IPhO2015 理論第３問（T-3）　【解答】　原子炉の設計[1]

A. 燃料ピン

A1

解答：$\Delta E = 208.684\ \mathrm{MeV}$

<u>解説</u>：変換の間に放出されるエネルギーは，

$$\Delta E = [m(^{235}\mathrm{U}) + m(^{1}\mathrm{n}) - m(^{94}\mathrm{Zr}) - m(^{140}\mathrm{Ce}) - 2m(^{1}\mathrm{n})]c^2$$

データは原子質量単位(u)で与えられているので，

$$\Delta E = [m(^{235}\mathrm{U}) - m(^{94}\mathrm{Zr}) - m(^{140}\mathrm{Ce}) - m(^{1}\mathrm{n})]c^2$$
$$= 208.684\ \mathrm{MeV}\ [\textbf{許容範囲}(\mathbf{208.000 \sim 209.000})]$$

A2.

解答：$N = 1.702 \times 10^{26}\ \mathrm{m^{-3}}$

<u>解説</u>：この燃料$1\mathrm{m^3}$ あたりの$\mathrm{UO_2}$分子の数N_1は、燃料の密度ρ，アボガドロ定数N_A，平均分子量M_wを用いて，

$$N_1 = \frac{\rho N_A}{M_w}$$

$$= \frac{10600 \times 6.022 \times 10^{23}}{0.270} = 2.364 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$$

それぞれの$\mathrm{UO_2}$分子には，ウラン原子が一つずつ含まれている。それらのうち0.72%のみが$^{235}\mathrm{U}$ なので，

$$N = 0.0072 \times N_1$$
$$= 1.702 \times 10^{26}\ \mathrm{m^{-3}}\ [\textbf{許容範囲}(\mathbf{1.650 \sim 1.750})]$$

A3

解答：$Q = 4.917 \times 10^{8}\ \mathrm{W/m^3}$

<u>解説</u>：核分裂で放出されるエネルギーのうち80%が熱として利用可能であるから，一回の核分裂で得られる熱エネルギーE_fは、A1.から、

$$E_f = 0.8 \times 208.7\ \mathrm{MeV}$$
$$= 166.96\mathrm{MeV}$$
$$= 2.675 \times 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

単位体積当たりの全断面積は，$N \times \sigma_f$である。したがって，単位体積当たり，単位時間当たりに放出される熱Qは，

$$Q = N \times \sigma_f \times \phi \times E_f$$
$$= (1.702 \times 10^{26}) \times (5.4 \times 10^{-26}) \times (2 \times 10^{18}) \times (2.675 \times 10^{-11})\ \mathrm{W/m^3}$$

[1] Joseph Amal Nathan （BARC）と Vijay A. Singh（前国立科学オリンピック・コーディネーター）が，この問題の責任著者であった。アカデミック委員会，アカデミック発展グループおよび国際役員に大変感謝する。

$= 4.917 \times 10^8\ \mathrm{W/m^3}$ [**許容範囲**($\mathbf{4.800{\sim}5.000}$)]

A4

解答：$T_c - T_s = Qa^2/4\lambda$

<u>**解説**</u>：$T_c - T_s$の次元は温度である。このことを$T_c - T_s = [\mathrm{K}]$と書き表す。同様にQ, a, λの次元も書き下せて，温度をQ, a, λのべき乗の積に等しいとすることで，次の次元の方程式が得られる：

$$K = Q^{\alpha} a^{\beta} \lambda^{\gamma}$$
$$= [\mathrm{ML^{-1}T^{-3}}]^{\alpha}[\mathrm{L}]^{\beta}[\mathrm{MLT^{-3}K^{-1}}]^{\gamma}$$

これにより，温度の次元から，　$\gamma = -1$

質量と時間の次元から，　$\alpha + \gamma = 0$

よって，　$\alpha = 1$

次に長さの次元より，　$-\alpha + \beta + \gamma = 0$

これらより，　$\beta = 2$

したがって，　$T_c - T_s = Qa^2/4\lambda$

ここで，問題に示されているように、無次元係数 1/4 をつけた。**もし 1/4 が書かれていなくても減点しない。**

注：別の方法で α, β, γ を求めていても同じ評価をする。

A5

解答：$a_u = 8.267 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$

<u>**解説**</u>：UO_2の融点は3138 Kで，冷却材の最高温度は577 Kである。これにより、「メルトダウン」しないような $T_c - T_s$ の最大値は，$3138 - 577 = 2561\ \mathrm{K}$ である。したがって $T_c - T_s$ の最大値は $T_c - T_s = 2561\ \mathrm{K}$ としてよい。$\lambda = 3.28\ \mathrm{W/(mK)}$ であることに注意して，

