s = \frac{2\pi\Delta A}{h}$$

(C2)



問題 A で導いた古典的経路 OCP と経路 ODP を考える。幾何学的な経路の差は領域 I の ED と領域 II の CF の差である。したがって（$d << (x_0 - x_1), d << x_1$ に注意せよ），

$$\Delta\phi_{CD} = \frac{2\pi d \sin\theta_1}{\lambda_1} - \frac{2\pi d \sin\theta_2}{\lambda_2}$$

$$= \frac{2\pi m v_1 d \sin\theta_1}{h} - \frac{2\pi m v_2 d \sin\theta_2}{h}$$

$$= 2\pi \frac{md}{h}\left(v_1 \sin\theta_1 - v_2 \sin\theta_2\right)$$

$$= 0$$ （A2 ないしは B1 の結果より）

こうして，古典的経路の近傍ではつねに物質波は強め合うことがわかる。

（D1） $$qU_1 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{9.11\times10^{-31}\times4\times10^{14}}{2}\ \mathrm{J} = 2\times9.11\times10^{-17}\ \mathrm{J}$$

$$= \frac{2\times9.11\times10^{-17}}{1.6\times10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 1.139\times10^{3}\ \mathrm{eV} \quad (\cong 1100\,\mathrm{eV})$$

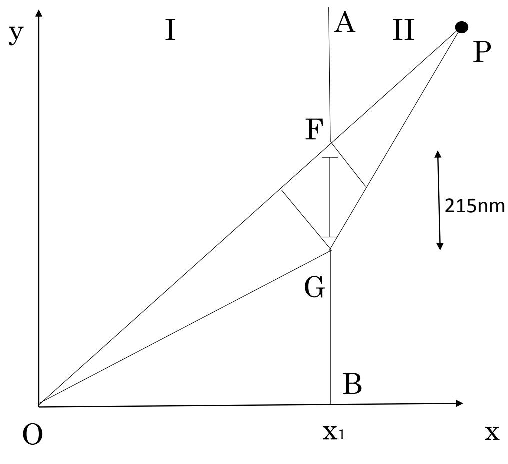
$$\therefore \quad U_1 = 1.139\times10^{3}\ \mathrm{V}$$

（D2） 点 P における位相差は，

$$\Delta\phi_P = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda_1} - \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda_2} = 2\pi\left(v_1 - v_2\right)\frac{md}{h}\sin 10^\circ = 2\pi\beta$$

これより， $\beta = 5.13$

（D3）



電子の検出数が 0 になる点のうち点 P に最も近い点と F を結ぶ直線が FP となす角を $\Delta\theta$ とする。波が打ち消しあう条件は位相差が $2\pi\times\left(\text{整数}+1/2\right)$ で表せることであり， $\beta = 5.13$ であることから，位相差が $\Delta\phi = 2\pi\times5.5$ となる点を考えればよいことが分かる。

$$m v_1 \frac{d\sin\theta}{h} - \frac{m v_2 d \sin\left(\theta + \Delta\theta\right)}{h} = 5.5$$

$$\sin(\theta+\varDelta\theta)=\frac{\dfrac{mv_1 d\sin\theta}{h}-5.5}{\dfrac{mv_2 d}{h}}=\frac{v_1}{v_2}\sin\theta-\frac{h}{m}\frac{5.5}{v_2 d}$$

$$=\frac{2}{1.99}\sin 10^\circ-\frac{5.5}{1374.78\times 1.99\times 10^{7}\times 2.15\times 10^{-7}}=0.174521-0.000935$$

これより，$\Delta\theta=-0.0036^\circ$を得る。したがって，

$$\varDelta y=(x_0-x_1)(\tan(\theta+\varDelta\theta)-\tan\theta)=250(\tan 9.9964-\tan 10)$$
$$=-0.0162\,\mathrm{mm}=-16.2\ \mu\mathrm{m}$$

負号は電子の検出数が 0 になる点のうち点 P に最も近い点は P の下にあるということを意味する。

$\varDelta\theta$ と $\varDelta y$ の近似的な求め方

近似式$\sin(\theta+\varDelta\theta)\cong\sin\theta+\varDelta\theta\cdot\cos\theta$を利用する。

位相差$\Delta\phi=2\pi\times 5.5$から，

$$mv_1\frac{d\sin 10^\circ}{h}-mv_2\frac{d(\sin 10^\circ+\varDelta\theta\cdot\cos 10^\circ)}{h}=5.5$$

また，(D2)の結果より，

$$mv_1\frac{d\sin 10^\circ}{h}-mv_2\frac{d\sin 10^\circ}{h}=5.13$$

したがって，

$$-mv_2\frac{d\varDelta\theta\cos 10^\circ}{h}=0.3700$$

ここから，$\varDelta\theta=-6.39\times 10^{-5}\ \mathrm{rad}=-0.0036^\circ$を得る。前と同様にして$\varDelta y=-16.2\ \mu\mathrm{m}$が求められる。

(D4)　電子の速度と単位体積当たりの平均の電子数から強度は定まる。よって，

$$N=1=(\text{強度})\times(\text{断面積})\times(\text{装置の長さ})/(\text{電子の速度})$$
$$=I_{\min}\times 0.25\times 10^{-12}\times 2/(2\times 10^{7})$$

これより，　$I_{\min}=4\times 10^{19}\,\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$　を得る。