

## 飛び跳ねるビーズ：相転移と不安定性のモデル（10点）

問題を解き始めるまえに、別の封筒のなかにある「全般的な注意」を読みなさい。

### イントロダクション

相が変わる現象（相転移現象）は、日常生活のなかでもよく知られた現象である。たとえば、水は固体・液体・気体の異なる状態をとる。これらの異なる状態は、相転移する。相転移においては、物質のなかの分子の集団的挙動が変化する。そして、相転移の際には、状態変化にともなう転移温度が常に重要である。たとえば、先に挙げた例では、水の凝固点や沸点が転移温度に対応する。

しかし、相転移はもっと幅広い現象であり、他の系でも現れる。たとえば、磁石では、転移温度以下では常磁性相から強磁性相にマクロな状態が変化する。また、超伝導体では、転移温度以下ではふつうの伝導体から超伝導体に変化する。

いわゆる秩序変数と呼ばれるものを導入すると、これらのすべての相転移現象は、共通の枠組みで理解できる。たとえば、磁性においては、秩序変数は、原子の磁気モーメントの並び方に関する。

いわゆる連続相転移と呼ばれる相転移現象では、秩序変数は臨界温度より高い温度では常にゼロになり、転移温度より低い温度では連続的に増加する（下の図1に示したとおりである）。連続相転移における転移温度は、臨界温度と呼ばれる。また、図1のなかでは、磁石の場合におけるミクロな秩序状態、または無秩序状態が矢印を用いて表現されている。臨界温度より低温の強磁性相では、個々の磁気モーメントは同じ向きにそろい、マクロな磁化が生まれる。一方で、臨界温度より高温の常磁性相では、個々の磁気モーメントの向きは不均一であり（ランダムであり）、マクロな磁化はゼロになる。

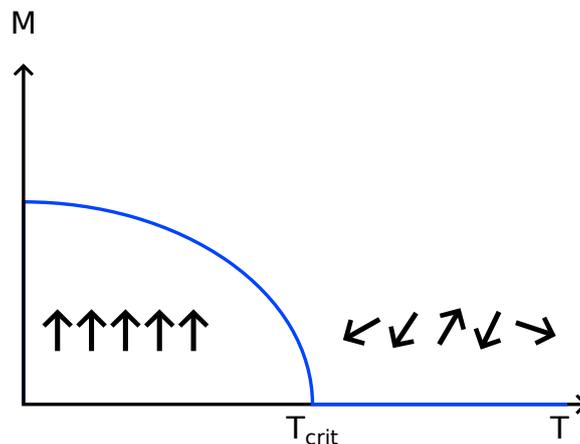


図1：相転移における、秩序変数  $M$  の温度依存性。臨界温度  $T_{\text{crit}}$  より高温では、秩序変数はゼロとなるのに対して、臨界温度  $T_{\text{crit}}$  より低温になると、秩序変数は連続的に増加して、ゼロではない値をとる。

連続相転移では、一般に秩序変数は臨界点の近くでべき乗的な振舞いを示す。たとえば、磁性に関しては、臨界温度  $T_{\text{crit}}$  以下で磁化  $M$  は次のように与えられる：

$$M \begin{cases} \sim (T_{\text{crit}} - T)^b, & M < T_{\text{crit}} \\ = 0, & M > T_{\text{crit}} \end{cases} \quad (1)$$

なお、 $T$  は温度である。ここで、驚くべきことは、このべき乗的振舞いは普遍的であるということである。すなわち、べき乗則におけるべき乗の指数は、多くの異なる相転移現象において同じ値をとる。

## 課題

この問題では、連続相転移におけるいくつかの特徴を調べられる簡単な例について考える。ここで扱う「連続相転移におけるいくつかの特徴」の一つは、不安定性が粒子の集団的な振舞いにどのように影響を与え、相転移へといたるかである。それに加えて、マクロな状態変化が粒子の励起にどのように依存するかを調べる。

ふつうの相転移現象では、粒子の励起は温度によって制御される。しかし、この問題で扱われる状況では、スピーカーの振動によって加速される、粒子の運動エネルギーに励起は対応する。ここで考えている相転移現象におけるマクロな状態変化は、小さな壁で仕切られている円筒の一方に、ビーズが分かれることに対応する。

ビーズ（粒子）がシリンダーの片方に入れている状態から、スピーカーの振幅を増加させたとき、ある程度まで振幅を増加させると、最終的には壁の両側で粒子の個数が等しくなることに気付くだろう。これは、臨界温度よりも高温まで熱したことに対応する。