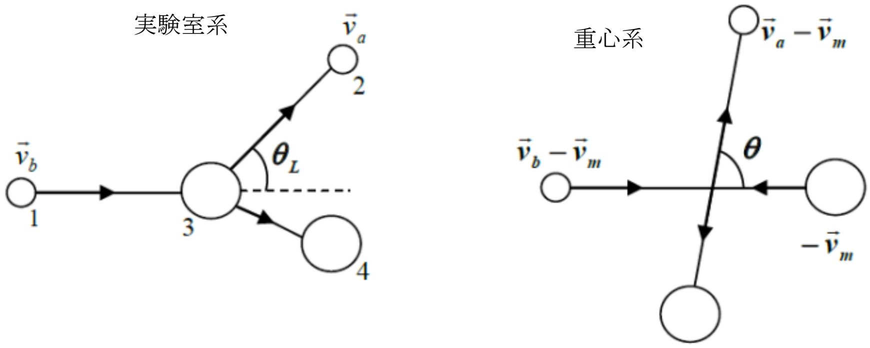
$$a_u^2 = \frac{2561 \times 4 \times 3.28}{4.917 \times 10^8}$$

ここで，A3 で求めたQの値をつかった。これにより，$a_u \simeq 8.267 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$。よって，$a_u = 8.267 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$が燃料ピンの半径の上限値である。

注：インド西部にあるタラプール原子力発電所の第 3、第 4 原子炉には，半径$6.090 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$の燃料ピンがある。

B. 減速剤

B1



B2

解答：**<u>解説</u>**：衝突前，重心系での中性子と減速剤の速さは，それぞれ $v_b - v_m$ と v_m である。重心系での運動量保存則より，$v_b - v_m = Av_m$ よって $v_m = v_b/(A+1)$である。衝突後，重心系での中性子と減速剤の速さをそれぞれ v と V とする。保存則より，

$$v = AV \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{2}(v_b - v_m)^2 + \frac{1}{2}Av_m^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}AV^2 \ (\rightarrow [0.2 + 0.2])$$

これを解くと，

$$v = \frac{Av_b}{A+1}, \quad V = \frac{v_b}{A+1}$$

（別解）重心系の定義より，$v_m = v_b/(A+1)$。衝突前，重心系では中性子と減速剤の速さは$v_b - v_m = Av_b/(A+1)$とv_mであり、弾性衝突なら重心系でみると 2 粒子は逆向きに散乱されるので，速さは衝突前と同じに保たれ，

$$v = \frac{Av_b}{A+1}, \quad V = \frac{v_b}{A+1} \ (\rightarrow [0.2 + 0.1])$$

注：別の解答でも，解き切っていれば適切な点を与える。

B3

解答：

$$G(\alpha, \theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2} = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta]$$

解説： $\overrightarrow{v_a} = \vec{v} + \overrightarrow{v_m}$より、$v_a^2 = v^2 + v_m^2 + 2vv_m\cos\theta$ $(\rightarrow [0.3])$である。v，v_mの式を代入して，

$$v_a^2 = \frac{A^2v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{2Av_b^2}{(A+1)^2}\cos\theta \ (\rightarrow [0.2])$$

ゆえに，

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}$$

$$\therefore \quad G(\alpha,\theta)=\frac{A^2+1}{(A+1)^2}+\frac{2A}{(A+1)^2}\cos\theta=\frac{1}{2}[(1+\alpha)+(1-\alpha)\cos\theta]$$

別の表現：

$$=1-\frac{(1-\alpha)(1-\cos\theta)}{2}$$

注：別の解答でも，解き切っていれば適切な点を与える。

B4

解答：$f_l=0.181$

解説：正面衝突するとき，エネルギー損失は最大，つまり，E_aは $\theta=\pi$ のとき最小になる。

したがって，　$E_a=E_{min}=\alpha E_b$

D_2Oに対して，$\alpha=0.819$であるから，失うエネルギーの比率の最大値$\left(\frac{E_b-E_{\min}}{E_b}\right)$は，

$$1-\alpha=0.181\ [\text{許容範囲}(\mathbf{0.170\sim0.190})]$$

C. 原子炉

C1

解答：$R=3.175\ \mathrm{m}$，$H=5.866\ \mathrm{m}$.

