太陽からの粒子　　(大問点数: 10)

太陽の表面からやってくる光子と太陽の中心からやってくるニュートリノを調べると太陽の表面温度が推定できる。さらには太陽の輝きの起源が、核反応によるものであることがわかる。

この問題では、太陽の質量を$M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30}$ kg、半径を $R_{\odot} = 7.00 \times 10^{8}$ m、輝度(単位時間当たりの放射エネルギー)を $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26}$ W、太陽と地球の距離を $d_{\odot} = 1.50 \times 10^{11}$ m とせよ。

必要ならば次の積分公式を用いよ。

(i) $\int xe^{ax}dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} +$ (積分定数)

(ii) $\int x^2e^{ax}dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} +$ (積分定数)

(iii) $\int x^3e^{ax}dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right)e^{ax} +$ (積分定数)

A　太陽からの放射:

A1	太陽がほぼ完全な黒体放射をしていると仮定する。太陽の表面温度 T_s を求めよ。	**0.3**

太陽からの放射スペクトルはウィーンの公式で近似することができる。これによると地表面に到達する単位時間、単位周波数あたりの光（放射）のエネルギー $u(\nu)$ は、

$$u(\nu) = A\frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2}\frac{2\pi h}{c^2}\nu^3\exp(-h\nu/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{s}}),$$

で与えられる。ここで ν は周波数、A は入射光に垂直な入射面の面積である。

半導体でできた薄い円盤形の太陽電池を考える。太陽電池の面積を A とし、太陽電池は太陽からの入射光に対して垂直におかれているとする。

A2	ウィーンの公式を用いて、太陽電池の表面に単位時間あたりに入射する太陽光の放射エネルギー P_{in} を $A, R_{\odot}, d_{\odot}, T_{\mathrm{s}}$ と物理定数 c, h, k_{B} を用いて書き表せ。	**0.3**
A3	太陽電池に入射する単位時間、単位周波数あたりの光子数 $n(\nu)$ を $A, R_{\odot}, d_{\odot}, T_{\mathrm{s}}$, ν と物理定数$c, h, k_{\mathrm{B}}$ を用いて書き表せ。	**0.2**

太陽電池を構成する半導体中で電子を励起するには「バンドギャップ」 E_{g} より大きなエネルギーが必要である。このような太陽電池のモデルとして以下を仮定する。すなわち太陽電池に入射する光子のうちエネルギー $E \geq E_{\mathrm{g}}$ を持つものだけが電子を励起できる。また電子の受け取ったエネルギーのうちE_{g}が太陽電池の出力（エネルギー）として利用できるだけで、余ったエネルギーは熱となって散逸する(つまり太陽電池の出力として利用できない)。

A4	$E_{\mathrm{g}} = h\nu_{\mathrm{g}}$ とし、 $x_{\mathrm{g}} = h\nu_{\mathrm{g}}/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{s}}$ とする。太陽電池から単位時間当たりに出力されるエネルギー P_{out} を $x_{\mathrm{g}}, A, R_{\odot}, d_{\odot}, T_{\mathrm{s}}$ と物理定数 c, h, k_{B} を用いて書き表せ。	**1.0**
A5	太陽電池の効率 η を x_{g} を用いて書き表せ。	**0.2**
A6	x_{g} に対するη のグラフの概形を書け。とくに $x_{\mathrm{g}} = 0$ と $x_{\mathrm{g}} \to \infty$ での値をグラフに書き入れること。$x_{\mathrm{g}} = 0$ と $x_{\mathrm{g}} \to \infty$ での $\eta(x_{\mathrm{g}})$ の傾きを求めよ。	**1.0**
A7	η が最大となるような x_{g} を x_0 とする。 x_0 を与える 3 次方程式を求めよ。 x_0 の数値を ± 0.25 の精度で求め、 $\eta(x_0)$ を計算せよ。	**1.0**
A8	シリコンのバンドギャップを $E_{\mathrm{g}} = 1.11$ eV とする。この値を用いてシリコン太陽電池の効率 η_{Si}	**0.2**

	を計算せよ。	

19 世紀後半にケルビン(Kelvin)とヘルムホルツ(Helmholtz)(KH)は、太陽が輝くメカニズムに関して次のような仮説を立てた。最初、大きなガスの固まりがあり，その密度は十分に低く、全質量は$M_\odot$ とする。これが次第に中心部分に落ち込んで行く際、重力の位置エネルギーが解放され、太陽から光（エネルギー）が放射される、とするものである。