この問題の目的は、ここで議論となっているモデル相転移の、臨界指数を求めることである。

## 実験器具のリスト

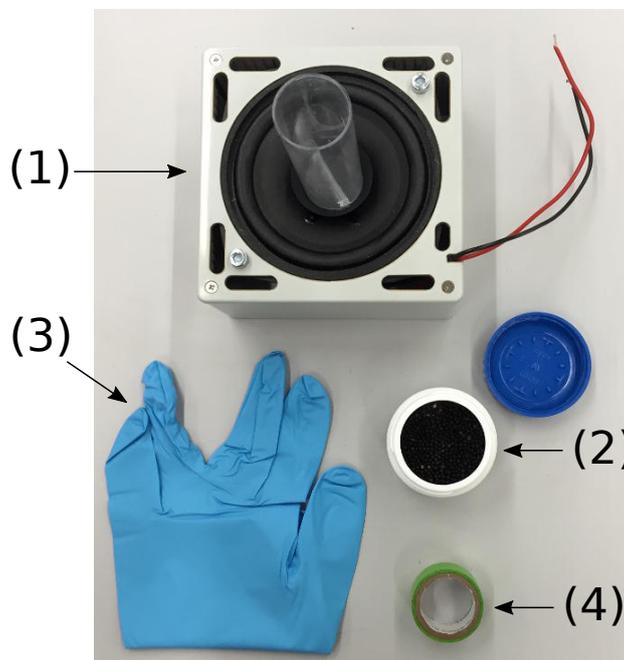


図 2：この実験のための、追加の実験器具。

1. 上にプラスチックの円筒が付いたスピーカー
2. (プラスチック容器中の) 約 100 個のケシの実 (この問題におけるビーズ、あるいは粒子とは、このケシの実のことである)
3. 手袋

## 4. 粘着テープ

### 重要な事前注意

- スピーカー上に付いたプラスチックの円筒には、横から過剰な力を加えてはいけません。スピーカーの膜が破れたり、プラスチックの円筒がとれても、器具の取り替えはおこなわない。
- 使用していないときには、スピーカーの電源はオフにせよ。これは、電池の不要な消費を防ぐためである。
- この実験では、信号発生器の側面にあるスピーカ端子から、4 Hz の、のこぎり波の信号が出力される。
- のこぎり波の信号の振幅は、(4) のポテンショメーターを用いることで調整することができる。信号の振幅に比例した直流電圧は、(GND ソケット (7) を基準として) モニターソケット (6) に出力される。ここで指示した ( ) つきの番号は、「全般的な注意」の信号発生器の箇所の写真 (図 2) の番号に対応する。
- スピーカーの膜は繊細で破れやすい。垂直方向にも水平方向にも、余計な力がかからないように注意せよ。

## Part A : 臨界励起振幅 (3.3 点)

実際に問題に取り組むまえに、スピーカーを信号発生器の端子に接続せよ（正しい極につないでいるか確認すること）。次に、スピーカーの上に設置されたシリンダーのなかにケシの実をいくつか（たとえば 50 個）入れて、ケシの実が出ないように与えられた手袋の切れ端を用いて円筒の上部をふさぎなさい。スイッチ (8) を用いて励起をオンにして、与えられたドライバーを使ってポテンシオメーター (4) を回して振幅を調整せよ。異なる振幅についていろいろ試してみて、ビーズの分かれ方を観察してみよ。

この問題の最初の課題は、相転移にともなう臨界励起振幅を求めることである。そのためには、壁によって仕切られた容器の一方と他方のそれぞれに入ったビーズの数  $N_1$  と  $N_2$  を ( $N_1 \leq N_2$  とする)、デジタルマルチメーターに表示される電圧振幅  $A_D$  の関数として決定する必要がある。ここで、 $A_D$  とは、ソケット (6) を測定して得られる電圧のことである（「全般的な注意」の信号発生器の箇所を参照せよ）。この電圧は、スピーカーを動かすのこぎり波の電圧に比例する。ひとつの電圧について、少なくとも 5 回の測定をおこなうこと。

ヒント：

- 粒子がここで考察の対象となるような運動を常にしていることを保証するために、スピーカーの振幅電圧が  $0.7\text{ V}$  より大きな振幅の場合について実験を行うこと。最初は、ビーズを数えずに、電圧をゆっくり変化させたときの系の挙動を観察してみよ。静電気力の影響で、いくつかのビーズは飛び跳ねずに下に貼り付いたままであるかもしれないが、そのようなビーズは数えてはならない。