解説：体積は，$V=\pi R^2H$ で一定なので，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\left[\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\left[\frac{2.405^2\pi H}{V}+\frac{\pi^2}{H^2}\right]=\frac{2.405^2\pi}{V}-2\frac{\pi^2}{H^3}=0$$

よって

$$\left(\frac{2.405}{R}\right)^2=2\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

定常状態なので，

$$1.021\times10^{-2}\left[\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]\Psi=8.787\times10^{-3}\Psi$$

よって，

$$H=5.866\ \mathrm{m}\ \left[\text{許容範囲}(\mathbf{5.850\sim5.890})\right]$$
$$R=3.175\ \mathrm{m}\ \left[\text{許容範囲}(\mathbf{3.170\sim3.180})\right].$$

$V=\pi R^2 H$が一定の時，$\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$を最小にするような最適化を行うための，微分を使わない方法：

R^2 を $V,\ H$ で書き換えることで，$\frac{2.405^2\,\pi H}{V}+\frac{\pi^2}{H^2}$ が得られ，これは，

$$\frac{2.405^2\pi H}{2V}+\frac{2.405^2\pi H}{2V}+\frac{\pi^2}{H^2}$$

と書きかえられる。すべての項が正なので，相加平均，相乗平均の間に成り立つ不等式から，

$$\frac{\frac{2.405^2\pi H}{2V}+\frac{2.405^2\pi H}{2V}+\frac{\pi^2}{H^2}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{2.405^2\pi H}{2V}\times\frac{2.405^2\pi H}{2V}\times\frac{\pi^2}{H^2}}=\sqrt[3]{\frac{2.405^4\pi^4}{4V^2}}$$

右辺は定数であり，左辺の最小値が右辺であるということを示している。等号成立は，全項がすべて等しいときで，

$$\frac{2.405^2\pi H}{2V}=\frac{\pi^2}{H^2}\Rightarrow\left(\frac{2.405}{R}\right)^2=2\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

定常状態なので，

$$1.021\times10^{-2}\left[\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]\Psi=8.787\times10^{-3}\Psi$$

よって，

$$H=5.866\ \mathrm{m}\ [\text{許容範囲}(\mathbf{5.850}\sim\mathbf{5.890})]$$
$$R=3.175\ \mathrm{m}\ [\text{許容範囲}(\mathbf{3.170}\sim\mathbf{3.180})].$$

注：右辺に得られた条件を代入することで，最小値がπ^2/H^2であるとわかる。つまり，条件より

$$\frac{\pi^3}{H^3}=\frac{2.405^2\pi^2}{2V}\Rightarrow\frac{\pi^2}{H^2}=\sqrt[3]{\frac{2.405^4\pi^4}{4V^2}}$$

注：西インドにあるタラプール原子力発電所の第 3，第 4 原子炉の半径と高さは，それぞれ 3.192 m と 5.940 m である。

C2

解答：$F_n=387$ m, $M=9.892\times10^4$ kg

解説：燃料チャンネルは，0.286 m間隔の正方格子状に並んでいるので，単位チャンネルあたりの実効的な面積は，$0.286^2\ \mathrm{m}^2$ である。円柱の断面積は，$\pi R^2=3.142\times(3.175)^2=31.67\ \mathrm{m}^2$ なので，円柱内に収容できるチャンネルの数の最大数は，31.67/0.0818 の整数部分，つまり387である。

$$(\text{燃料の質量})=387\times(\text{棒の体積})\times(\text{密度})$$

$= 387 \times (\pi \times 0.03617^2 \times 5.866) \times 10600 = 9.892 \times 10^4$ kg.

$F_n = 387$[許容範囲(380~394)]

$M = 9.892 \times 10^4$ kg [許容範囲(9.000~10.00)]

注 1：（採点対象外）燃料の総体積は，$387 \times (\pi \times 0.03617^2 \times 5.866) = 9.332\ \mathrm{m}^3$。もし原子炉が12.5%の効率で動くなら，A3 の結果を使って原子炉の出力は，$9.332 \times 4.917 \times 10^8 \times 0.125 = 573$ MWである。

注 2：タラプール原子力発電所の第 3,第 4 原子炉には，392 本のチャンネルがあり，燃料の質量は 10.15×10^4 kgである。出力は540 MWである。

小問 B2, B3 の別解：実験室系での減速剤の散乱角をσとする。この角は、衝突前の中性子の進行方向から時計回りにとる。衝突後の減速剤の実験室系での速さをUとする。実験室系での運動量、エネルギー保存則より、

$$v_b = v_a \cos\theta_L + AU\cos\sigma \qquad (1)$$

$$0 = v_a \sin\theta_L - AU\sin\sigma \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}v_b^2 = \frac{1}{2}AU^2 + \frac{1}{2}v_a^2 \qquad (3)$$