A9	太陽内部の物質の密度は一定であるとする。現在の太陽の重力の位置エネルギー Ω を $G, M_\odot$ と $R_\odot$ を用いて書き表せ。	**0.3**
A10	KH の仮説に従って、太陽が輝き続けることのできる寿命 τ_{KH} を年単位で概算せよ。但し、太陽の輝度はつねに一定であると仮定する。	**0.5**

上で見積もった寿命 τ_{KH} は、隕石からわかっている太陽系の寿命と合わない。これは太陽のエネルギーが重力だけでは説明できないことを示している。

B 太陽からやってくるニュートリノ：

1938 年にハンス・ベーテは、太陽内部で起こる水素からヘリウムへの核融合が太陽のエネルギーを生み出していると考えた。正味の核反応は

$$4\,{}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^{+} + 2\nu_{\mathrm{e}}$$

と書くことができる。（反応で生じる「電子ニュートリノ」 ν_{e} の質量は 0 であるとしてよく、またこの問題では、ニュートリノが運び去るエネルギーは無視してよい。）太陽から放射された電子ニュートリノを検出することで、太陽内部で核融合が起こっていることの検証が可能である。

B1	地球に届くニュートリノについて単位時間当たりに単位面積を通過する粒子数 Φ_ν (単位は $\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$) を計算せよ。ただし、上記の核融合反応で放出されるエネルギーは $\Delta E = 4.0 \times 10^{-12}\mathrm{J}$ である。また、太陽から放射されるエネルギーは、すべてこの核融合反応によるものであることを仮定せよ。	**0.6**

太陽の中心から地球に届くまでの間に、電子ニュートリノ ν_e は別の種類のニュートリノ ν_{x} へ変換される。 ν_{x} の検出効率（検出する割合）は、電子ニュートリノ ν_{e} の検出効率の 1/6 である。もしニュートリノの変換がなければ、1 年間に 平均で N_1 個のニュートリノが検出されるはずである。しかし実際にはこの変換のせいでν_e と ν_{x} 合わせて年間に平均で N_2 個のニュートリノが検出される。

B2	ν_{e} のうち ν_{x} に変換されたものの割合を f として、これをN_1 と N_2 を用いて表わせ。	**0.4**

ニュートリノの検出では、水で満たされた大きな検出器が用いられる。ニュートリノと物質の相互作用はとても弱いが、ごくまれにニュートリノが検出器内の水分子と衝突して電子を叩き出す。この電子は大きな運動エネルギーをもち、水中を高速で通過する際、円錐状に電磁波を放出する。この電磁波放射をチェレンコフ放射という。チェレンコフ放射は、電子の速さが水中(屈折率を nとする)の光速を超えている間だけ起こる。

B3	ニュートリノに叩き出された電子は、水中を通過する際、単位時間当たりα の一定の割合でエネルギーを失うものとする。チェレンコフ放射が時間 Δt の間だけ起こるとして、ニュートリノから電子に与えられるエネルギー E_{imparted} を $\alpha, \Delta t,\ n, m_{\mathrm{e}}, c$ で表せ (ニュートリノに叩き出されるまで電子は静止しているとする)。	**2.0**

水素原子 H からヘリウム原子 He への核融合は段階的に起きる。これらの中間過程で ^{7}Be 原子核(静止質量 m_{Be})が生成する。次いでこの ^{7}Be原子核は、電子を吸収して ^{7}Li 原子核(静止質量 $m_{\mathrm{Li}} < m_{\mathrm{Be}}$) にかわると同時に$\nu_{\mathrm{e}}$ を放出する。この原子核反応は以下のように書ける。

$$^{7}\mathrm{Be} + \mathrm{e}^{-} \longrightarrow {}^{7}\mathrm{Li} + \nu_{\mathrm{e}}$$

静止している Be 原子核($m_{\mathrm{Be}} = 11.65 \times 10^{-27}$ kg) が静止している電子を吸収するとき、エネルギー $E_{\mathrm{v}} = 1.44 \times 10^{-13}$ J のニュートリノが放出される。しかし実際には太陽中心の温度 T_{c} のため、Be 原子核はランダムな熱運動をしている。このため、放出されたニュートリノには、二乗平均速度に比例する量 ΔE_{rms} だけのエネルギー揺らぎがある。

B4	ΔE_{rms}=5.54×10^{-17}J とする。Be 原子核の速さの二乗平均 V_{Be} と T_{c} を計算せよ(ヒント： ΔE_{rms} は速度の視線方向成分の二乗平均値に依存することに注意せよ)。	**2.0**