<b>A.1</b>	さまざまなスピーカーの振幅 $A_D$ に対して、壁によって仕切られた容器の一方と他方のそれぞれに入った粒子の数 $N_1$ と $N_2$ を測定せよ。その測定結果を、 <b>表 A.1</b> に記録せよ。	1.2pt
------------	---	-------

<b>A.2</b>	$N_1$ と $N_2$ の測定値の標準偏差を計算し、 <b>表 A.1</b> にその結果を記入せよ。そして、 <b>グラフ A.2</b> に、 $N_1$ と $N_2$ のそれぞれを、スピーカーの振幅 $A_D$ の関数としてプロットせよ。誤差もグラフのなかに示すこと。	1.1pt
------------	--	-------

<b>A.3</b>	臨界値 $A_{D,\text{crit}}$ では、定常状態となるほどに十分長く待つと、 $N_1 = N_2$ となる。そこで、前問で得られたグラフをもとにして、デジタルマルチメーターに表示された振幅の臨界値 $A_{D,\text{crit}}$ を求めよ。	1pt
------------	--	-----

## Part B : 較正 (こうせい、キャリブレーション) (3.2 点)

デジタルマルチメーターに表示される振幅は、スピーカーに加えられている電圧に対応している。しかし、物理的に関心のある量は、スピーカーの振動にともなうスピーカーの膜の変位の最大値  $A$  である。なぜなら、 $A$  はどれくらい激しくビーズが励起されるかに関係しているからである。よって、表示された振幅を較正する必要がある。この較正のために、与えられた器具や道具はすべて用いてよい。

<b>B.1</b>	励起振幅、すなわち振動の 1 周期におけるスピーカーの膜の変位の最大値 $A$ (単位は mm) を測定するための実験の概略図を描け。	0.5pt
------------	---	-------

<b>B.2</b>	適切な数の測定点について、振幅 $A$ (単位は mm) を決定せよ。すなわち、デジタルマルチメーターに表示される振幅 $A_D$ の関数として振幅 $A$ を <b>表 B.2</b> に記録せよ。また、測定誤差も示しなさい。	0.8pt
------------	--	-------

<b>B.3</b>	データを <b>グラフ B.3</b> にプロットせよ。誤差もグラフのなかに示すこと。	1.0pt
------------	---	-------

**B.4** 較正関数  $A(A_D)$  を求めるための適切なフィッティングを用いて、その線の特徴づけるパラメーターを決定せよ。 0.8pt

**B.5** ケシの実の臨界励起振幅  $A_{\text{crit}}$  を求めなさい。 0.1pt

### Part C : 臨界指数 (3.5 点)

この問題で考察の対象となっている系においては、(ふつうの相転移現象における) 温度は、飛び跳ねの運動エネルギーに対応する。このエネルギーは、スピーカーの振動の速さの 2 乗に比例する。振動の速さとは、すなわち、 $v^2 = A^2 f^2$  である (ここで  $f$  は信号発生器の振動数である)。この Part では、この関係が成り立っているかどうかを検証し、秩序変数のべき乗的な振舞いを決定する指数  $b$  (式 (1) を見よ) を求めよう。

**C.1** 数の不均一さ (アンバランスさ)  $\left| \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right|$  は、この問題で考えている系における秩序変数になる。なぜなら、この不均一さは、臨界振幅よりも強い振幅ではゼロになり、臨界振幅が弱いときには 1 になるからである。そこで、振幅  $A$  の関数として秩序変数  $\left| \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right|$  を求めよ。すなわち、 $A$  に対応する  $\left| \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right|$  の値を、表 C.1 に記録せよ。 1.1pt

**C.2**  $\left| \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right|$  を  $|A_{\text{crit}}^2 - A^2|$  の関数として、グラフ C.2 にプロットしなさい。グラフ C.2 として、横軸も縦軸も対数スケールのも (両対数グラフ) も与えられているが、どちらのグラフを利用しても良い。計算のために、表 C.1 の余った欄を用いてもよい。また、プロットをおこなうと、そのプロットは直線上に乗っていないように見えるかもしれないが、臨界指数の公式に従うような直線の上に乗っているとみなしなさい。 1pt

**C.3** 指数  $b$  と、その誤差を求めよ。 1.4pt