(1)と(2)の辺々を二乗して足すことでσを消去し，それと(3)を使うことで，

$$A^2U^2 = v_a^2 + v_b^2 - 2v_a v_b \cos\theta_L$$

$$A^2U^2 = Av_b^2 - Av_a^2 \qquad (4)$$

したがって，

$$2v_a v_b \cos\theta_L = (A+1)v_a^2 - (A-1)v_b^2 \qquad (5)$$

(ii)　重心系で，衝突後の中性子の速さを v とする。重心の定義から，$v_m = v_b/(A+1)$。実験室系において，衝突前の中性子の運動方向と垂直，平行方向に v_a を分解すると，それぞれ $v_a \sin\theta_L$，$v_a \cos\theta_L$ である。これらを重心系での値に変換すると，v の垂直成分，平行成分はそれぞれ$v_a \sin\theta_L, v_a\cos\theta_L - v_m$である。

$$v = \sqrt{v_a^2 \sin^2\theta_L + v_a^2\cos^2\theta_L + v_m^2 - 2v_a v_m \cos\theta_L}$$

において，v_m，$2v_a v_b \cos\theta_L$ を（(5)式を使うなどして）置き換えて整理すると，$v = Av_b/(A+1)$ が得られる。v の成分を２乗して θ_L を消去して，

$$v_a^2 = v^2 + v_m^2 + 2vv_m\cos\theta$$

v，v_m を代入して整理すると，

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}$$

$$G(\alpha,\theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\theta = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta]$$

（もう１つの別解）

(iii) 重心の定義から，$v_m = v_b/(A+1)$。 衝突後，重心系での中性子と減速剤の速さをそ

れぞれvとVとする。保存則より，

$$v = AV\,, \qquad \frac{1}{2}(v_b - v_m)^2 + \frac{1}{2}Av_m^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}AV^2$$

これを解くと，

$$v = \frac{Av_b}{A+1}\,, V = \frac{v_b}{A+1}$$

また，$v\cos\theta = v_a\cos\theta_L - v_m$もわかっているので，$v_m$を $v_b/(A+1)$ でおきかえ，(5)式を用いて $v_a\cos\theta_L$ を書き換えて整理すると，

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}$$

$$G(\alpha,\theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\theta = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta$$

（さらにもう１つの別解）

(iv)　重心の定義から、$v_m = v_b/(A+1)$。 衝突後，重心系での中性子と減速剤の速さをそれぞれvとVとする。保存則より，

$$v = AV\,, \qquad \frac{1}{2}(v_b - v_m)^2 + \frac{1}{2}Av_m^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}AV^2$$

これを解くと，

$$v = \frac{Av_b}{A+1}\,, V = \frac{v_b}{A+1}$$

衝突前の中性子の運動方向と垂直，平行方向にUを分解すると，それぞれ$U\sin\sigma, U\cos\sigma$となる。これらを重心系での値に変換すると，Vの垂直成分，平行成分はそれぞれ $U\sin\sigma$， $-U\cos\sigma + v_m$ である。よって，

$$U^2 = V^2\sin^2\theta + V^2\cos^2\theta + v_m^2 - 2Vv_m\cos\theta$$

ここで，$V = v_m$ なので，

$$U^2 = 2v_m^2(1-\cos\theta)$$

Uを(4)式によって置き換えて整理すると，

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}$$

$$G(\alpha,\theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\theta = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta]$$

注：$v_a = \left(\sqrt{A^2 + 2A\cos\theta + 1}\right)v_b/(A+1)$ が分かる。$v\cos\theta = v_a\cos\theta_L - v_m$ において，v_a, v, v_m を置き換えて整理すると，次のような θ_L, θ の間の関係を得る：

$$\cos\theta_L = \frac{A\cos\theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\theta + 1}}$$

この式を$\cos\theta$の二次方程式とみなすと，

$$\cos\theta = \frac{-\sin^2\theta_L \pm \cos\theta_L\sqrt{A^2 - \sin^2\theta_L}}{A}$$

$\theta_L = 0^{\mathrm{o}}$のとき，負号だと$\theta = 180^{\mathrm{o}}$となって不適，よって，

$$\cos\theta = \frac{-\sin^2\theta_L + \cos\theta_L\sqrt{A^2 - \sin^2\theta_L}}{A}.$$

$\frac{v_a^2}{v_b^2}$の式で、$\cos\theta$を上式に置き換えると、$\cos\theta_L$によって表せる。

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2\cos\theta_L\sqrt{A^2 - \sin^2\theta_L} + \cos 2\theta_L}{(A+1)^2}$$