極値の原理 （大問得点： 10）

A 力学における極値の原理

摩擦のない水平面（$x-y$平面）が直線 AB ($x=x_1$) によって２つの領域 I , II に分けられている(図 1)。領域 I で質量 m の質点の位置エネルギーは $V=0$、領域 II では $V=V_0$ とする。いま、質点が原点 O からx 軸となす角が θ_1 の方向に初速 v_1 で打ち出された。その後、質点は領域 II 内においてx 軸となす角 θ_2 の方向に速さ v_2 の直線運動を続け、点 P に達した。以下、課題 T-2 全体にわたって重力と相対論的効果は無視せよ。

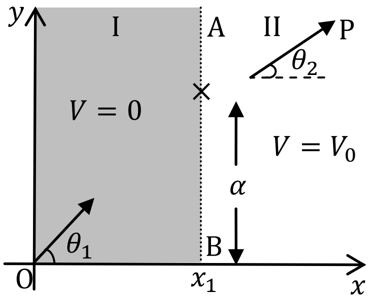


図 1

A1	m, v_1, V_0 を用いて v_2 を表せ。	**0.2**
A2	v_1, θ_1, θ_2 を用いて v_2 を表せ。	**0.3**

作用 A と呼ばれる量を式 $A=m\int v(s)ds$ により定義する。ここで ds は質点の軌跡に沿った微小な移動距離を表し、 m は質点の質量、 $v(s)$ は質点の速さである。積分は質点の軌跡にそって行われる。例えば、半径 R の等速円運動（速さ v）では、１回転につき作用 は $A=2\pi mRv$ となる。質点のエネルギー E が一定の場合、固定された２点を結ぶあらゆる軌跡の中で実際に質点がたどる軌跡は、作用 A が極値(極大・極小)となるものであることが証明できる。従来これは「最小作用の原理 (PLA)」として知られている。

A3	最小作用の原理によれば、位置エネルギーが一定の領域において固定された２点をつなぐ質点の軌跡は直線となることが予想される。２つの固定点を図 1 の原点 O (0,0)と点 P(x_0, y_0)に選び、領域 I と II の境界で粒子が通過する点の座標を (x_1, α) とする。ここで x_1 は定数であり、作用は座標αのみに依存することに注意する。作用 $A(\alpha)$ の表式を求めよ。また最小作用の原理から v_1/v_2 とこれらの座標の間に成り立つ関係式を導け。	**1.0**

B 光学における極値の原理

光線が媒質 I (屈折率 n_1)から媒質 II (屈折率 n_2)に入射する状況を考える。２つの媒質は x 軸に平行な直線によって区切られており、光線が y 軸となす角を媒質 I でi_1、媒質 II でi_2とする(図 2)。光線の軌跡を調べるために「フェルマーの最小時間の原理」として知られるもうひとつの極値(極大・極小)の原理を用いる。

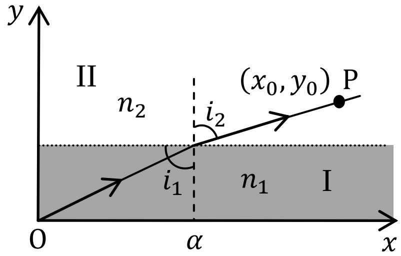


図 2

B1	フェルマーの原理とは、固定された２点間を進む光は、所要時間が最短（極小）となる軌跡をたどる、というものである。フェルマーの原理を用いて $\sin i_1$ と $\sin i_2$ の間に成り立つ関係を導け。	**0.5**

図 3 は、砂糖水に水平に入射した光線の軌跡の模式図である。砂糖水の濃度は（y 軸に沿って）上に行くほど薄く、下に行くほど濃い。このため溶液の屈折率も上に行くほど小さく、下に行くほど大きくなる。

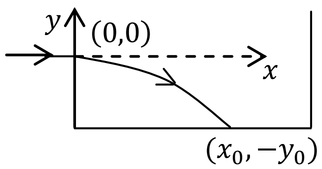
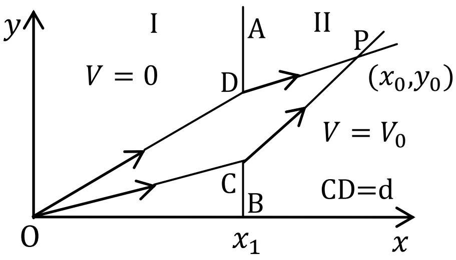


図 3: 砂糖水の容器

B2	屈折率 $n(y)$ は高さ y のみに依存すると仮定する。B1 で得られた関係式を用いて光の軌跡の傾き dy/dx をn_0 (y=0 での屈折率)と $n(y)$ を用いて表せ。	**1.5**
B3	レーザー光が砂糖水容器の原点 (0,0)から水平に入射する。容器の底から原点までの高さを y_0 とする(図 3)。屈折率が $n(y)=n_0-ky$ (ただし n_0 と k は正定数)と書ける時、光がたどる軌跡についてxをyなどを用いて表せ。 必要ならば次の公式を用いて良い。 $\int \sec\theta \, d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + (積分定数)$ ここで $\sec\theta = 1/\cos\theta$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + (積分定数)$	**1.2**
B4	y_0 = 10.0 cm, n_0 = 1.50, k = 0.050 cm^{-1} (1 cm = 10^{-2} m)の時の、ビームが容器の底に到達する位置 x_0 の値を求めよ。	**0.8**

C　物質の波動性における極値の原理

ここからは運動する粒子の波動性と最小作用の原理の関係性を考察していく。まず、粒子は原点 O から点 P へたどりうるすべての経路を取る事ができると仮定する。その上で、ド・ブロイ波が干渉して強め合う経路を求めよう。

C1	ある経路にそった微小長さ Δs の運動を考える。その間に生じるド・ブロイ波の位相変化 $\Delta\varphi$ を、同じ微小な経路で生じる作用の変化 ΔA とプランク定数を用いて表せ。	**0.6**
C2	問題 A で考察した粒子（質点）が原点 O から点 P まで移動する状況を考える(図 4)。２つの領域の間の境界線 AB には波動を通さない壁が置かれており、壁には小さなスリット CD (幅 d は $d \ll (x_0 - x_1)$ かつ $d \ll x_1$ を満たす)が開いている。 経路 OCP と ODP を考える。ただし、経路 OCP は問題 A で導いた古典的な経路である。それぞれの経路を通った場合の位相差 $\Delta\varphi_{\mathrm{CD}}$ を一次近似の範囲で求めよ。  図 4	**1.2**

D　物質波の干渉

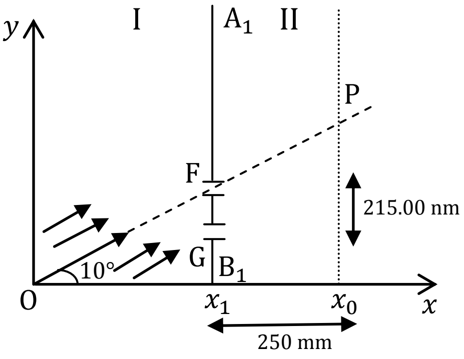


図 5

電子銃が原点 O に設置されており、平行な電子線が放出されているとする。位置 $x = x_1$ に設置された物質波の通れない壁 A_1B_1 には細いスリット F があり、経路 OFP は一直線上にあると仮定する。ここで P は $x = x_0$ に設置されたスクリーン上の点である(図 5)。領域 I での電子の速さは $v_1 = 2.0000 \times 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ であり、電子線と x 軸となす角は $\theta = 10.0000^\circ$ である。領域 II に射した電子の速さが $v_2 = 1.9900 \times 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ になるように，電位が設定されている。 $x_0 - x_1$ 間の距離は 250.00 mm (1mm = 10^{-3}m)である。以下の問いでは電子間の相互作用は無視してよい。

D1	原点 O から放出される電子は、静止した状態から加速されたとする。必要な加速電圧U_1 を求めよ。	**0.3**
D2	A_1B_1 上のスリット F の 215.00 nm (1nm = 10^{-9}m)下に、スリット F と同一の幅を持つスリット G を新たに設置する(図 5)。スリット F と G のそれぞれを通って点 P に到達したド・ブロイ波に対して、それらの位相差を $2\pi\beta$ と書いた時の β を求めよ。	**0.8**

D3	スクリーン上で電子の検出数が 0 になるような点のうち、点 P に最も近いものと点 P との距離 Δy を求めよ。 (注意: 近似式 $\sin(\theta+\Delta\theta)\approx\sin\theta+\Delta\theta\cos\theta$ を用いても良い)	**1.2**
D4	電子線の断面は $500\mathrm{nm}\times 500\mathrm{nm}$ の正方形であるとし、装置の長さを 2m と仮定する。この時、各時刻に平均して少なくともひとつの電子が実験装置内に存在するような最小の電子線の密度 $I_{\min}$(ビームに直交する単位面積を単位時間に横切る電子の数) を求めよ。	**0.4**